



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>





The Gift of  
**WILLIAM H. BUTTS, Ph.D.**

A.B. 1878 A.M. 1879

Teacher of Mathematics

1898 to 1922

Assistant Dean, College of Engineering

1908 to 1922

Professor Emeritus

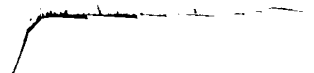
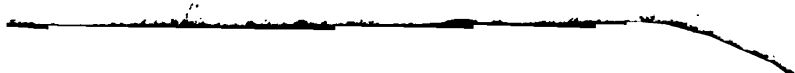
1922

RADCLIFFE  
OBSERVATORY  
OXFORD.

S. J. Thigand  
May 10. 1837

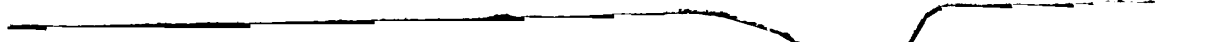
PA  
803.

AI  
1760





*NEWTONI*  
**PRINCIPIA**  
**PHILOSOPHIÆ,**  
*CUM COMMENTARIO PERPETUO.*



PHILOSOPHIÆ  
NATURALIS  
PRINCIPIA  
MATHEMATICA;

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO;

*Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio*

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER,

*Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,*

*Matheseos Professorum.*

Editio altera longè accuratior & emendatior.

TOMUS PRIMUS.



COLONIÆ ALLOBROGUM,

Sumptibus CL. & ANT. PHILIBERT Bibliop.

---

M D C C L X.



7-1-1941

7-1-1941

7-1-1941

7-1-1941

7-1-1941

7-1-1941



70#400b.

7-1-1941

Rev. Lib.  
Bills  
Professor, Illinois, H. Butter  
10-14-1935  
v. 1-4  
add. 2d.

v

R E R U M  
MATHEMATICARUM  
STUDIOSIS,  
PHILOSOPHIÆ NEWTONIANÆ  
INTERPRETES.

Q Uam recondita sint simul & utilia *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, norunt ii omnes qui vel ipsum Clarissimi Authoris nomen audierunt. Tanta est rerum dignitas atque sublimitas, tanta sermonis plusquam Geometrica brevitates, ut præstantissimum illud opus paucissimis duntaxat Geometris factum videatur. Eas ob causas viris Matheseos cultiorisque Physices studiosis gratissimam fore putavimus, eo modo comparatam interpretationem, ut omnes tam utilis Philosophiæ propositiones, corollaria omnia atque scholia inoffenso pede possint decurrere, qui vel ipsis Geometriæ & vulgaris Algebrae ele-  
men-

mentis probè imbuti sunt. Quod ut præstaremus , Mechanices & Calculi infinitorum principia , quantum instituti nostri ratio postulat , NEWTONI vestigiis insistentes demonstravimus ; perbreve , sed theorematum sæcunditate plenum nostris Commentariis inferuimus tractatum Sectionum Conicarum ; Quæ vel minimùm , nimia obscuritate Lectori negotium parere possent , ea omnia exponere & in bono lumine collocare conati sumus ; quæ in scholiis , corollariis , propositionumque serie , prætermisâ demonstratione , pronuntiat NEWTONUS , præmissis vel interjectis Lemmatibus scrupulosè demonstrata invenient , qui in sola doctissimi Authoris verba jurare nolunt ; eximia quæ in NEWTONI propositionibus latent inventa , deteximus atque evolvimus ; tandem cum præstantissima illa summi viri principia non solùm intelligere , sed & illam quam sibi aperuit ad inventionem viam explorare plurimùm delectationis habeat & utilitatis , dispersa huc & illuc generalia quædam problema.



blemata Lector reperiet. Hæc sunt quæ facere volumus: quo exitu, penès benevolum Lectorem esto iudicium. Ex brevi illo commentariorum nostrorum prospectu satis patet quos nobis lectores postulemus; nec præstantissimis Mathematicis nec imperito Philosophorum vulgo nos scribere profiteamur; ad huiusce operis lectionem eos duntaxat admittimus qui ea quæ jam diximus elementa in promptu habent, & tali insuper pollent mentis acie, ut longioris demonstrationis vim atque seriem studiosè persequi & animo comprehendere possint.

De nostris Commentariis hæc satis dicta sint. Verùm naturalis æquitas & mathematicus candor postulant, ut nos plurimùm debere fateamur Doctissimis Viris, DAVIDI GREGORIO, VARIGNONIO, JACOBO HERMANNO, JOANNI KEILLIO, aliisque multis, qui varias *Newtonianæ Philosophiæ* partes luculentis scriptis illustrarunt. Eâdem æquitatis atque ingenuitatis lege à nobis religiosè factum est,  
ut

ut eos omnes quorum spoliis aliquandò ditescimus, in Commentariorum nostrorum decursu honoris causâ nominemus. Publicum quoque grati animi testimonium deesse nolumus Clariss. D<sup>no</sup>. J. L. CALEANDRINO in Academiâ Genevensi Professore in rebus Mathematicis versatissimo, qui hanc nostram NEWTONI principiorum editionem adornari curavit ad normam elegantissimæ illius editionis, quæ additionibus multis locupletata *Londini* prodiiit anno 1726. Deindè id sibi laboris assumpsit vir doctissimus non solùm ut schemata incidi, suis locis disponi, typographica menda corrigi sedulò invigilaret, sed etiam ea quæ jam laudavimus Sectionum Conicarum elementa composuit, & quæ à nobis non satis perspicuè videbantur exposita propriis notis aliquandò illustravit.

Hoc nostro labore fruantur rerum mathematicarum Cultores.

ROME in Regio Conventu SSæ. Trinitatis;  
An. 1739.

IL:

ILLUSTRISSIMÆ  
SOCIETATI REGALI  
A

SERENISSIMO REGE  
CAROLO II.  
AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM  
FUNDATÆ,

ET  
AUSPICIIS  
SERENISSIMI REGIS  
GEORGII  
FLORENTI

TRACTATUM HUNC D.D.D.

IS. NEWTON.





# AUCTORIS PRÆFATIO AD LECTOREM.

**C**UM veteres mechanicam ( uti auctor est Pappus ) in rerum naturalium investigatione maximi fecerint ; & recentiores , missis formis substantialibus & qualitatibus occultis , phenomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggressi sint ; Visum est in hoc tractatu mathesim excolere , quatenus ea ad philosophiam spectat. Mechanicam verò duplicem veteres constituerunt : rationalem , quæ per demonstrationes accuratè procedit , & practicam. Ad practicam spectant artes omnes manuales , à quibus utique mechanica nomen mutuata est. Cum autem artifices parùm accuratè operari soleant , sit ut mechanica omnis à geometriâ ita distinguatur , ut quicquid accuratum sit ad geometriam referatur , quicquid minùs accuratum ad mechanicam. Attamen errores non sunt artis , sed artificum. Qui minùs accuratè operatur , imperfectior est mechanicus , & si quis accuratissimè operari posset , hic foret mechanicus omnium perfectissimus. Nam & linearum rectorum & circulorum descriptiones , in quibus geometria fundatur , ad mechanicam pertinent. Has lineas describere geometria non docet , sed postulat. Postulat enim ut tyro easdem accuratè describere prius didicerit , quàm limen attingat geometriæ ; dein quomodo per has operationes problemata solvantur , docet ; rectorum & circulos describere problemata sunt , sed non geometrica. Ex mechanica postulatur horum solutio , in geometria docetur solutorum usus. Ac gloriatur geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur geometria in praxi mechanica , & nihil aliud est quàm mechanicæ universalis pars illa , quæ artem mensurandi ac-

curatè proponit ac demonstrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè versentur, fit ut geometria ad magnitudinem, mechanica ad motum vulgo referatur. Quo sensu mechanica rationalis erit scientia motuum, qui ex viribus quibuscunque resultant, & virium quæ ad motus quoscunque requiruntur, accuratè propoſita ac demonstrata. Pars hæc mechanicæ à veteribus in potentiis quinque ad artes manuales spectantibus exculta fuit; qui gravitatem (cùm potentia manualis non fit) vix aliter quàm in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non artibus sed philosophiæ consulentes, deque potentiis non manualibus sed naturalibus scribes, ea maximè tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elasticam, resistentiam fluidorum & ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: hæc propter, hæc nostra tanquam philosophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut à phænomenis motuum investigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et hæc spectant propositiones generales, quas libro primo & secundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem systematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cælestibus, per propositiones in libris prioribus mathematicè demonstratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad solem & planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per propositiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ & maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particule per causas nondum cognitæ vel in se mutuò impelluntur & secundum figuras regulares coherant, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, philosophi hætenus naturam frustra tentarunt. Spero autem quod vel huic philosophandi modo, vel veriori alicui, principia hîc posita lucem aliquam præbeant.

In his edendis, vir acutissimus & in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius operam navavit, nec solum typothetarum sphalmata correxit & schemata incidi curavit, sed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederet. Quippe cùm demonstratam à  
me

me figuram orbium caelestium impetraverat, rogare non desistit; ut eandem cum Societate Regali communicarem, quæ deinde hortatibus & benignis suis auspiciis effecit, ut de eadem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At postquam motuum lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cœpissim, quæ ad leges & mensuras gravitatis & aliarum virium, & figuras à corporibus secundum datas quasunque leges attractis describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in mediis resistentibus, ad vires, densitates & motus mediorum, ad orbis cometarum & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer & unâ in publicum darem. Quæ ad motus lunares spectant (imperfecta cum sint) in corollariis propositionis LXVI. simul complexus sum, ne singula methodo proluxiore quàm pro rei dignitate proponere, & sigillatim demonstrare tenerer, & feriem reliquarum propositionum interrumpere. Nonnulla serò inventa locis minùs idoneis inferere malui, quàm numerum propositionum & citationes mutare. Ut omnia candidè legantur & defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendantur, quàm novis lectorum conatibus inuestigentur, & benignè suppleantur, enixe rogo.

Dabam Cantabrigiæ, & Collegio  
S. Trinitatis, Maii 2. 1686.

IS. NEWTON.

\*\* 3

AUG.

# AUCTORIS PRÆFATIO

I N

## EDITIONEM SECUNDAM.

**I**N hæc secundâ Principiorum editione multa sparsim emendantur, & nonnulla adjiciuntur. In libri primi sectione II. inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi possint, facilius redditur & amplior. In libri secundi sectione VII. theoria resistentiæ fluidorum accuratius investigatur, & novis experimentis confirmatur. In libro tertio theoria lunæ & præcessio æquinoctiorum ex principiis suis plenius deducuntur, & theoria cometarum pluribus & accuratius computatis orbium exemplis confirmatur.

Dabam Londini,  
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDI.

# EDITORIS PRÆFATIO

I N

## EDITIONEM SECUNDAM.

**N**EWTONIANÆ philosophiæ novam tibi, lector benevole, diuque desideratam editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potissimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipsa te ferè docebit auctoris præfatio. Reliquum est, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philosophiæ.

Qui physicam tractandam susceperunt, ad tres ferè classes revocari possunt. Extiterunt enim, qui singulis rerum speciebus qualitates específicas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ scholasticæ, ab *Aristotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique singulos effectus ex corporum singularibus naturis oriri; at unde sint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; sermonem quendam philosophicum censendi sunt adinvenisse, philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentiae laudem consequi sperarunt rejectâ vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam universam homogeneam esse, omnem verò formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidem progressio instituitur à simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quàm quos ipsa tribuit natura. Verùm ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quasunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertosque situs & motus; quin & fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeent, omnipotente prædi-

ta.

ta subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglectâ rerum constitutione verâ: quæ sanè frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certissimas observationes investigari possit. Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab hypothesebus; etiamsi deinde secundum leges mechanicas accuratissimè procedant; fabulam quidem elegantem fortè & venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philosophiam scilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex simplicissimis quibus possunt principiis rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem principii loco assumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in physicam recipiunt, nisi ut quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analyticâ & syntheticâ. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam phænomenis per analysin deducunt, ex quibus deinde per synthesim reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est philosophandi ratio longè optima, quam præ cæteris meritò amplectendum censuit celeberrimus auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in quâ excellendâ atque adornandâ operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit exemplum, mundani nempe systematis explicationem è theoriâ gravitatis felicissimè deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel finxerunt alii: primus ille & solus ex apparentiis demonstrare potuit, & speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè assentiri potuisse, & certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipse judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti sumatur exordium à simplicissimis & proximis; dispiciamus paulisper qualis sit in terrestribus natura gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora cælestia, longissimè à sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare interram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia

ientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non est vera levitas, sed apparens solummodo; & oritur à præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora universa gravitent in terram, ita terra vicissim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem esse mutuam & utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguatür terræ totius moles in binas quascunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuò æqualia, cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent rectà moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omninò contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, gravitatis actionem esse mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter à centro terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, è quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitibus materiæ movendæ. Jam verò corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublata scilicet aëris resistentiâ: accuratiùs autem comprobatur per experimenta pendulorum.\*

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantis, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in terram & terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis quâ corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in terram. Hoc autem pondus erit ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis quâ corpus unumquodque terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem auctâ vel diminutâ mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari censenda erit; atque adeò corpora omnia terrestria se mutuò trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ tra-

\* \* \*

hens



hentis. Hæc est natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis sit in cœlis.

Corpus omne perseverare in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare; naturæ lex est ab omnibus recepta philosophis. Inde verò sequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeò de lineis rectis orbitas suas tangentibus jugiter abeunt, vi aliquâ perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolvantibus necessario aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indefinenter à tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum est, quod mathematicis rationibus colligitur & certissimè demonstratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ, quæque radio ducto ad punctum vel quiescens vel utcumque motum describunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri à viribus quæ ad idem punctum tendent. Cum igitur in confesso sit apud astronomos, planetas primarios circum solem, secundarios verò circum suos primarios, areas describere temporibus proportionales; consequens est ut vis illa, quâ perpetuò detorquentur à tangentibus rectilineis & in orbitis curvilineis revolvantur coguntur, versus corpora dirigatur quæ sita sunt in orbitarum centrīs. Hæc itaque vis non ineptè vocari potest, respectu quidem corporis revolvantis, centripeta; respectu autem corporis centralis, attractiva; à quâcunque demùm causâ oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda sunt, & mathematicè demonstrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum à centro communi; vires centripetas revolvantium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Vel, si corpora revolvantur in orbitis quæ sunt circulis finitimæ, & quiescant orbitarum apsidēs; vires centripetas revolvantium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Obtinere casum alterutrum in planetis universis consentiunt astronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium sunt reciprocè ut quadrata distantiarum ab orbium centrīs. Si quis objiciat planetarum, & lunæ præsertim, apsidēs non penitus quiescere; sed motu quodam lento ferri in consequentia: responderi potest,

potest, etiam si concedamus hunc motum tardissimum exinde profectum esse quod vis centripetæ proportio aberret aliquantum à duplicata; aberrationem illam per computum mathematicum inveniri posse & planè insensibilem esse. Ipsa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam superabit; ad hanc vero sexaginta ferè vicibus propius accedet quàm ad triplicatam. Sed varior erit responsio, si dicamus hanc apsidum progressionem, non ex aberratione à duplicatâ proportionem, sed ex aliâ prorsus diversâ causâ oriri, quemadmodum egregiè commonstratur in hac philosophia. Restat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt versùs solem & secundarii versùs primarios suos, sint accuratè ut quadrata distantiarum reciprocè.

Ex iis quæ hætenus dicta sunt, constat planetas in orbitis suis retineri per vim aliquam in ipsos perpetuò agentem: constat vim illam dirigi semper versùs orbitalium centra: constat hujus efficaciam augeri in accessu ad centrum, diminui in recessu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportionem quâ diminuitur quadratum distantiae, diminui in eadem proportionem quâ distantiae quadratum augetur. Videamus jam, comparatione institutâ inter planetarum vires centripetas & vim gravitatis, annon ejusdem fortè sint generis. Ejusdem verò generis erunt, si deprehendantur hinc & inde leges eadem, eademque affectiones. Primò itaque lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ à corporibus è quiete demissis, dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi à viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus: hoc utique consequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbitâ suâ revolventis, ad vim gravitatis in superficie terræ, ut spatium quod tempore quàm minimo describeret luna descendendo per vim centripetam versùs terram, si circulari omni motu privari fingeretur ad spatium quod eodem tempore quàm minimo describit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcus à luna per idem tempus descripti sinui verso, quippe qui lunæ translationem de tangente, factam à vi centripeta, metitur; atque adeò computari potest ex datis tum lunæ tempore periodico, tum distantia ejus à centro terræ, Spatium poste-

rius invenitur per experimenta pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim gravitatis in superficie terræ, erit ut quadratum semidiametri terræ ad orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superius ostenduntur, vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim lunæ centripetam propè terræ superficiem. Vis itaque centripeta propè terræ superficiem æqualis est vi gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem; si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplò celerius in terram caderent quàm ex vi solâ gravitatis. Constat igitur vim illam centripetam, quâ luna perpetuò de tangente vel trahitur vel impellitur & in orbita retinetur, ipsam esse vim gravitatis terrestris ad lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese virtus extendat, cum nullam ejus sensibilem imminutionem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin & actione mutua, terra vicissim in lunam æqualiter gravitat: id quod abundè quidem confirmatur in hac philosophiâ, ubi agitur de maris æstu & æquinoctiorum præcessionem, ab actione tum lunæ tum solis in terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, quâ nimirum lege vis gravitatis decreseat in majoribus à tellure distantis. Nam cum gravitas non diversa sit à vi centripeta lunari, hæc verò sit reciproce proportionalis quadrato distantie; diminuetur & gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa solem & secundariorum circa jovem & saturnum sunt phænomena generis ejusdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porrò demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versus centrum solis, secundariorum versus centra jovis & saturni, quemadmodum lunæ vis centripeta versus terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciproce ut quadrata distantiarum à centris, quemadmodum vis lunæ est ut quadratum distantie à terra: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut luna gravitat in terram, & terra vicissim in lunam; sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos, & primarii vicissim in secundarios; sic & omnes primarii in solem, & sol vicissim in primarios,

Ugi:

Igitur sol in planetas universos gravitat & universi in solem. Nam secundarii dum primarios suos comitantur, revolvuntur interea circum solem unà cum primariis. Eodem itaque argumento, utriusque generis planetæ gravitant in solem, & sol in ipsos. Secundarios verò planetas in solem gravitare abundè insuper constat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratissimam theoriam, admirandâ sagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expositam habemus.

Solis virtutem attractivam quoque versum propagari ad ingentes usque distantias, & sese diffundere ad singulas circumjecti spatii partes, apertissimè colligi potest ex motu cometarum; qui ab immensis intervallis profecti feruntur in viciniam solis, & nonnunquam adeò ad ipsum proximè accedunt, ut globum ejus, in periheliis suis versantes, tantum non contingere videantur. Horum theoriam ab astronomis antehac frustra quæsitam, nostro tandem sæculo faciliter inventam & per observationes certissimè demonstratam, præstantissimo nostro auctori debemus. Patet igitur cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce verò phænomenis manifestum est & mathematicè comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis suis, respicere solem & esse reciprocè ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque cometæ in solem: atque adeò solis vis attractiva non tantum ad corpora planetarum in datis distantis & in eodem ferè plano collocata, sed etiam ad cometas in diversissimis cœlorum regionibus & in diversissimis distantis positos pertingit. Hæc igitur est natura cœporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò sequitur, planetas & cometas universos se mutuò trahere, & in se mutuò graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis & saturni, astronomis non incognitâ, & ab actionibus horum planetarum in se invicem oriundâ; quin & ex motu illo lentissimo apsidum, qui supra memoratus est, quique à causâ consimili proficiscitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum sit, & terram & solem & corpora omnia cœlestia, quæ solem comitantur, se mutuò attrahere. Singulorum ergo particula, quæque minimæ, vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum in

prà de terrestribus ostensum est. In diversis autem distantiiis; erunt & harum vires in duplicata ratione distantiarum reciprocè: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematicè demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod à nullis non recipitur philosophis; effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eadem sunt, easdem esse causas & easdem esse proprietates quæ nondum cognoscuntur. Quis enim dubitat, si gravitas sit causa descensûs lapidis in *Europa*, quin eadem sit causa descensûs in *America*? Si gravitas mutua fuerit inter lapidem & terram in *Europa*, quis negabit mutuam esse in *America*? Si vis attractiva lapidis & terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium, quis negabit similem esse compositionem in *America*? Si attractio terræ ad omnia corporum genera & ad omnes distantias propagetur in *Europa*, quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac regula fundatur omnis philosophia: quippe quâ sublatâ nihil affirmare possimus de universis. Constitutio rerum singularum innotescit per observationes & experimenta: inde verò non nisi per hanc regulam de rerum universarum naturâ judicamus.

Jam cum gravia sint omnia corpora, quæ apud terram vel in cœlis reperiuntur, de quibus experimenta vel observationes institui licet; omnino dicendum erit, gravitatem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint extensa, mobilia & impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint gravia. Corporum extensio, mobilitas, & impenetrabilitas non nisi per experimenta, innotescunt; eodem planè modo gravitas innotescit. Corpora omnia de quibus observationes habemus, extensa sunt & mobilia & impenetrabilia: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, extensa esse & mobilia & impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt gravia, de quibus observationes habemus: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, gravia esse. Si quis dicat corpora stellarum inerrantium non esse gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum est observata; eodem argumento dicere licebit neque extensa esse, nec mobilia, nec impenetrabilia.

pēnetrabilia ; cū hæ fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est verbis ? inter primarias qualitates corporum univerſorum vel gravitas habebit locum ; vel extenſio ; mobilitas , & impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel rectè explicabitur per corporum gravitatem , vel non rectè explicabitur per corporum extenſionem , mobilitatem , & impenetrabilitatem.

Audire nonnullos hanc improbare concluſionem , & de occultis qualitatibus nescio quid muſſitare. Gravitatem ſcilicet occultam eſſe quid , perpetuò arguari ſolent ; occultas verò cauſas procul eſſe ablegandas à philoſophiâ. His autem facilè reſpondetur ; occultas eſſe cauſas , non illas quidem quarum exiſtentia per obſervationes clariſſimè demonſtratur , ſed has ſolū quarum occulta eſt & ficta exiſtentia , nondum verò comprobata. Gravitatio ergo non erit occulta cauſa motuum cœleſtium ; ſiquidem ex phænomenis oſtenſum eſt , hanc virtutem reverà exiſtere. Hi potius ad occultas confugiunt cauſas , qui nescio quos vortices , materiæ cujuſdam prorsus fictitiæ & ſenſibus omnino ignotæ , motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitas occulta cauſa dicetur , eoque nomine rejicietur è philoſophiâ , quod cauſa ipſius gravitatis occulta eſt & nondum inventa ? Qui ſic ſtatuunt , videant nequid ſtatuant abſurdi , unde totius tandem philoſophiæ fundamenta convellantur. Etenim cauſæ continuo nexu procedere ſolent à compositis ad ſimpliciora : ubi ad cauſam ſimpliciſſimam perveneris , jam non licebit ulterius progredi. Cauſæ igitur ſimpliciſſimæ nulla dari poteſt mechanica explicatio : ſi daretur enim , cauſa nondum eſſet ſimpliciſſima. Has tu proinde cauſas ſimpliciſſimas appellabis occultas , & exulare jubebis ? Simul verò exulabunt & ab his proxime pendentes & quæ ab illis porro pendent , uſque dum à cauſis omnibus vacua fuerit & probè purgata philoſophia.

Sunt qui gravitatem præter naturam eſſe dicunt , & miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam eſſe volunt , cū in phyſicâ præternaturales cauſæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni diluendæ , quæ & ipſa philoſophiam ſubruit univerſam , vix operæ pretium eſt immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam eſſe negabunt : quod tamen dici non poteſt : vel

eo nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque ideò ex causis mechanicis originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis sit deinde futura philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota physica cœlestis vel ideò minùs placet, quòd cum *Cartesii* dogmatibus pugnare & vix conciliari posse videatur. His suà licebit opinione frui; ex æquò autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. *NEWTONIANAM* itaque philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & causas sequi per phænomena comprobatas, potiùs quàm fictas & nondum comprobatas. Ad veram philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis verè existentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit summus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut à pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua verè atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in philosophiâ verâ. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenso pondere vel ab intus concluso elatere oriri potest. Quod si oblatum horologium reverà sit instructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, & ex hypothesi sic præproperè confictâ motum indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitiùs perscrutari, ut ita motus propositi principium verum exploratum habere posset. Idem vel non absimile feretur iudicium de philosophis illis, qui materiâ quâdam subtilissimâ cœlos esse repletos, hanc autem in vortices indefinenter agi voluerunt. Nam à phænomenis vel accuratissimè satisfacere possent ex hypothesibus suis; veram tamen philosophiam tradidisse, & veras causas motuum cælestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has reverà existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum attractionem habere verum locum in rerum naturâ; quinetiam ostensum fuerit, quâ ratione motus omnes cælestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio,

objectio, si quis dixerit eosdem motus per vortices explicari debere, etiamsi id fieri posse vel maximè concefferimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore nostro abundè quidem & clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plùs æquò indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porrò commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum & cometarum circa solem deferantur è vorticibus, oportet corpora delata & vorticum partes proximè ambientes eadem velocitate eademque cursûs determinatione moveri, & eandem habere densitatem vel eandem vim inertiae pro mole materiæ. Constat verò planetas & cometas, dùm versantur in iisdem regionibus cœlorum, velocitatibus variis variæque cursûs determinatione moveri. Necessariò itaque sequitur, ut fluidi cœlestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias à sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione & velocitate, ut transire possint planetæ; aliâ, ut transire possint cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, ~~universa~~ corpora cœlestia non deferri à materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed à pluribus qui ab invicem diversi sint, idemque spatium soli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem spatio contineri, & sese mutuò penetrare motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summè regulares, & peraguntur in sectionibus conicis nunc valdè eccentricis, nunc ad circulorum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri possit, ut iidem integri conserventur, nec ab actionibus materiæ occurrentis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sanè si motus hi fictitii sunt magis compositi & difficiliùs explicantur, quàm veri illi motus planetarum & cometarum; frustrà mihi videntur in philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectu suo simplicior. Concessa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes & cometas circumcingi atmosphæris, ad instar telluris nostræ; quæ quidem hypothesis rationi magis consentanea

\*\*\*\*

y ide.



videbitur quum hypothesis vorticum. Affirmaverit deinde has atmosphæras, ex naturâ suâ, circa solem moveri & sectiones conicas describere; qui sanè motus multò faciliùs concipi potest, quàm con- similis motus vorticum se invicem permeantium. Denique planetas ipsos & cometas circa solem deferri ab atmosphæris suis credendum esse statuat, & ob repertas motuum cœlestium causas triumphum agat. Quisquis autem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non est ovo similis, quàm hypothesis atmosphærarum hypothesis vorticum.

Docuit *Galileus*, lapidis projecti & in parabolâ moti deflectionem à cursu rectilineo oriri à gravitate lapidis in terram, ab occulta scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acutioris philosophus, causam aliam comminiscatur. Finget igitur illè materiam quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullò sensu percipitur, versari in regionibus quæ proximè contingunt telluris superficiem. Hanc autem materiam, in diversas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas parabolicas describere contendet. Deinde vero lapidis deflectionem pulchrè sic expedit, & vulgi plausum merebitur. Lapis, inquit, in fluido illò subtili natat, & cursui ejus obsequendo, non potest non eandem unâ semitam describere. Fluidum verò movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabolâ moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce philosophi ingenium, ex causis mechanicis, materiâ scilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducens? Quis verò non subsannabit bonum illum *Galileum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, è philosophia feliciter exclusas, denuò revocare sustinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summè regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant. Moventur in orbibus conicis, hi orbis sunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cœlorum partes, & planetarum regiones liberrimè pertranseunt, & sæpè contra signorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certissimè confirmantur ex observationibus astronomicis: & per vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus planetarum consistere possunt. Co-  
metarum.

metarum motibus omninò locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus è cœlis amoveatur.

Si enim planetæ circum solem à vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque planetam, ejusdem densitatis erunt ac planeta; uti suprà dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus densitatem: quæ verò jacet intrà orbem magnum atque orbem saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minùs densæ centrum occupare, magis densæ longiùs à centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica sint in ratione sesquuplicata distantiarum à sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde verò sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minùs densæ fuerint, necesse est ut cedant vi majori, quâ partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendant minus densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non absimili omninò dicendum est, densiores vorticis partes majore vi centrifugâ petere supremum locum. Tota igitur illa & multò maxima pars vorticis, quæ jacet extrà telluris orbem, densitatem habebit atque adeò vim inertię pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm densitas & vis inertię telluris: inde verò cometis trajectis orietur ingens resistantia, & valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus sistere atque absorbere posse meritò videatur. Constat autem ex motu cometarum prorsus regulari, nullam ipsos resistantiam pati quæ vel minimùm sentiri potest; atque adeò neutiquam in materiam ullam incurfare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertię. Nam resistantia mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sanè vix observari potest in fluidis vulgò notis, nisi valdè

tenacia fuerint ad instar olei & mellis. Resistentia quæ sentitur in aëre, aqua, hydrargyro, & hujusmodi fluidis non tenacibus, ferè tota est prioris generis, & minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente fluidi densitate vel vi inertiae, cui semper proportionalis est hæc resistentia; quemadmodum clarissimè demonstratum est ab auctore nostro in peregregiâ resistentiarum theoriâ, quæ paulò nunc accuratiùs exponitur, hac secundâ vice, & per experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus verò communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi à fluido ad partes corporis posticas recurrente restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in fluidum ad partes anticas; hoc est, nisi velocitas relativa quâ fluidum irruit in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in fluidum, id est, nisi velocitas absoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quàm velocitas absoluta fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest fluidorum resistentia, quæ oritur ab eorundem densitate & vi inertiae. Itaque concludendum erit, fluidi cœlestis nullam esse vim inertiae, cum nulla sit vis resistendi: nullam esse vim quâ motus communicetur, cum nulla sit vis inertiae: nullam esse vim quâ mutatio quælibet vel corporibus singulis, vel pluribus inducatur, cum nulla sit vis quâ motus communicetur; nullam esse omninò efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quælibet inducendi. Quidni ergo hanc hypothesin, quæ fundamento planè destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimùm quidem inservit, ineptissimam vocare liceat & philosopho prorsus indignam. Qui coelos materiâ fluidâ repletos esse volunt, hanc verò non inertem esse statuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum hujusmodi materia fluida ratione nullâ secerni possit ab inani spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod si aliqui sint adeò usque dediti materiæ, ut spatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum

dum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate Dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium præsens haberi posset ab æthere subtilissimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex cometarum phænomenis, nullam esse hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam esse, sed ex necessitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant fato universa regi, non providentiâ; materiam ex necessitate suâ semper & ubique extitisse, infinitam esse & æternam. Quibus positis; erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam si necessariò moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinata aliqua velocitate, pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate; in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet igitur immotam esse. Neutiquam profectò potuit oriri mundus, pulcherrimâ formarum & motuum varietate distinctus, nisi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa sanè sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui veræ physicæ principia legesque rerum, sola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet vel statuere mundum ex necessitate fuisse, legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem Dei constitutus sit ordo naturæ, se tamen, homuncionem misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera Philosophia fundatur in phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissimè cernuntur consilium optimum & dominium summum sapientissimi & potentissimi entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minus grata sunt fu-

tura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ displicent : verum nomina malitiosè indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda ; nisi illud fateri tandem velint, utique debere philosophiam in atheismo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos iudices præstantissima philosophandi ratio, quæ fundatur in experimentis & observationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illustrissimi nostri auctoris ; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis ad quæ nec spes erat humanam mentem asurgere potuisse, meritò admirantur & suspiciunt quicumque paulò profundius in hisce rebus versati sunt. Claustris ergò referatis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit & penitiùs perspectandam dedit, ut nec ipse, si nunc revisisceret, rex *Alphonfus* vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Itaque naturæ majestatem propius jam licet intueri, & dulcissima contemplatione frui, conditorem verò ac dominum universorum impensius colere & venerari, qui fructus est philosophiæ multò uberimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis & sapientissimis rerum structuris non statim videat fabricatoris omnipotentis infinitam sapientiam & bonitatem : insanum, qui profiteri nolit.

Exabit igitur eximium *NEWTONI* opus adversus atheorum impetus munitissimum præsidium : neque enim alicundè felicius, quam ex hac pharetra, contra impiam catervam tela deprompseris. Hoc sensit pridem, & in pereruditis concionibus anglicè latinèque editis, primus egregiè demonstravit vir in omni literarum genere præclarus, idemque bonarum artium fautor eximius *RICHARDUS BENTLEIUS*, seculi sui & Academiae nostræ magnum ornamentum, Collegii nostri *S. Trinitatis* magister dignissimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri debeo : huic & tuas quæ debentur gratias, lector benevole, non denegabis. Is enim, cum à longo tempore celeberrimi auctoris amicitia intimâ frueretur, ( qua etiam apud posteros censeretur non minoris æstimat, quam propriis scriptis, quæ literato orbi in deliciis sunt, inclarescere ) ami-

# P R Æ F A T I O

XXXI

et simul famæ & scientiarum incremento consuluit. Itaque cum exemplaria prioris editionis rarissima admodum & immani pretio coëmenda superessent; suavit ille crebris efflagitationibus, & tantum non objurgando perpulit denique virum præstantissimum, nec modestiâ minùs quàm eruditione summâ insignem, ut novam hanc operis editionem, per omnia elimatam denuò & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur: mihi verò, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam posset emendatè id fieri curarem.

*Cantabrigiæ,*  
M<sup>aii</sup> 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* socius,  
astronomiæ & philosophiæ experimentalis  
professor. *Plumianus.*

A<sup>U</sup> C.

# AUCTORIS PRÆFATIO

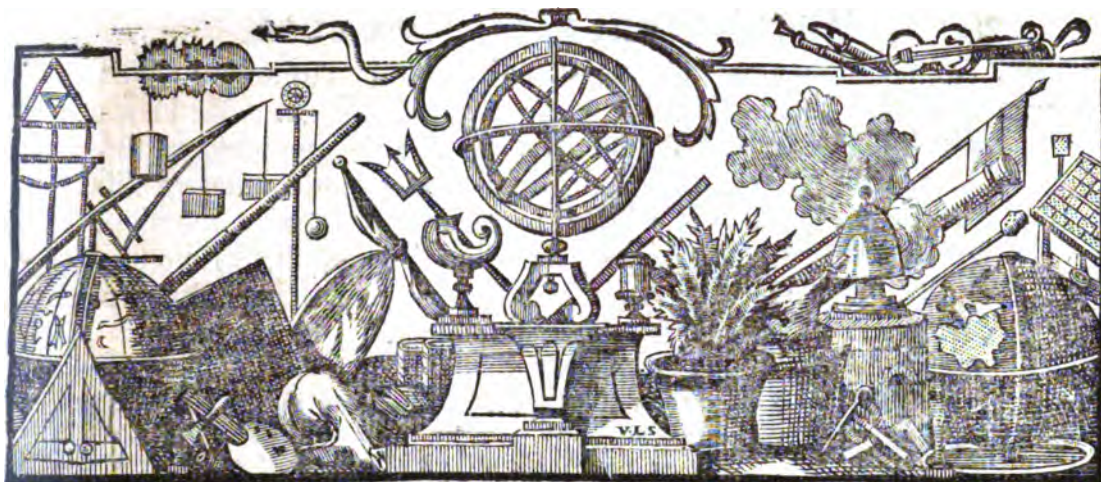
## I N

### EDITIONEM TERTIAM.

**I**N editione hacce tertiâ, quam Henricus Pemberton M. D. vir harum rerum peritissimus curavit, nonnulla in libro secundo de resistentia mediorum paulò fusiùs explicantur quàm antea, & adduntur experimenta nova de resistentia gravium quæ cadunt in aëre. In libro tertio argumentum quo lunam in orbe suo per gravitatem retineri probatur, paulò fusiùs exponitur: & novæ adduntur observationes de proportionibus diametrorum Jovis ad invicem à D. Poundio factæ. Adduntur etiam observationes aliquot cometæ illius qui anno 1680. apparuit, à D. Kirk mense Novembri in Germania habitæ, quæ nuper ad manus nostras venerunt, & quarum ope constat quàm propè orbes parabolici motibus cometarum respondent. Et orbita cometæ illius, computante Halleio, paulò accuratiùs determinatur quàm antea, idque in ellipsi. Et ostenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cælorum signa, non minùs accuratè cursum peregrisse, quàm solent planetæ in orbitis ellipticis per astronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno 1723. apparuit, à D. Bradleio Astronomiæ apud Oxonienfes Professore computatus adjicitur.

IS. NEWTON.

Dabam Londini  
Jan. 12. 1725 - 6



# PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA. DEFINITIONES.

## DEFINITIO I. (a)

*Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate  
& Magnitudine conjunctim.*



Tom. I.

ER, densitate duplicata, in spatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compressionem vel liquefac-

A

tionem

*Licet prima definitiones NEWTONIANÆ vix aliquam postulare videantur explicatio-  
nem; in ipso tamen operis nostri limine, nonnulla levioris momenti præmittenda judicamus,  
quæ ad majora viam sternunt. Prima quæ in posterum sæpius recurrens Mechanicæ prin-  
cipia interferere non abs re erit, tum ut Lectorum labori parcamus, tum ut magis continua  
servetur nostrarum demonstrationum series.*

(a) 1. Materia est substantia trinā di- bilis, mobilis, divisibilis. Spatium pu-  
mentione prædita, solida seu impenetra- rum est illa immensa, penetrabilis, sui



## 2 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**DEFINITIONES.** tionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunque diversimodè condensantur. Medii interea, si quod fuerit; interstitia partium liberè pervadentis, hîc nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem sub nomine Corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque Pondus. Nam <sup>(b)</sup> Pondus proportionalem esse reperi per experimenta Pendulorum accuratissimè instituta, uti posthac docebitur.

D E.

ubique similis, immobilis extensio, in quâ corpora omnia liberrimè moveri intelligimus. In corpore dato materiæ quantitatem seu massam, à corporis magnitudine, aut volumine seu mole distingui oportet. Materiæ quantitas est aggregatum, seu summa omnium materiæ particularum quibus compositum est corpus. Volumen, seu Magnitudo, est tota trina dimensio sub exteriori corporis superficie contenta. Porro inter solidas seu impenetrabiles corporis particulas sive elementa, plura esse possunt disseminata foramina seu pori, vel omni materiâ vacui, vel quos aliena materia liberè pervadat; sic aer subtilior spongiæ poros permeat, & ad spongiæ materiam non pertinet. Si nulla sint inter solidas corporis partes admixta foramina, Massa & volumen non differunt; at si poris pertusum sit corpus, Massam volumen superat.

2. Densitas est ratio massæ corporis ad illius volumen; aded ut sub æqualibus voluminibus, densitates sint in ratione directâ massarum; & eadem seu æquali manente in diversis corporibus massa, densitates sint in ratione voluminum reciproca. Itaque si densitas dicatur  $D$ ; massa  $M$ , volumen  $V$ ; erit  $D = M : V$ ; seu densitas exponi potest per massam ad volumen applicatam, sive, quod idem est, densitas erit ut massa per volumen divisa. Si itaque  $D$  &  $M : V$ , per  $V$  multiplicentur, erit  $DV = M$ , seu massa aut quantitas materiæ est ut densitas in volumen ducta; Massa igitur exponi potest per factum ex densitate in volumen. Quare si  $DV$  &  $M$ , per  $D$  dividantur, erit  $V = M : D$ , seu volumen est ut massa ad densitatem applicata, sive vo-

lumen est in ratione compositâ ex directâ ratione massæ & inversâ densitatis. Si densitates fuerint æquales, seu si  $m : v = M : V$ , patet massas esse inter se ut volumina directè. His positis, facillè intelligitur massam aeris, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fieri quadruplam, nam ob duplicatam densitatem in eodem spatio dupla est massa; ergo duplicato etiam spatio massa rursus duplicatur & fit quadrupla.

<sup>(b)</sup> 3. Massam esse pondus proportionalem, ob frequentissimum hujusce veritatis usum, hîc breviter ostendimus. Gravia omnia, ut notissimis constat experimentis, per lineas ad terræ superficiem perpendiculares ac proinde ad sensum parallelas descendunt, & in tubis aëre vacuis plumbum levissimaque pluma eadem celeritate cadunt, seu æqualia spacia, æqualibus temporibus cadendo percurrunt. Nec successu caret experimentum, etiam si coarctatis ac diductis poris vel superficiebus, corporis figura mutetur; dummodò eadem remaneat massa, idem semper servatur pondus; ex quo sequitur gravitatem non solum exterioribus corporis partibus, sed & interioribus æque inesse; alioquin ejusdem corporis sub diversis superficiebus, idem non remaneret pondus, nec eadem foret sub diversis figuris celeritas; mutatâ enim superficie, partes quæ antè interiores erant, exteriores fiunt & viceversa; æqualia igitur massæ elementa æquali urgentur vi gravitatis, seu æqualis sunt ponderis; crescit ergo totius massæ pondus ut elementorum æqualium numerus, seu crescit pondus ut massa, sive massa est pondus proportionalis.

DEFINITIO II. (°)

*Quantitas Motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiae conjunctim.*

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; ideo-  
A 2 que

(°) 4. Locus corporis est pars spatii, quam corpus occupat. Motus est continua loci mutatio. Tria in motu consideranda sunt, corpus quod movetur seu mobile, spatium quod percurritur, & tempus quo percurritur. Spatium percursum est linea quam mobile instar puncti consideratum describere intelligitur. Directio motus est linea recta quam mobile describit aut describere nititur. Motus conspirantes sunt quorum directiones congruunt, aut saltem sunt parallelæ & ad easdem partes tendunt. Motus contrarii seu directè oppositi dicuntur quorum directiones congruunt quidem, aut saltem sunt parallelæ, sed in oppositas partes vergunt. Motus æqualis seu uniformis est, quo mobile æqualia spatia æqualibus temporibus percurrit. Motus acceleratus, quo mobile maiora continuò spatia æqualibus temporibus describit. Motus retardatus quo mobile per minora continuò spatia æqualibus temporibus fertur.

5. Celeritas seu velocitas, est ea corporis moti affectio quæ aptum redditur, datum spatium dato tempore æqualiter percurrendi. Est igitur celeritatis mensura in motu æquali querenda, seu, ut habeatur quantitas velocitati proportionalis, querendum est spatium quod corpus dato tempore percurreret, si illius motus constans atque æqualis permaneret. Porro manifestum est celeritatem esse duplam, triplam, si temporibus æqualibus duplum, vel triplum percurratur spatium; & contra celeritatem esse subduplam, subtripulam, si æqualia spatia, duplo, triplo tempore percurrantur; ergò manentibus temporibus, celeritates sunt ut spatia; & manentibus spatiis, celeritates sunt inversè ut tempora; quare variantibus temporibus atque spatiis, celeritates semper sunt in ratione composita ex directâ spa-

tiorum & reciproca temporum; seu si celeritas dicatur  $C$ , spatium  $S$ , tempus  $T$ ; erit  $C$  ut  $S : T$ , sive  $C = S : T$ , seu celeritas exponi potest per spatium ad tempus applicatum, & multiplicando utrinque per  $T$ , erit  $CT = S$ , seu spatium est ut celeritas in tempus ducta, & dividendo utrinque per  $C$ , erit  $T = S : C$ , seu tempus est ut spatium ad celeritatem applicatum. Si duorum mobilium celeritates  $C, c$ , seu  $S : T ; s : t$ , fuerint æquales, id est  $S : T = s : t$ , erit  $S : s = T : t$ , seu spatia sunt ut tempora.

6. Jam verò cum in motu nihil nisi corpus, spatium percursum & tempus considerentur, & ratio spatii ad tempus celeritatem exponat (5), satis evidens est ad totum corporis motum seu quantitatem motus inveniendam, solius massæ & celeritatis habendam esse rationem. Cum autem motus totius corporis sit æqualis summæ motuum singularum Massæ partium, seu elementorum, patet manente celeritate, motum totius massæ crescere prout crescit numerus elementorum massæ æqualium, seu quantitatem motus esse proportionalem massæ; manente verò massâ, quantitas motus est ut velocitas; nam si corpus idem duplum spatium eodem tempore percurrit, duplus est illius motus, si triplum, triplus &c. Siquidem manentibus tempore & massâ, nulla est alia quam spatiorum varietas, & motus sunt ut spatia; sed spatia temporibus æqualibus percurra sunt ut celeritates (5), ergo quantitates motus sunt etiam ut celeritates. Quare variantibus massis atque celeritatibus, motus quantitas est semper ut massa in celeritatem ducta, seu in ratione compositâ massæ & celeritatis; si itaque motus quantitas dicatur  $Q$ ; Massa  $M$ , celeritas  $C$ ; erit  $Q$  ut  $M C$ , quod ita exponimus  $Q = M C$ , dividendo utrinque

DEFINITIONES. que in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus est, & duplâ cum velocitate quadruplus.

## DEFINITIO III. (d)

*Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ, fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis Inertiæ dici possit. Exercet verò corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estque exercitium illud sub diverso respectu & Resistentia & Impetus: resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficul-

que per  $M$ , & deinde per  $C$ , erit  $C = Q : M$ ; &  $M = Q : C$ ; Seu celeritas est ut quantitas motûs ad massam applicata, & massa vicissim, ut quantitas motûs per celeritatem divisa. Si quantitates motûs  $Q, q$ , seu  $MC, mc$ , fuerint æquales, erit  $MC = mc$ , &  $M : m = c : C$ , seu massæ sunt reciprocè ut celeritates; & viceversa si  $M : m = c : C$ , erit  $MC = mc$ , seu si massæ sunt in ratione velocitatum reciproca, quantitates motûs sunt æquales. Præterea cum, (5), sit  $C = S : T$ , erit etiam  $Q = MS : T$ , seu quantitates motûs sunt in ratione compositâ ex directis rationibus massæ & spatii & inversâ temporis; invenietur etiam  $QT = MS$ ,  $M = QT : S$ ;  $S = QT : M$ ,  $T = MS : Q$ .

Pari facilitate demonstrari possunt cætera theorematum quæ de motuum comparatione, apud scriptores mechanicos fuisse reperiuntur.

(4) 7. Vis duplex est, activa & passiva; Activa est potentia motum efficiendi;

Passiva est potentia motum recipiendi vel amittendi; vis activa subdividi solet in vim vivam quæ cum motu actuali conjuncta est, & in vim mortuam quæ est tantum conatus seu sollicitatio ad motum, & ex quâ motus actualis non producitur, nisi vis mortuæ actio aliquandiu in corpore continuata fuerit. Sic vis gravitatis in globo qui ex filo pendet vel plano horizontali incumbit, est vis mortua, quâ quidem actu non movetur globus, sed conatur moveri filumque tendit, aut planum premit. Si filum abruptatur, vel planum sustentans auferatur, tunc continuâ gravitatis actione globus motu accelerato cadit. Vis quâ corpus in circuli peripheriâ motum, filum centro alligatum tendit, & quâ proinde conatur à centro recedere est quoque vis mortua.

8. Inest omni materiæ vis insita passiva, seu inertia, ex quâ nullus motus, nullaque tendentia ad motum resultat, sed quæ consistit in renixu quo corpus quodlibet, cuilibet vi externæ mutationem

## PRINCIPIA MATHEMATICA.

5

faciliter cedendo, conatur statum obstaculi illius mutare. Vul-  
gus resistantiam quiescentibus & impetum moventibus tribuit :  
sed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo dis-  
tinguuntur ab invicem; neque semper verè quiescunt quæ vul-  
go tanquam quiescentia spectantur.

DEFINI-  
TIONES.

### DEFINITIO IV. (c)

*Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum  
vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*

Consistit hæc vis in actione sola, neque post actionem per-  
manet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni no-  
vo per solam vim inertię. Est autem vis impressa diversarum  
originum, ut ex Ictu, ex Pressione, ex vi Centripetâ.

### DEFINITIO V.

*Vis Centripeta est, quâ corpora versus punctum aliquod tanquam  
ad Centrum undique trahuntur, impelluntur,  
vel utcunque tendunt.*

Hujus generis est Gravitās, quâ corpora tendunt ad cen-  
trum

A 3

nem statûs, id est, motûs vel quietis in-  
ducere conanti resistit. Etenim nulla po-  
test esse actio corporis in corpus, quin  
luctatio quædam, ut loquitur Clar. *Her-  
manus* in *Phoronomia*, fiat inter corpus  
agens & patiens, dum alterum alteri re-  
sistit; alicuius corpus motum posset sine  
motûs proprii detrimento, aliud quod-  
cumque movere. Vis illa inertię eadem  
est in corporibus motis & quiescentibus;  
tam enim resistunt corpora actioni quâ à  
quiete ad motum concitantur, quàm ac-  
tioni quâ à motu ad quietem reducuntur.  
Eadem quippè vis requiritur ad motum  
datum producendum & ad eundem extin-  
guendum. Quia autem vis illa inertię ea-  
dem in omnibus æqualibus materiæ par-  
tibus reperitur, consequens est ut sit ma-  
terię proportionalis; dupla in massa dupli-  
cata, tripla in triplicata. Majoribus etiam

mutationibus corpora magis resistunt quam  
minoribus, estque resistantia actualis mag-  
nitudini mutationis proportionalis.

(c) 9. Nihil fit sine causâ; unde om-  
ne corpus ut potè iners & passivum (8)  
in suo quocumque statu perseverat, nisi  
causâ aliquâ, seu vi externâ, statum suum  
mutare cogatur; cum igitur vis aliqua  
in corpus actu agit; vis impressa seu ac-  
tio mutat quidem corporis statum, sed  
cessante illius vis actione corpus in  
novo statu per illam actionem recep-  
to perseverat solâ vi inertię passivâ, quâ  
fit ut sine novâ vi externâ statum suum  
mutare nullâ ratione possit; adeoque si  
semel movetur, sibi relictum, perpetuò  
atque æquabiliter per lineam rectam mo-  
vebitur, seu secundum directionem quâ  
impulsus fuerit & quâ movebatur, dum  
actio vis externę cessavit.



# PRINCIPIA MATHEMATICA.

7

Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ, vel major  
velocitas quâcum projicitur, eo minus deviabit a cursu rectili-  
neo & longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velo-  
citate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice  
vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad  
distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret:  
hic dupla cum velocitate quasi duplo longius pergeret, & de-  
cupla cum velocitate quasi decuplo longius: si modo aeris resis-  
tentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lu-  
bitu distantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ  
quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam gra-  
duum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram  
totam circuiret, vel denique ut in coelos abiret & motu abeundi  
pergeret in infinitum. Et eadem ratione, quâ Projectile vi gra-  
vitationis in orbem flecti posset & terram totam circuire, potest  
& Luna vel vi gravitationis, si modo gravis sit, vel aliâ quâcun-  
que vi, quâ in terram urgeatur, retrahi semper a cursu recti-  
lineo terram versus, & in orbem suum flecti: & sine tali vi

DEFINITIONES.

Luna

curvam retrahitur, eò minus a tangente  
deviat corpus, adeoque curva quam motu  
suo describit, ad tangentem seu rectam  
lineam propius accedit. Econtrâ decre-  
scente vi aut celeritate secundum direc-  
tionem tangentis, aut crescente vi alterâ  
quæ a tangente deflectit, corpus a mo-  
tu rectilineo magis retrahitur, & major  
fit lineæ curvatura. Nam effectus sunt cau-  
sis suis proportionales; est autem motus  
per tangentem rectilineus, effectus vis se-  
cundum directionem tangentis, & devia-  
tio a tangente, effectus vis illius quæ a  
tangente retrahit.

11. Sit terræ circumferentia  $DQC$ ,  
illiusque centrum  $T$ , ex quo vim ad  
centrum trahentem per totum circumqua-  
que spatium propagari fingamus, aut, si  
magis placuerit, supponamus esse vim per  
totum spatium diffusam, quâ corpora om-  
nia secundum directionem radiorum,  $ET$ ,  
 $AT$ , ad centrum  $T$  urgeantur, & ex  
vertice  $E$  montis  $ED$  projiciatur cor-  
pus juxta directionem rectæ  $EF$  ad

$ET$ , normalis; corpus illud hæc solâ vi  
impresâ æqualiter per rectam  $EF$   
moveretur (9); at vi centripetâ seu vi  
tendente ad centrum  $T$  ab illâ rectâ  
perpetuò retrahitur & cogitur incedere  
in curvâ aliquâ  $EQ$  quam tangit in  
 $E$  recta  $EF$  (10); augendo vim im-  
pressam secundum directionem tangentis,  
 $EF$ , curva  $EQ$ , ad tangentem  $EF$ ,  
propius accedit, adeò ut corpus variis &  
successivè crescentibus celeritatibus pro-  
jectum, terram tardiùs semper attingat;  
deindè circa eam revolvatur, tandemque  
in infinitum abeat. Ut igitur corpus per  
rectam  $EF$ , datâ velocitate projectum,  
curvam datam  $EQ$  describat, certa ac  
determinata vis centripeta requiritur; &  
viceversâ datâ velocitate secundum rec-  
tam  $Ee$  seu  $EF$ , & vi centripetâ etiam  
datâ, corpus nonnisi certam ac determi-  
natam curvam  $EQ$  potest describere;  
& mathematicorum est ex datis velocita-  
te per tangentem  $EF$  & curvâ  $EQ$   
quam corpus describit, invenire vim cen-  
tri-

## 8 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DEFINITIONES. Luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si justo minor esset, non satis flecteret Lunam de cursu rectilineo: si justo major, plus satis flecteret, ac de orbe suo terram versus deduceret. Requiritur quippe, ut sit justæ magnitudinis: & Mathematicorum est invenire Vim, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri possit; & vicissim invenire viam curvilineam, in quam corpus è dato quovis loco datâ cum velocitate egressum a datâ vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Absoluta, Acceleratrix, & Motrix.

### DEFINITIO VI. (8)

*Vis centripetæ Quantitas Absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro Efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.*

Ut vis Magnetica pro mole magnetis vel intensione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

### DEFI-

tripetam; quâ a tangente retrahitur & in orbitâ suâ retinetur, & reciprocè ex datâ velocitate per tangentem & vi centripetâ, curvam invenire; quæ duo NEWTONUS mirâ sagacitate & elegantia perfecit.

( 1 ) 12. In centro T existere supponatur corpus, ex quo per omne spatium diffundatur vis, quæ juxta directionem radiorum AT, ET, HT, versùs centrum, aut a centro versùs spatia circumposita, juxta directionem radiorum TA, TE, TH, agat; in 1.º casu vis illa centripeta, in 2.º vis centrifuga, in utroque vis centralis dicitur.

Hæc vis in centro considerata duplici præsertim ratione variare potest; Si enim corpus quod centrum occupat, & cui vis

inest, in sua æqualia elementa divisum intelligatur, & vis sit singulis elementis æqualis ejusdemque constanter intensio; vis totius corporis centralis, seu vis centralis quantitas absoluta, erit massæ seu summæ elementorum proportionalis. At si manente eadem corporis centralis massâ, vis semper manens æqualis in singulis elementis æqualibus intensivè crescat vel decrescat, vis tota corporis centralis seu vis centralis quantitas absoluta, erit proportionalis intensioni vis in singulis elementis existentis; quare variantibus massâ & vi singulorum elementorum, vis centralis quantitas absoluta erit in ratione compositâ massæ & intensiois vis in singulis elementis æqualibus.

*Vis centripetæ Quantitas Acceleratrix est ipsius mensura Velocitatis proportionalis, quam dato tempore generat.*

Uti Virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis Gravitas major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantis à globo terræ; in æqualibus autem distantis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata Aeris resistantia, æqualiter accelerat.

Tom. I.

B

DE-

(h) 13. Si vis centralis non amplius in centro, sed in quâcumque à centro distantia consideretur, possumus in variis illis à centro distantis superficies sphericas fingere, quarum commune centrum sit T, & vis centralis in illis distantis seu superficiebus sphericis considerata, dicitur vis acceleratrix. Illius autem quantitas erit proportionalis celeritati quam dato seu constante tempore in singulis materiæ elementis à centro æquidistantibus producit; nam si supponamus vim illam constantem in elementa materiæ continuò agere, eo major erit quo major erit velocitas dato tempore genita, ita ut si tempore æquali dupla generetur velocitas, dupla quoque sit vis, cum velocitas illa sit illius vis effectus plenus. Si constans maneat celeritas à vi acceleratrice genita, erit vis in ratione inversâ temporis quo celeritas illa producitur, nam si eadem celeritas tempore subduplo producat, vis duplicatur. Quare si manente vi constante, celeritas & tempus variant, erit vis acceleratrix in ratione compositâ ex directâ celeritatis genitæ & reciproca temporis. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; celeritas producta C; tempus quo producit, T, erit  $G = C : T$ , &  $G T = C$ , &  $T = C : G$ . Licet autem variet vis acceleratrix, eadem tamen est illius mensura, modò celeritas nascens seu initio motus tempore quàm minimo producta con-

sideretur, tunc enim vis agit uniformiter.

14. Si vis aliqua per radios divergentes in medio non resistente diffundatur, vis acceleratrix decrescit in ratione duplicatâ distantiarum à centro; nam quia vis illa, ex hyp., in medio non resistente propagatur, nullus intercipitur radius; nec vis singulorum minuitur, adeoque radii qui in distantia T L, per hemisphærium à semicirculo D L C descriptum diffundebantur, in distantia, T K per hemisphærium E K H propagantur; est autem vis acceleratrix ut radiorum densitas, & radiorum densitas est reciprocè ut superficies hemisphæriorum à semicirculis descriptorum; nam radiorum densitas est ut summa seu numerus radiorum per superficiem quam occupant divisi; hic enim summa radiorum est ut massa, superficies verò cui insunt, ut volumen. Verùm cum per hyp., idem numerus radiorum superficies singulorum hemisphæriorum occupet, erit densitas radiorum in ratione inversâ illarum superficialium in quavis à centro distantia descriptarum; illæ autem superficies sunt in ratione duplicatâ distantiarum à centro; ergò & vis acceleratrix est in ratione duplicatâ distantiarum à centro reciprocè. Egregium illud theoremata, ut ex demonstratione patet, omnem excludit medii resistantiam; quare ut in physicis valeat, medii resistantia in-

con-



*Vis centripeta Quantitas Motrix est ipsius mensura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.*

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc Quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, quâ descensus corporis impediri potest.

Hæc virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compositum; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad Centrum, tanquam causa ali-

qua

computum venire debet. Hæc autem virium seu qualitatum à centro emanantium theoria ad majorem universalitatem reduci potest, si vis in singulis radiis variè propagari supponatur, aut etiam si per lineas curvas diffundi singatur. Sed hæc fufius prosequi præsentis non est instituti.

(†) 15. Si vis centripeta in corpore ad centrum propulso consideretur; ut totus illius corporis in centrum conatus seu vis centripetæ quantitas motrix habeatur, ducenda est massa in vim acceleratricem; nam vis motrix totius corporis componitur ex omnibus viribus, quibus singula æqualia elementa urgentur, adeoque ex vi acceleratrice toties sumptâ quot sunt in corpore æqualia materiæ elementa, sive ex vi acceleratrice in massam ductâ. Supponimus enim singula elementa æqualia, æquali vi acceleratrice urgeri. Sed vis acceleratrix est ut celeritas dato tempo-

re genita, (13), ergo vis centripetæ quantitas motrix est ut massa in illam celeritatem ducta, seu ut quantitas motus, dato tempore producta. Si igitur vis acceleratrix dicatur,  $G$ ; massa,  $M$ , vis motrix,  $p$ , erit  $p$ , ut  $MG$ , &  $M$ , ut  $p:G$ , &  $G$ , ut  $p:M$ ; seu massa est ut vis motrix per vim acceleratricem divisa, & vis acceleratrix, ut vis motrix per massam divisa. Si duæ fuerint vires motrices  $P$  &  $p$ , seu  $MG$ , &  $mg$ , æquales, erit  $M:m = g:G$ , seu massæ sunt ut vires acceleratrices reciproce; & viceversa, si  $M:m = g:G$ , erit  $mg = MG$ , seu si massæ sunt reciproce ut vires acceleratrices, vires motrices sunt æquales. Porro cum vires acceleratrices sint ut celeritates dato tempore genitæ (13), in superioribus proportionibus loco virium acceleratricium celeritates illæ substitui possunt.

## PRINCIPIA MATHEMATICA. II

quā præditum, sine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causâ illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus. Nam virium causas & sedes Physicas jam non expendo. DEFINITIONES.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate & ex quantitate materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice & ex quantitate ejusdem materiæ conjunctim. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix sit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones & impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulsus, vel Propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter & pro se mutuò promiscuè usurpo; has vires non Physicè, sed Mathematicè tantum considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem Physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires verè & Physicè tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixerò.

### *Scholium.*

Haftenus voces minus notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notissima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hasce non aliter quam

## 12 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**DEFINITIONES.** ex relatione ad sensibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares distinguere.

(<sup>1</sup>) I. Tempus Absolutum, verum, & mathematicum, in se & naturâ suâ sine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare est sensibile & externa quævis Durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Mensis, Annus.

II. Spatium Absolutum, naturâ suâ sine relatione ad externum quodvis, semper manet simile & immobile: Relativum est spatii hujus mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ à sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & à vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aeris vel cœlestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine; sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, moveatur; spatium Aeris nostri, quod relativè & respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aer transit, nunc alia pars ejus; & sic absolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus est pars spatii quam corpus occupat, estque pro ratione spatii vel Absolutus vel Relativus. Pars, inquam, spatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; Superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt; Situs vero propriè loquendo quantitatem non habent,

ne-

(\*) 16. Quemadmodum Geometræ lineam fluxu puncti generari fingunt, ita tempus absolutum mathematicè considerare possumus, tanquam æquabilem unius instantis seu puncti temporis fluxum. Quapropter si corpus aliquod æquabili celeritate moveretur, illud eodem modo ac temporis punctum fluere, spatiaque ab eo descripta forent temporibus proportio-

nalia (5); eo igitur motu tanquam accuratâ durationis mensurâ uti possemus. Verum corporum cœlestium & horologiorum motus, quos ad temporis mensuram adhibemus, licet vulgò supponantur æquabiles, variis tamen ex causis accelerantur vel retardantur, sicque mensuræ illæ vulgares non sunt temporis absoluto proportionales.

## PRINCIPIA MATHEMATICA. 13

neque tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de suo loco eadem est cum summa translationum partium de locis suis; ideoque locus totius idem est cum summa locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus Absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis passis fertur, relativus corporis Locus est navigii regio illa in quâ corpus versatur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur unâ cum navi: & Quies relativa est permanſio corporis in eâdem illâ navis regione vel parte cavitatis. At quies vera est permanſio corporis in eâdem parte spatii illius immoti in quâ navis ipsa unâ cum cavitate suâ & contentis universis movetur. Unde si Terra verè quiescat, corpus quod relativè quiescit in navi, movebitur verè & absolutè eâ cum velocitate quâ navis movetur in Terrâ. Sin Terra etiam moveatur, oriètur verus & absolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terrâ: & si corpus etiam moveatur relativè in navi, oriètur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terrâ, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis oriètur corporis motus relativus in Terrâ. Ut si Terræ pars illa, ubi navis versatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem versus cum velocitatis parte unâ: movebitur Nauta verè & absolutè in spatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relativè in terrâ occidentem versus cum velocitatis partibus novem.

(<sup>1</sup>) Tempus Absolutum a relativo distinguitur in Astronomiâ

B 3

per

(<sup>1</sup>) 17. *Æquatio temporis dicitur differentia quæ inter tempus absolutum & tempus relativum, (h. e. tempus per solis revolutionem mensuratum) intercedit; quæ*

*proinde tempori relativo juncta, vel ab eo subducta conficit tempus absolutum & vice versâ.*

## 14 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**DEFINITIONES.** per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est, ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accuratè mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiae rerum; sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli: proinde hæc a mensuris suis sensibilibus meritò distinguitur, & ex iisdem colligitur per Æquationem Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii Oscillatorii, tum etiam per eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium Temporis est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam tempora & spatia sunt sui ipsorum & rerum omnium quasi Loca. In Tempore quoad ordinem successionis; in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum essentia est ut sint Loca: & loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta Loca; & solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus.

Verum quoniam hæc Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui; earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim & distantiiis rerum à corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa: deinde etiam & omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis utimur, nec incommodè in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.

Distinguuntur autem Quies & Motus absoluti & relativi ab invicem per Proprietates suas & Causas & Effectus. Quietis proprietas est, quod corpora verè quiescentia quiescunt inter se. Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus

## PRINCIPIA MATHEMATICA. 15

bus Fixarum, aut longè ultra, quiescat absolutè; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad longinquum illum datam positionem servet necne, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyrationum partes <sup>(m)</sup> omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motus igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem è viciniâ corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam verè quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem è viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & sublata illâ translatione non verè quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem internam, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, sine translatione de viciniâ corticis, seu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto Loco movetur una Locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. <sup>(n)</sup> Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum: & motus omnis integer componitur

ex.

(m) 18. Gyrationum corporum partes singulæ in orbitis curvilineis moventur, adeoque (10) per tangentes orbitarum progredi, atque ita ab axe motus recedere nituntur; ut si trochus vel sphaera circa axem rotatur, singulæ illorum corporum partes circulos describunt, & ab illorum centrâ per tangentes effugere conantur, cumque omnia illa centra sint in axe motus posita, singulæ partes ab axe recedere nituntur.

(n) 19. Si nauta in navi deambulare supponatur, motusque navis & nautæ conspirent, integra & absoluta nautæ celeritas componitur ex celeritate nautæ respectu loci sui primi in navi, ex celeritate loci illius, id est, navis respectu maris, seu respectu loci secundi, & ex celeritate maris respectu spatii immobili. Si autem motus nautæ, motui navis foret directè oppositus, absoluta nautæ velocitas æqua-

## 16 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**DEFINITIONES.** ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ supra memorato. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod Immobile appello.

Causæ, quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem, sunt Vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari & mutari potest sine viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimatur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in quâ hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus à viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eadem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in quâ motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, & conservari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

Effectus quibus motus absoluti & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. (°) Nam in motu circulari nudè relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem & absoluto majores vel minores pro quantitate motus.

Si

æqualis foret differentiæ celeritatum navis respectu spatii immoti, & nautæ respectu navis. Tandem si motus nautæ respectu navis foret obliquus, illius directio & velocitas in duas alias directiones & velocitates ita resolvi debent, ut una directio cum aliorum motuum communi directione conspiret, alia verò sit ipsi per-

pendicularis, tuncque, ex regulis infra demonstrandis, facillimè invenietur tum absoluta nautæ celeritas, tum illius vera directio.

(°) 20. In motu circulari nudè relativo, id est, in quiete absolutâ corporis inertis, quod motu duntaxat relativo movetur, vires activæ nullæ sunt.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 17

Si pendeat situla à filo prælongo, agaturque perpetuò in orbem, donec filum à contorsione admodum rigescat, dein impleatur aquâ, & unâ cum aquâ quiescat; tum vi aliquâ subitaneâ agatur motu contrario in orbem, & filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu; (P) superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis: at postquam vas, vi in aquam paulatim impressâ, effecit ut hæc quoque sensibilibiter revolvi incipiat; recedet ipsa paulatim à medio, ascendetque ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) & incitatore semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo, quiescat in eodem relativè. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Postea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circularem verum perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relativè. Quare conatus iste non pendet à translatione aquæ respectu corporum ambientium, & propterea motus cir-

Tom. I.

C

circularis

(P) 21. Cum aqua vi inertie (8) in eodem quiescendi statu perseverare nitatur, in eam nonnisi gradatim & per repetitam laterum situlæ frictionem motus circularis transire potest; adeoque sub initio motus situlæ, tota æquæ massa quiescit absolutè, sive quod idem est, maximâ velocitate nudè relativâ in vase revolvitur; undè destituta omni vi activâ (10) sicut antè motum situlæ, plana & quiescens manet. Sed cum iterato laterum vasis impulsu, motus circularis ad aquam transferitur, singulæ partes aquæ (18) ab axe

motus; seu à medio vasis conantur recedere, cumque minorem sursim in aëre resistantiam inveniant, ad latera situlæ accumulantur & ascendant, & quò celerius aguntur in orbem, eo majori conatu ab axe motus per tangentes recedere nituntur. (10. 11.) Porro cum inter vim centrifugam & celeritatem corporis in dato circulo revolvantis certa debeat esse ac determinata proportio, ex vi centrifugâ seu conatu recedendi ab axe, cognosci ac mensurari potest velocitas motus circularis absoluta, ut deinceps demonstrabitur.



## 18 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**DEFINITIONES.** circularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui respondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri sunt; & relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Systemate eorum qui Cœlos nostros infra Cœlos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas secum deferre; singulæ Cœlorum partes, & Planetæ qui relativè quidem in Cœlis suis proximis quiescunt, moventur verè. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quàm fit in verè quiescentibus) unaque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Quantitates relativæ non sunt igitur eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed sunt earum mensuræ illas sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum mensuratarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes, per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus propriè intelligendæ erunt hæ mensuræ sensibiles; & sermo erit insolens & purè Mathematicus, si quantitates mensuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hæc de quantitibus mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Mathesin & Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est: propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam argumenta desumi possunt, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentia, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum, innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 19

set. (9) Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex auctâ vel diminutâ fili tensione augmentum vel decrementum motus, & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt Stellæ Fixæ in regionibus Cœlorum (1), sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum, & deprehenderetur tensionem ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret, concludere liceret motum esse globorum, & corpora quiescere; & tum demum ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere, & contra ex motibus seu veris seu apparentibus eorum causas & effectus, docebitur fusius in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui.

DEFINITIONES.

C 2

AXIO-

(9) 12. Si in alternas, seu è diametro sibi oppositas globorum facies, ad motum circularem augendum vel minuendum, imprimerentur vires quælibet æquales, quæ proinde non perturbarent æquilibrium globorum circa commune gravitatis centrum, id est, circa punctum æquilibrîi revolventi, innotesceret ex auctâ vel diminutâ fili tensione augmentum vel decrementum motus &c.

(1) 23. Spectator in globo moto, vel etiam in stellâ fixâ positus, solo oculorum auxilio, seu ex motibus apparentibus discernere non posset, an globus, an stella verè moveretur; quemadmodum telluris incolæ ex apparenti stellarum motu determinare non possunt, an stellæ verè moveantur; sive enim cum terrâ moveamur, & stellæ quiescant absolute, sive è contrâ

moveantur stellæ & terra quiescat, eadem omnino sunt apparentiæ, iidem motus relativi; quod quidem notissimo illustratur exemplo navis æquabiliter motæ, cujus motus, ab iis qui navi vehuntur, oculis non percipitur, dum littora urbesque fugere videntur. Ex optices principiis horum phenomenon petenda est ratio; ea enim corpora quiescere videntur quæ, dum nos ipsi nullam actualem voluntatem nosmet movendi exercemus, eandem respectu oculi positionem constanter servant, ita ut eorum imago quæ in fundo oculi pingitur, eandem semper retinæ partem occupet; ea verò objecta moveri videntur quæ respectu oculi situm suum continuò mutant; seu quorum imagines diversas retinæ partes successivè occupant.

AXIOMATA,  
SIVE

## A X I O M A T A ,

S I V E

## L E G E S M O T U S .

## L E X I .

(<sup>1</sup>) *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

**P**rojectilia perseverant in motibus suis, nisi quatenus à resistantiâ aëris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt sese à motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quatenus ab aëre retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

## L E X .

(<sup>1</sup>) 24. Ex hac primâ lege quam (9) demonstravimus, sequitur omnem motum esse naturâ suâ æquabilem & rectilineum, adeoque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, nisi aliquod obstaculum mobili offeratur; Unde cum projectilia motum suum sensim amittant, querenda est aliqua hujusce retardationis causa. Cum autem corpora projecta vel per medium resistens deferantur, vel etiam super aliorum corporum superficies sca-

bras incedant, & vi gravitatis deorsum semper urgeantur, necesse est ut eam amittant motus sui partem quam in hisce obstaculis superandis continuò absumunt, ac proinde quo major vel minor erit medii resistantia, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet majora planetarum & cometarum corpora nullam sensibilem in spatiis coelestibus experiri resistantiam, eum motus suos diutissime conservare.

(<sup>c</sup>) *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam quâ vis illa imprimitur.*

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successivè impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur): si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

C 3

LEX

(<sup>c</sup>) 25. Si corpus vi activâ, qualis est vis gravitatis, secundum eandem aut parallelam directionem continuè urgeatur, motus illius continuè acceleratur; nam per leg. 1., manet celeritas acquisita, & per leg. 2. nova conspiranti continuè additur. Si verò aliqua vis in corpus jam motum contrariâ directione perpetuè agat, motus illius continuè retardatur, per leg. 2. Si vis conspirans continuè ac uniformiter agat, id est, si constans sit, corpus eâ vi impulsum, æqualibus temporibus æqualia accipit celeritatis incrementa, seu motu uniformiter accelerato fertur, & celeritates vi illâ acquisitæ, sunt ut tempora quibus generantur. At si vis constans contrariâ directione in corpus motum continuè agat; æqualibus temporibus æqualia fient celeritatis decrementa, & corpus motu uniformiter retardato movebitur. Generaliter tandem, si corpus quiescens quâlibet vi sive constanti sive variabili continuè urgeatur, & deinde eâ celeritate quam vis illius actione continuè acquisivit, contrâ directionem vis illius reagentis projiciatur, ut vestigia sua relegat, corpus illud in itu & reditu suo eandem habebit celeritatem, ubi ad eadem viæ suæ puncta, eundo & redeundo pervene-

rit; adeoque motum redeundo non amittet, nisi cum pervenerit ad punctum ex quo coepit eundo moveri; nam eadem vis in itu & reditu corporis, æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus generat & extinguit (8).

26. Corpora gravia in terræ viciniis, sublata mediæ resistentiâ motu uniformiter accelerato descendunt, & motu uniformiter retardato ascendunt. . . . Demonstratio . . . . Sublatâ mediæ resistentiâ idem est ejusdem corporis pondus, sive eadem illius in subjectum planum pressio, tum in vertice, tum in radice montis; est autem pondus, seu vis motrix (15) ut massa in vim gravitatis acceleratricem ducta: ergo cum ejusdem corporis massa eadem in vertice & in radice montis permaneat, manebit etiam eadem vis acceleratrix gravitatis. Insuper corpora gravia in radice & vertice montis æqualia spatia æqualibus temporibus percurrunt, sublata aëris resistentiâ, ut accuratissimis notum est experimentis (13): constans est igitur vis acceleratrix, & per lineas ad horizontem perpendiculares (3) uniformiter agit; gravia ergo motu uniformiter accelerato descendunt, & uniformiter retardato ascendunt (25) Q. E. D.

27. Subla-



(\*) LEX III.

AXIOMATA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

*Actiōni contrariam semper & æqualem esse reactionem : sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.*

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem : nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi suâ quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutatio-

31. Coroll. 4. . . . celeritas  $BD$ , motu uniformiter accelerato acquisita, est semper (5) ut duplum spatium percursum  $2SK$ , applicatum ad tempus  $TB$ , quo percurritur, seu ut  $2SK : TB$ . Quare si vis acceleratrix constans dicatur  $G$ ; spatium percursum  $S$ ; tempus quo percurritur  $T$ ; erit  $GT = 2S : T$  (13) adeoque  $GT^2 = 2S$ ; seu vis acceleratrix constans in quadratum temporis ducta, est ut duplum spatium eodem tempore vis illius actione descriptum.

(\*) 32. Hæc notissima naturæ Lex innumeris confirmata experimentis, ex ipsâ materiæ inertia clarè sequitur. Ut autem omnis tollatur ambiguitas, nihil aliud per hanc legem intellectum volumus, nisi æquales fieri in corpore agente & patiente statûs mutationes; cum enim nulla possit esse actio corporis in aliud corpus, quin mutua fiat horum corporum collisio (8), mutatio statûs æqualiter in utroque cor-

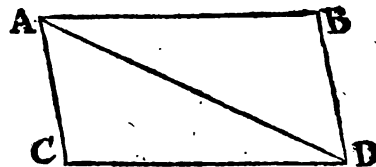
pore recipi debet; undè licet actioni æqualis semper sit & contraria reactio, non idcirco tamen inter corpus agens & patientis fieri debet æquilibrium, idque Newtoniano exemplo manifestum est; si equi lapidem trahentis conatus seu vis activa major sit vi quâ lapis per gravitatem suam, plani scabritiem, medique resistentiam, equo trahenti reluctatur, equus lapidem trahet cum eâ totius suæ vis parte, quæ post superatam lapidis gravitatem, plani scabritiem, medique resistentiam, ipsi residua est; si autem totus trahentis equi conatus hisce tribus resistentiis minor sit, vel si ipsis sit æqualis, equus lapidem non movebit. Quare totus ac integer lapidis renixus qui componitur ex ipsius gravitate, plani scabritie, resistentiâ medii & inertia quæ lapidi etiam omnibus aliis viribus destituto inest, actioni equi lapidem trahentis est semper æqualis.

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. tiones enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciprocè proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

## COROLLARIUM I.

*Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.*

Si corpus dato tempore, vi solâ M in loco A impressâ, ferretur uniformi cum motu ab A ad B; & vi solâ N in eodem loco impressâ, ferretur ab A ad C: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utrâque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab A ad D. Nam (<sup>b</sup>) quoniam vis N agit secundum lineam AC ipsi BD parallelam, hæc vis per Legem 11. nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD: à vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD, five vis N imprimatur, five non; (<sup>c</sup>) atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ BD. Eodem argu-



(<sup>b</sup>) 33. Quoniam vis N, agit secundum lineam AC, ipsi BD, parallelam, hæc vis, (per leg. 2) nihil nisi velocitatem secundum lineam ipsi BD, parallelam producet, ac proinde non mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD, à vi alterâ genitam; cum corpus iners duabus hisce viribus ac directionibus simul obsequi possit, & (per leg. 1.), debeat, atque hinc supponatur vires M, & N, in mobile eodem modo simul agere ac si singulæ seorsim in illud quiescens imprimerentur.

(<sup>c</sup>) 34. Idcirco cum in fine ejusdem temporis, corpus quod hæc tanquam punctum consideratur, simul esse debeat in utraque lineâ CD, & BD, in utriusque lineæ concursu E, reperiat necesse est; quia

autem initio & fine temporis dati corpus reperitur in rectâ AD, nempe primum in A, & deinde in D, toto tempore dato motum fuit per lineam AD, nam ex duobus punctis A, & D, datis, recta, AD, positione data est; & corpus quibuscumque viribus impulsus, cessante virium actione, movetur uniformiter in directum secundum ultimam directionem ex viribus impressis resultantem, (per Leg. 1, & 9).

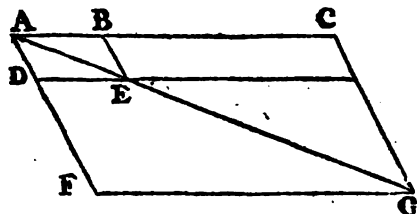
35. Motus compositus per diagonalem AD, motibus per latera AB, AC, distinctis non est æqualis, sed tantum æquipollet. Nam cum eadem sit corporis massa, motus quantitates per diagonalem & per latera sunt ut velocitates uniformes (<sup>e</sup>) seu ut spatia AD, AB, AC, eodem tempore percurra (<sup>f</sup>); est autem sum-

Summa laterum  $AB + AC$ , major diagonali  $AD$ ; ergo summa quantitatum motus per latera, major est quantitate motus per diagonalem. Verum quia idem est motus, sive mobile per diagonalem  $AD$ , celeritate æquabili ut  $AD$ , ex vi unica impressa feratur, sive viribus conjunctis per latera  $AB$ ,  $AC$ , impellatur, liquet motum per diagonalem, motibus per latera disjunctis æquivalere.

Si mobile à pluribus quàm duabus viribus in loco  $A$ , simul impressis impellatur, inveniri semper poterit unica directio & velocitas ex omnibus separatis composita ipsique æquipollens, quæ *media directio* dicitur; duarum enim virium media directio reperitur. (per coroll. 1. *Neutr.*); deinde diagonalis illa tanquam spatium vi unica percursum consideretur, & cum spatio tertiâ vi descripto pari ratione componatur, sicque vires omnes ad unicam reducentur.

37. Motus omnis in quocumque alios laterales ipsi æquipollentes resolvi potest; nam motus per  $AD$ , æquabilis, facto triangulo quocumque  $ABD$ , resolvitur in motus per latera  $AB$ ,  $AC$ , motui per diagonalem  $AD$ , æquipollentes (35). Eadem ratione motus per  $AB$ , in duos quoscumque alios, descripto circa latus  $AB$ , triangulo resolvitur, idemque de motu per  $AC$ , & de aliis quibuscumque motibus dici debet.

38. Si corpus aliquod  $A$ , duplici vi per  $AC$ , & per  $AF$ , ita urgeatur, ut motus in eadem ratione acceleretur vel retardetur, sive quod idem est, si spatia  $AB$ , &  $AD$ ,  $AC$ , &  $AF$ , iisdem temporibus percurra, semper sint in constanti ratione, motu composito parallelogrammi diagonalem  $AG$ , describet....



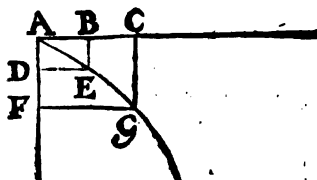
*Dem...* Ductis  $DE$  ad  $AB$ , &  $BE$  ad  $AD$ , parallelis, corpus conjunctis viribus motum, reperiri debet simul in utraque lineâ  $DE$ , &  $EB$ , (34) adeoque in earum intersectione  $E$ ; similiter ductis  $FG$ , ad  $AC$ , &  $CG$ , ad  $AF$ , parallelis,

*Tom. I.*

pater corpus motu composito eodem tempore reperiri in  $G$ , quo motibus disjunctis attingeret puncta  $C$ , &  $F$ ; cum igitur (ex hyp.) sit  $AD$ , ad  $AB$ , seu  $DE$ , ut  $AF$ , ad  $AC$ , seu  $FG$ , recta  $AE$ , producta transit per punctum  $G$ ; ergo corpus per diagonalem rectam  $AG$ , incedet. Q. e. D.

39. Si spatia secundum unam directionem percurra non sint semper in eadem ratione cum spatiis juxta alteram directionem iisdem temporibus descriptis, mobile per eandem diagonalem rectam progredi non potest; si autem ratio spatorum viribus separatis iisdem temporibus descriptorum continuò mutetur, mobile per curvam incedet, ut si motus uniformis cum motu continuò accelerato vel retardato componatur.

40. Corpus grave secundum quamlibet directionem  $AC$ , quæ non sit ad horizontem normalis projectum, in terræ vicinias, sublata medii resistentiâ, parabolam  $AEG$ , describit, cujus diameter  $AF$ , est ad horizontem perpendicularis, & tangens  $AC$ , directio projectionis....



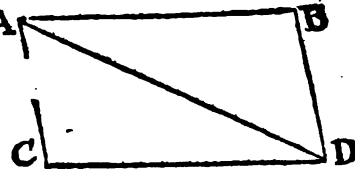
*Dem...* Solâ vi projectionis impressa, grave uniformiter movetur per rectam  $AC$ , (per leg. 1.), solâ vi gravitatis motu uniformiter accelerato per rectam  $AF$ , aut ipsi parallelam descendit (26); quoniam verò motus per  $AC$ , æquabilis est, spatia  $AB$ ,  $AC$ , sunt ut tempora quibus percurruntur (5). Spatia  $AD$ ,  $AF$ , motu uniformiter accelerato iisdem temporibus descripta, sunt ut quadrata temporum quibus describuntur (27), seu ut quadrata rectarum  $AB$ ,  $AC$ , aut ipsi parallelarum & æqualium  $DE$ ,  $FG$ : cum igitur grave motu composito larum in fine temporum  $AB$ ,  $AC$ , reperiat in punctis  $E$ , &  $G$ , (34) evidens est quadrata ordinarum  $DE$ ,  $FG$ , curvæ  $AEG$ , (39) esse inter se in ratione abscissarum  $AD$ ,  $AF$ , adeoque curvam  $AEG$ , esse parabolam, (per 20<sup>am</sup> lib. 1. Conic. *Apollon.*) cujus diameter  $AF$ , & tangens  $AC$  ordinatis  $DE$ ,  $FG$  (32. prop. lib. 1. Conic. *Apollon.*) Q. e. D.

*D*

41.



AXIOMA-argumento in fine temporis ejusdem  
TA, SIVE reperietur alicubi in lineâ  $CD$ , & A  
LBGES idcirco in utriusque lineâ concursu  
MOTUS.  $D$  reperiri necesse est. Perget au-  
tem motu rectilineo ab  $A$  ad  $D$  per  
Legem 1<sup>am</sup>.

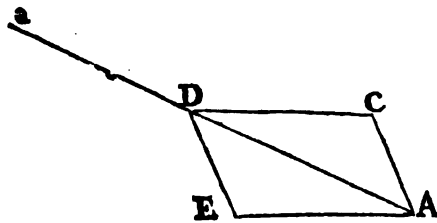


## COROLLARIUM II.

Et hinc patet (<sup>d</sup>) compositio vis directæ  $AD$  ex viribus quibuscumque obliquis  $AC$  &  $CD$ , & vicissim resolutio vis cujusvis directæ  $AD$  in obliquas quascunque  $AC$  &  $CD$ . Quæ quidem compositio & resolutio abundè confirmatur ex Mechanicâ.

Ut si de rotæ alicujus centro  $O$  exeuntes radii inæquales  $OM$ ,  $ON$  filis  $MA$ ,  $NP$  sustineant pondera  $A$  &  $P$ , & que-

(<sup>d</sup>) 41. Quæ de motuum compositione & resolutione dicta sunt, ad vires mortuas possunt transferri. Si corpus seu punctum  $D$ , viribus mortuis, seu, ut loquuntur Mechanici, potentiis  $DE$ ,  $DC$ , juxta directiones  $DE$ ,  $DC$ , agentibus trahatur vel impellatur, & completo parallelogrammo  $EC$ , ducatur diagonalis  $DA$ , vires  $DC$ ,  $DE$ , vi mediæ, ut  $DA$ , juxta directionem  $DA$ , agenti æquivalent....



Dem.... vis separata  $DC$ , considerari potest tanquam vis acceleratrix quæ in corpus  $D$ , juxta directionem  $DC$ , continuè & uniformiter agit, & vis illa est ut celeritas quam dato tempore generat aut generare potest (13), adeoque illa celeritas per rectam  $DC$ , expo-

nerur, cum ea recta sit ut vis ipsa  $DC$ , (per hyp.) simili argumento liquet rectam  $ED$ , esse ut celeritatem vi agente per  $DE$  eodem tempore dato generandam. Cum igitur celeritates  $DE$ ,  $DC$ , in mediam,  $DA$ , æquipollentem componantur (per Coroll. 1. Newt.) manifestum est vires quoque laterales  $DE$ ,  $DC$ , in mediam æquipollentem  $DA$ , (35) componi, atque adeò vim ut  $DA$ , in laterales  $DE$ ,  $DC$ , æquivalentes resolvi posse. Quare (35. 36) vires quocumque laterales in unam æquivalentem componi possunt, & vis quælibet in alias quascunque ipsi simul æquipollentes potest resolvi.

42. Producat  $AD$ , ad  $a$ , ita ut  $DA$ , &  $Da$ , æquales sint, & vis, ut  $Da$ , juxta directionem  $DA$ , urgeat punctum  $D$ ; punctum illud  $D$ , duabus viribus  $DA$ , æqualibus & contrariis sollicitatum, immotum permanebit; sed vis media  $DA$ , æquivalet viribus separatim  $DE$ ,  $DC$ , (41), ergò si punctum  $D$ , sublatâ vi,  $DA$ , tribus viribus  $Da$ ,  $DE$ ,  $DC$ , urgeatur, non movebitur, sed erit inter vires æquilibrium.

43. Si punctum  $D$ , tribus viribus  $Da$ ,  $E$ ,  $DC$ , in æquilibrio constitutis urgeatur, com-

## 27

AXIOMATA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

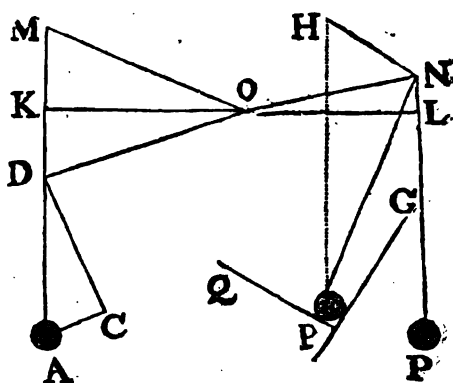
tro

tentiae in æquilibrio circa punctum quodvis D, consistentes, dicantur ut libet  $1^a$ ,  $2^a$ ,  $3^a$ , erit  $1^a$ , ad  $2^am$ , ut finus anguli quem  $2^a$  &  $3^a$  potentiarum directiones comprehendunt, ad sinum anguli quem  $1^a$  &  $3^a$  directiones formant. Omnes illas de virium & motuum compositione & resolutione demonstrationes accuratissimis confirmavit experimentis Clariss. *Gravesandius* in *Elementis Physicis*.

(f) 46. Ponderis A A, quo punctum D;  
trahitur, vis tota A A, resolvi potest  
(41) in vires laterales & æquipollentes  
D 2 AC,

44. Cum latera trianguli sint ut finis angulorum oppositorum, erit vis  $Da$ , seu  $DA$ , ad vim  $DC$ , ut finis anguli  $ACD$ , seu complementi illius  $EDC$ , ad finem anguli  $DAC$ , seu  $ADE$ , seu complementi illius  $EDA$ ; similiter demonstratur esse  $aD$ , ad  $ED$ , ut finis anguli  $EDC$ , ad finem anguli  $aDC$ . Si igitur tres po-

**AXIOMA-** tro nihil valet ad movendam  
**TA, SIVE** rotam; vis autem altera  $DC$ ,  
**LEGES** trahendo radium  $DO$  perpen-  
**MOTUS.**



A C, & D C, ita ut punctum D, urgeatur simul vi ut D C, secundum directionem D C, & vi ut C A, secundum directionem rectæ O D, productæ; quia verò centrum O, rotæ fixum supponitur, vis ut A C, trahendo punctum O; juxta directionem radii O D, nullum motum creat, nihilque valet ad rotam circa centrum O, movendam; vis autem altera D C, trahendo radium D O perpendiculariter, idem valet ad rotam circa centrum O, volvendam, ac si perpendiculariter traheret alterum radium O L, ipsi O D, æqualem; vires enim æquales æqualibus radiis pariter applicatæ eodem modo rotam movere debent; si itaque pondus aliquod P, è puncto L, suspensum sit vi D C, æquale, seu, quod idem est, si pondus P, sit ad pondus A, ut recta D C, ad rectam D A, quæ exponit vim absolutam ponderis A, rotæ his duabus viribus A, & P, in partes contrarias æqualiter tracta non movebitur. Verum in triangulari A D C, D O K, anguli D A C, & K D O, ob parallelas A C, D O, & præterea anguli ad K & C recti, æquales sunt, adeoque triangula illa sunt similia & D C : D A = O K : D O, seu O L; pondera igitur A, & P, quæ sunt reciproce ut radii in directum positi O K, & O L, seu

quæ sunt reciproçæ ut perpendiculares O K ,  
& O L , ex centro O , in eorum dire-  
ctiones ductæ idem pollebunt , & sic con-  
sistent in æquilibrio.

(8) 47. Sit  $KL$ , recta inflexilis & gravitatis expers circa punctum fixum seu fulcrum  $O$ , volubilis, hæc vectem & libram exhibet, atque etiam peritrochium circa axem volubile potest exponere, seu rotam cujus est radius longior  $OL$ , & centrum  $O$ , circa quod rota & cylindrus cujus est radius brevior  $OK$ , revolvī possunt; ex demonstratis autem (46) patet esse in his tribus machinis æquilibrium, cum potentie seu pondera  $A$ , &  $P$ , sunt inter se reciproci, ut rectæ a centro  $O$ , ad eorum directiones normaliter ductæ. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tantò major; nam, manente distantia  $OL$ , vis ponderis  $P$ , ad movendam rotam, est ut pondus  $P$  absolutum, & manente pondere  $P$ , crescit vis illius ad movendam rotam in ratione distantie directionis ponderis a centro; duplicatâ enim vel triplicatâ illâ distantia, pondus idem  $P$ , est in æquilibrio cum duplo vel triplo pondere, cujus distantia directionis a centro est subdupla vel subtripla (46). Ergo in his tribus machinis vis potentie seu

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 29

Quòd si pondus  $p$  ponderi  $P$  æquale partim suspendatur filo AXIOMA:  $Np$ , partim incumbat plano obliquo  $pG$ : agantur  $pH$ ,  $NH$ , TA, SIVE prior horizonti, posterior plano  $pG$  perpendicularis: & si vis LEGES ponderis  $p$  deorsum tendens, exponatur per lineam  $pH$ , resolvi potest hæc in vires  $pN$ ,  $HN$ . Si filo  $pN$  perpendiculari esset planum aliquod  $pQ$ , secans planum alterum  $pG$  in linea ad horizontem parallela; & pondus  $p$  his planis  $pQ$ ,  $pG$  solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus  $pN$ ,  $HN$  perpendiculariter, nimirum planum  $pQ$  vi  $pN$ , & planum  $pG$  vi  $MOTUS.$   $HN$ . Ideoque si tollatur planum  $pQ$ , ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendo pondus jam vicem præstat plani sublatis, tenderet illud eadem vi  $pN$ , quâ planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis  $PN$ , ut  $pN$  ad  $pH$ . (h) Ideoque si pondus  $p$  sit ad pondus  $A$  in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum  $pN$ ,  $AM$  à centro rotæ, & ratione directâ  $pH$  ad  $pN$ ; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideo se mutuo sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem  $p$ , planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires cunei & mallei innotescunt: utpote cum vis quâ pondus  $p$  urget planum  $pQ$ , sit ad vim, quâ idem vel gravitate suâ vel ictu mallei impellitur secundum lineam  $pH$  in plana, ut  $pN$  ad  $pH$ ; atque ad vim, quâ urget planum alterum  $pG$ ; ut  $pN$  ad  $NH$ . Sed & vis Cochleæ per similem virium divisio-

ponderis ad movendam machinam circa centrum motus, est semper in ratione compositâ ponderis absoluti seu intensitatis potentie, & distantie directionis illius à centro motus. Vim autem illam ponderis aut potentie ad machinam movendam momentum potentie aut ponderis vocant Mechanici.

(\*) 48. Vis quâ pondus  $p$ , tendit filum obliquum  $pN$ , dicatur  $\pi$ , & normalis ex centro  $O$ , in filum  $pN$ , ducta dicatur  $n$ , & erit ex demonstratis  $\pi : P$ , seu  $p$ ,  $= pN : pH$ . Præterea si vis  $\pi$ ,

in æquilibrio cum pondere  $A$ , consistat, erit etiam (47)  $A : \pi = n : KO$ ; unde per compositionem rationum erit  $A \times \pi : p \times \pi = n \times pN : KO \times pH$ , seu  $A : p = n \times pN : KO \times pH$ ; &  $p : A = KO \times pH : n \times pN$ ; ideoque si pondus  $p$ , sit ad pondus  $A$ , in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum,  $n$ , &  $KO$ , filorum suorum  $pN$ ,  $AM$  à centro rotæ, & ratione directâ  $pH$ , ad  $pN$ , erit æquilibrium.

## 30 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. visionem colligitur; quippe quæ cuneus est à vecte impulsus: (1) Usus igitur Corollarii hujus latissimè patet, & latè patendo veritatem ejus evincit; cùm pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diversimodè demonstrata. Ex hisce enim facilè derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tensis & ponderibus directè vel obliquè ascendentibus, cæterisque potentiis Mechanicis componi solent, ut & vires Tendinum ad animalium ossa movenda.

### COROLLARIUM III.

*Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.*

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Legem 111, adeoque per Legem 11 æquales in motibus efficiunt mutationes versùs contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ priùs. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem. (\*) Ut

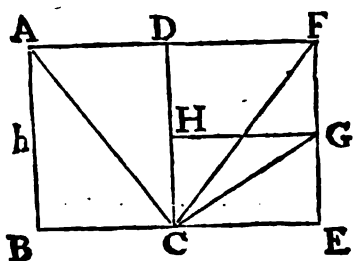
(1) 49. Cunei & cochleæ vires totamque ferè mechanicam hisce theorematibus demonstravit Clariss. Varignonius. Quàm latè pateat eorum usus manifestum est ex præclaro opere Joannis Alphonfi Borelli de motibus animalium, & ex variis, inter quas Bernoullianæ eminent, de musculorum motu dissertationibus; sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti; in proximo scholio machinarum vires generali mechanicæ principio determinare satis erit; ut autem ea quæ nobis illustranda occurrent in meliori lumine collocentur, generales motuum leges, ne omisiss quidem definitionibus, præmittendas esse judicavimus.

(\*) 50. Corpus perfectè elasticum dicitur cujus partes ex ictu flectuntur, seu introcedunt, & deindè eadem vi quæ fle-

xæ sunt, sese in priorem statum contrariâ directione restitunt. Corpus imperfectè elasticum est cujus partes ex ictu flexæ in priorem quidem statum redire nituntur, sed minori vi eâ quæ flexæ sunt. Corpus non elasticum vocatur cujus partes ictu percussæ nullâ vi sese restituere conantur. Corpus unum in alterum directè impingere dicitur, si secundùm rectam ad contactum perpendicularem impingat; obliquè verò si secundùm rectam ad contactum obliquam. Cùm corpora in se mutuo non agant, nisi per massam & velocitatem, tanquam axioma ex legibus 2â & 3â notissimum innumerique confirmatum experimentis supponimus quantitates motus æquales & contrarias in conflictu sibi mutuo æquipollere.

§1. Si

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 31



§1. Si globus A, in planum immobile BE, incurrat, quæritur illius motus post impactum . . . . 1°. Globus ille in planum directè impingat per AB; si globus & planum omni elasticitate destituantur, globi motus post impactum in B, omnino extinguitur, cum nulla vis globum repellat; si autem planum & globus perfectò elatere donentur, globus per BA, post impactum resiliet eadem quâ advenit celeritate BA; nam in corporibus perfectè elasticis (50) vis restitutiva æqualis est vi compressivæ, unde si imperfecta fuerit vis elastica, globus minori velocitate Bh, resiliet . . . . 2°. Globus A, in planum BE, velocitate & directione AC, obliquè impingat, illius motus resolvatur in motus laterales quorum unus AD, sit plano BE, parallelus, alter autem AB, eidem plano perpendicularis (37), globus A, motu secundum AD, ad planum non accedit, sed tantum motu secundum perpendicularem AB, vel DC; velocitas globi respectu plani BE, est tantum ut perpendicularis AB; at verò si AC, foret perpendicularis ad planum BE, velocitas quâ ad planum accederet, foret ut AC; ergò cum imperius ejusdem corporis in planum, sint ut velocitates quibus ad planum accedit, ictus obliquus est ad perpendicularem, ut AB, ad AC; seu sumptâ AC, tanquam radio, ut sinus anguli incidentiæ ACB, ad sinum totum . . . . 3°. Si nulla sit in occoribus A, & BE, elasticitas, globus A, per AC, incurrens movebitur per CE, celeritate ut  $CE = AD$ ; nam motus perpendicularis AB, vel DC, ex demonstratis, extinguitur, remanetque tantum motus CE, cui planum ut potè parallelum non opponitur; si verò perfectum fuerit elaterium, resiliet globus per CF, celeritate  $CF = AC$ , & an-

gulus reflexionis FCE, æqualis erit angulo incidentiæ ACB; nam per vim restitutivam elateris resiliet per normalem CD, celeritate CD, seu BA, & præterea motu ad planum parallelo progreditur per CE, celeritate ut  $CE = AD$ , ergò motu composito (coroll. 1. Newt.) percurreret diagonalem CF; & cum in parallelogrammis DB, DE, omnia sint paria, erit  $FC = AC$ , & angulus FCE,  $= ACB$ . Tandem si corpora imperfectè fuerint elastica, manebit quidè post impactum velocitas AD, seu CE, plano parallela, sed velocitas perpendicularis CH, minor erit velocitate DC, seu AB, & completo parallelogrammo HE, globus per diagonalem CG, resiliet.

§2. Si globi non elastici in se mutuo directè impingant, quæritur illorum motus post conflictum . . . . 1°. Globi in eandem plagam ferantur, subsequens fugientem impellet, donec ambo simul tanquam unum corpus eadem directione ac velocitate incedant, eritque (coroll. 3. Newt.), summa quantitatum motus eadem antè & post conflictum; communis ergò post conflictum velocitas invenitur, summâ quantitatum motus antè conflictum per summam massarum divisâ (6) . . . . 2°. Globi contrariis directionibus sibi mutuo occurrant, si æqualis in utroque fuerit motus quantitas, post conflictum ambo quiescant (50). Si verò inæquales sint motus quantitates, per conflictum extinguitur in singulis quantitas motus globi debilius moti (50), & ambo simul post impactum communi velocitate ac directione quasi unicum corpus progrediuntur, estque quantitas motus in utroque simul residua, differentiæ quantitatum motus antè conflictum æqualis (coroll. 3. Newt.) Hinc communis post conflictum velocitas habetur, si differentia illa quantitatum motus antè conflictum ad summam massarum applicetur (6). In hoc utroque casu communis post conflictum velocitas in globi cujusque massam ducta, est illius quantitas motus post impactum (6), ex quâ & quantitate motus ejusdem globi ante conflictum, per subtractionem invenitur quantitas motus in conflictu acquisita vel amissa; quia verò in omni globorum non elasticorum conflictu directo, vel motus omnis cessat, vel globi post impactum communi celeritate feruntur, manifestum est

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

## 32 PHILOSOPHIÆ NATURALIS :

**AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.** (1) Ut si corpus sphaericum *A* sit triplo majus corpore sphaerico *B*, habeatque duas velocitatis partes; & *B* sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B*, ut sex ad decem: ponantur motus

est, respectivam globorum velocitatem per conflictum extingui.

53. Globi elastici in se invicem directè incurrant, quæritur eorum motus post conflictum . . . . . 1°. Mutatio quæ ex mutuo corporum perfectè elasticorum conflictu in utriusque corporis motu nascitur, dupla est mutationis quam ictus idem in iisdem corporibus omni elaterio destitutis produceret, in corporibus imperfectè tantum elasticis mutatio major est quàm in non elasticis, sed duplâ minor. Nam partes in utroque corpore æquali vi ex ictu comprimuntur (Leg. 3.) Si corpora omni elatere destituerentur, post conflictum vel quiescerent, vel in eandem plagam velocitate communi progredierentur (52) nec partes flexæ restituerentur; si autem accedat vis elastica, partes flexæ sese restituent vi & directione (50) quæ semper contraria erit vi compressivæ, & in corporibus perfectè elasticis huic æqualis, in aliis minor; actio igitur corporum in se mutuo ex elateris restitutione orta, actioni ex impactu nascenti æqualis est in corporibus perfectè elasticis, minor in aliis, ex quibus & Lege 2<sup>a</sup> constat quod erat primo propositum . . . . . 2°. Corpora perfectè elastica eâdem velocitate respectivâ post conflictum recedunt, quâ antè conflictum ad se invicem accedebant; in corporibus verò imperfectè tantum elasticis, velocitas respectiva quâ post ictum discedunt, est ad velocitatem quâ antè ictum ad se mutuo accedebant, in ratione vis restitutivæ ad vim compressivam; nam cum in conflictu corporum non elasticorum omnis velocitas respectiva, quâ ad se mutuo accedebant, destruat ex ictu (52), sitque vis restitutiva elateris perfecti vi compressivæ æqualis & contraria, manifestum est in corporum perfectè elasticorum conflictu, velocitatem respectivam ex solo impactu amissam, contrariâ directione restitui; in corporibus verò imperfectè elasticis eam

tantum restitui velocitatis respectivæ partem, quæ est vi restitutivæ proportionalis . . . . . 3°. Ut igitur corporum perfectè elasticorum motus post conflictum directum inveniatur, considerentur corpora tantum omni elatere destituta, & in eâ hypothesi quæritur (52) quantitas motus ex conflictu in unoquoque corpore acquisita vel amissa secundum eam directionem quâ corpus ante conflictum movebatur, eadem motus quantitas duplicata, erit quantitas motus in corpore perfectè elastico acquisita vel amissa, quæ proinde quantitati motus corporis antè conflictum addita vel dempta, dat quantitatem motus illius corporis post conflictum . . . . . 4°. Corporum imperfectè elasticorum motus post conflictum invenitur, si data sit ratio vis restitutivæ elateris ad vim compressivam, sive, quod ex demonstratis idem est, ratio velocitatis respectivæ post impactum ad velocitatem respectivam antè impactum, quam rationem in iisdem corporibus constantem esse, experimentis probavit NEWTONUS, nisi tamen partes corporum ex congressu lædantur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiantur. Corpora omni elaterio destituta supponantur, & in eâ hypothesi quæritur quantitas motus in unoquoque corpore ex ictu acquisita vel amissa, cui motus quantitati si addatur quantitas motus vi elasticæ proportionalis, summa erit vera quantitas motus ex conflictu corporum imperfectè elasticorum in unoquoque acquisita vel amissa, ex quâ datâ & ex quantitate motus corporis cuiusque antè conflictum, reperitur, ut supra, omnis quantitas motus illius post conflictum. Exemplo lux affulgebit.

(1) 54. Globus *A*, sit triplo major globo *B*, habeatque duos velocitatis gradus, illius motus quantitas (6) erit ut  $3 \times 2$ , seu 6. *B*, sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis gradibus, 10, eritque quantitas motus globi *B*,  $1 \times 10$ , seu, 10, . . . . . 1°. Si globi elastici non sunt,

## PRINCIPIA MATHEMATICA. 33

motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit AXIOMA-  
partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus  $A$  TA, SIVE  
lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus  $B$  LEGES  
amittet partes totidem, adeoque perget corpus  $A$  post refle- MOTUS.  
xionem cum partibus novem vel decem vel undecim, &  $B$   
cum partibus septem vel sex vel quinque, existente semper  
summâ partium sexdecim ut prius. Si corpus  $A$  lucretur par-  
tes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque  
progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sex-  
decim vel septemdecim vel octodecim, corpus  $B$ , amittendo  
tot partes quot  $A$  lucratur, vel cum unâ parte progredietur  
amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progres-  
sivo partium decem, vel cum unâ parte regredietur amisso motu  
suo & (ut ita dicam) unâ parte amplius, vel regredietur cum  
partibus duabus ob detractum motum progressivum partium  
duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium  $15 + 1$   
vel  $16 + 0$ , & differentiæ contrariorum  $17 - 1$  &  $18 - 2$  sem-  
per erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexio-  
nem. (m) Cognitis autem motibus quibuscum corpora post  
reflexionem pergent, inveniatur cujusque velocitas, ponendo  
eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad  
mo-

sunt, velocitas communis post conflictum  
(52) erit  $16:4$ , seu  $4$ ; quare quantitas  
motus ipsius  $A$ , post conflictum erit  $3 \times 4$ ,  
seu  $12$ .  $B$ , verò quantitas motus erit  $1 \times 4$ ,  
seu  $4$ . Itaque quantitas motus à corpore  
 $B$ , amissa est,  $6$ , & corpori  $A$ , acquisita  
est etiam,  $6$ ..... 2°. Si globi sunt per-  
fectè elastici, quantitates illæ duplicari de-  
bent (53), erunt igitur  $12$  &  $12$ . Si  
quantitati motus.  $6$ , globi  $A$ , antè con-  
flictum jungas,  $12$ , summa erit,  $18$ , quan-  
titas motus illius post conflictum; si verò  
ex quantitate motus,  $10$ , ipsius  $B$ , antè  
conflictum subduxeris,  $12$ , quantitatem  
motus per conflictum amissam, residuum  
est  $-2$ , quod signum  $-$ , ut notum est,  
contrariam positionem significat, seu cor-  
pus  $B$ , post ictum in contrariam plagam  
resiliet cum hac motus quantitate  $2$ .....

Tom. I.

3°. Si globi  $A$  &  $B$ , sint imperfectè elas-  
tici, sitque v. gr., eorum vis restitutiva  
subdupla vis compressivæ, erit vis compres-  
siva ad vim restitutivam (seu  $2$ , ad  $1$ )  
ut quantitas motus,  $6$ , ex ictu acquisita  
vel amissa ad quantitatem motus,  $3$ , sola  
vi restitutivâ acquisitam vel amissam; qua-  
re hæc quantitas,  $3$ , addatur quantitati,  
 $8$ , ex ictu acquisitæ in corpore  $A$ , & amit-  
tæ in corpore  $B$ , summa,  $9$ , erit quanti-  
tas motus integra tam ex ictu quàm ex  
elaterè acquisita vel amissa; unde quanti-  
tas motus globi  $A$ , post conflictum est,  
 $6 + 9$ , seu,  $15$ , globi  $B$ ,  $10 - 9$ , seu  
 $1$ , quarum summa est,  $16$ .

(n) 55. Cognitis quantitatibus motuum  
quibuscum corpora post conflictum per-  
gent, inveniatur cujusque velocitas divi-  
dendo quantitatem motus cujusque corpo-

E ris



AXIOMA  
TA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

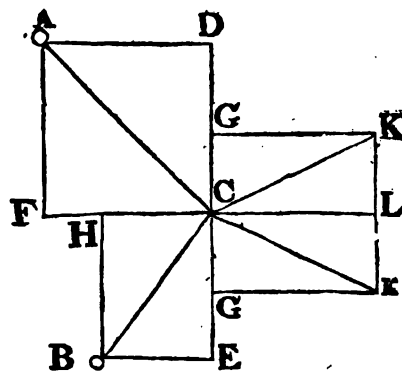
motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motus partes sex ante reflexionem ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

(<sup>n</sup>) Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidunt in se mutuo obliquè, & requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani à quo

cor-

ris per illius massam (6), aut etiam quia ejusdem corporis diversæ quantitates motus sunt ut velocitates (6), dicendo, ut quantitas motus ante conflictum ad quantitatem motus post conflictum, ita velocitas corporis ante conflictum ad illius velocitatem post conflictum.

(\*) 56. Si corpora quæcumque *A* & *B*, diversis in rectis *AC*, *BC*, moventia, incidunt in se mutuo obliquè in *C*, & requirantur eorum motus post impactum. Cognoscendus est situs plani *FL*, à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus *C*; deinde corporis utriusque motus *AC*, *BC*, (per Coroll. 2.) distinguendus est in duos *AD*, & *AF*, *BE* & *BH*, unum nempe *AF* seu *DC*, & *BH* seu *EC*, huic plano *FL* perpendiculari, alterum *AD*, *BE*, eidem parallelum. Quia verò corpora secundum parallelas *AD*, *BE*, ad se mutuo non accedunt, sed tantum secundum perpendiculares *DC*, *EC*, in se invicem agunt, motus paralleli *AD*, *BE*, per impactum non mutantur, adeoque retinendi sunt iidem post conflictum qui erant ante conflictum; & motibus perpendicularibus *DC*, *EC*, mutationes æquales in partes contrarias *CD*, *CE*, tribuendæ sunt sic ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem ante & post conflictum (Coroll. 3. *Newt.*) Ut itaque corporum *A* & *B*, in se mutuo obliquè incidentium motus post ictum inveniantur, mota duntaxat supponantur per lineas *DC* & *EC*, velocitatibus *DC* & *EC*, atque



in eâ hypothesi quærantur (52, si fuerint elastica, 53, si non fuerint elastica) eorum velocitas post conflictum in lineâ *CD*, vel *CE*, ex quâ datâ, & ex velocitate parallelâ plano *FL*, etiam datâ, compositus corporis motus (per Coroll. 1. *Newt.*) facile reperietur. Sit exempli causâ *CG*, velocitas corporis *A*, post impactum per *DE*, in *C*; sumptâ *CL*, æquali & parallelâ velocitati secundum *AD*, quæ eadem post conflictum remanet, compleatur parallelogrammum *GL* & *A*, movebitur per illius diagonalem *CK*, velocitate ut *CK*, (per Coroll. 1. *Newt.*) Si corpora angulosa sibi per angulos occurrant, orientur motus circulares, dum pars corporis ex vi insitâ in unam plagam movetur, altera verò ex conflictu fertur in alteram plagam circa corporis centrum.

57. Da-

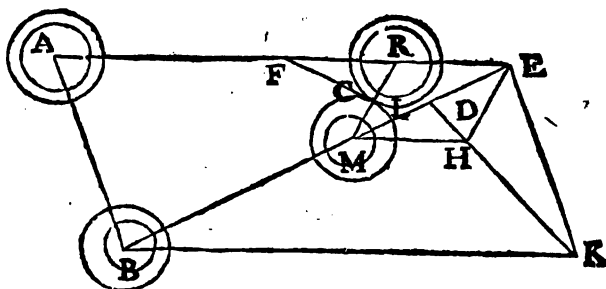
# PRINCIPIA MATHEMATICÆ. 35.

corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus : dein corporis utriusque motus (per Corol. 11.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum : motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex huiusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

AXIOMATA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

CO-

57. Datis duorum globorum A & B, directionibus, celeritatibus & diametris, unâ cum eorum situ ante conflictum, facile est determinare punctum concursus C, & situm plani FL, utrumque globum in puncto C, contingentis. Globus A, feratur per lineam AE, & celeritate ut AE, globus B verò secundum directionem BE, celeritate ut BD,



moveatur. Junctis A & B globorum centris per lineam AB, compleatur parallelogrammum ABKE. Jungantur puncta D & K, & recta DK, ex centro E, intersectetur arcu qui describitur radio EH, summæ semidiametrorum globorum A & B, æquali. Ex puncto intersectionis H, ducatur recta HM, ipsi EA parallela, erunt M & R, loca in quibus globorum centra constituentur, ubi secum invicem concurrent, & sumpta lineâ RC, æquali radio globi A, recta FL, ad RC perpendicularis, in puncto C, situm plani designabit . . . . Dem . . . . Quoniam recta HM,

est lineæ BK parallela (per const.) erit  $DM : DB = MH : BK = RE : EA$ , ob  $RE = MH$  : &  $EA = BK$ ; ergò dividendo  $BM : BD = AR : AE$ , & alternando  $BM : AR = BD : AE$ . Cum igitur sit BM ad AR, ut celeritas globi B, ad celeritatem globi A; globus A in R, & B in M, eodem tempore pervenient (6); Cumque sit  $MR = EH$ , globi in puncto C, se mutuo contingent, & planum EL, ad radium RC, in puncto C, perpendiculariter ductum utrumque globum contingeret. Q. e. D.

AXIOMA-  
TA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

## COROLLARIUM IV.

*Commune gravitatis Centrum ( $^{\circ}$ ), corporum duorum vel plurimum, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentiam (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.*

Nam

( $^{\circ}$ ) 58. Centrum gravitatis corporis cuiusque, est punctum intra vel extra corpus positum, circa quod undique partes in æquilibrio consistunt, ita ut si per hoc punctum ducatur planum figuram utcumque secans, corporis segmenta quæ utrinque sunt circa planum illud librata æquiponderent; si igitur ex centro gravitatis corpus aliquod suspendatur, datum quemcumque situm retinebit, & semper quiescet, si centri gravitatis descensus impediatur; unde totam corporis gravitatem in centro gravitatis locatam fingunt Mechanici, & pro corpore gravi solum gravitatis centrum in suis demonstrationibus surrogare solent. Planum gravitatis est figura plana per centrum gravitatis transiens; Diameter verò gravitatis est recta per centrum gravitatis ducta, Quare planorum gravitatis, communis intersectio diametrum gravitatis efficit, & in diametrorum gravitatis concursu centrum gravitatis positum est. Centrum magnitudinis vocatur punctum illud, per quod divisa magnitudo relinquit duas partes utrinque æquales; ut in circulo & ellipsi, ductis utcumque per centrum lineis rectis, lineæ illæ totaque figura in partes æquales dividuntur; ac proinde si gravia homogenea, id est, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales, secundum longitudinem in partes similes & æquales secari possint, centrum gravitatis à centro magnitudinis non differt.

59. Ex hisce definitionibus facile colligitur, omnium circularum, ellipsium, sphaerarum & figurarum quarumvis regu-

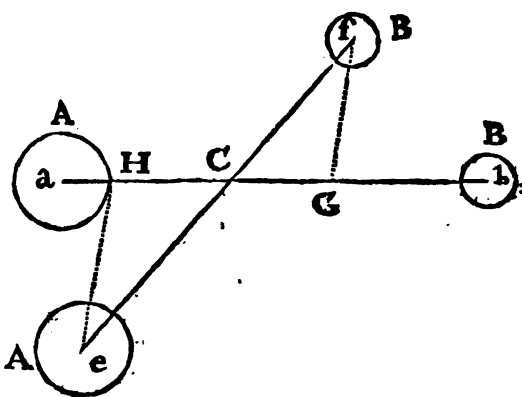
larium; centrum gravitatis idem esse cum centro magnitudinis, modò tamen gravia supponantur homogenea. In figuris autem irregularibus, communi duorum gravitatis diametrorum intersectione determinari potest centrum gravitatis (58). Sic in quolibet parallelogrammo, centrum illud in duarum diagonalium concursu positum est; in triangulo reperitur in intersectione duarum rectarum quæ à duobus angulis ductæ, latera angulis illis opposita, totumque proinde triangulum bifariam, adæque in partes æquiponderantes secant, in prismatibus & cylindris, centrum gravitatis est punctum medium rectæ basium oppositarum centra conjungentis; & generaliter in omnibus corporibus quantumvis difformibus centrum gravitatis mechanicè invenitur, si corpus ab aliquâ sui parte liberè suspendatur, & ab eadem parte à quâ pendet, demittatur perpendicularum ita ut in corpore linea quam fecerit perpendiculari filum notetur; deinde ab aliâ parte corpus idem liberè suspendatur ut prius, noteturque iterum linea perpendiculari ab hac parte super corpus demissi; concursus enim duorum filorum perpendiculari (quæ sunt diametri gravitatis) erit centrum gravitatis corporis dati.

60. Centra gravitatis a & b, corporum A & B, rectâ seu vecte inflexibili & gravitatis experte, a b jungantur; & ita dividatur a b, in C, ut sit pondus A, ad pondus B, ut C b, ad C a, punctum C, erit centrum gravitatis commune duorum corporum A & B... Dem... punctum C, fixum

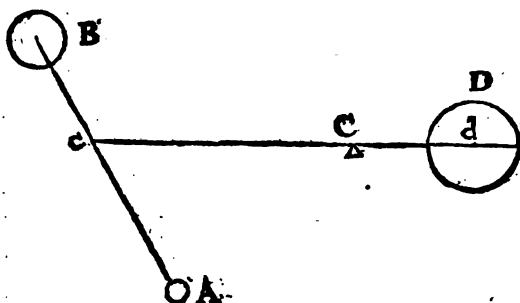
xum maneat, sitque 1<sup>o</sup>. a b, hori-  
zonti parallela, & quia a b, est vec-  
tis cujus fulcrum C, ponderis B mo-  
mentum seu conatus ad vectem circa  
C, movendum, erit ut  $B \times Cb$ , &  
ponderis A momentum ut  $A \times Ca$   
(47); verum (per hyp.)  $A : B = Cb : Ca$ ,  
adeoque  $A \times Ca = B \times Cb$ ;  
ergo momenta ponderum A & B,  
æqualia sunt, & proinde in æquili-  
brio circa punctum C, consistunt....

2<sup>o</sup>. vectis, a b, circa punctum C fi-  
xum, roteretur, & situm e f, inclina-  
tum ad horizontem a b, obtineat,  
ductis FG, EH, rectis horizonti  
a b, perpendicularibus, quæ sunt gra-  
vium directiones, ponderum A & B,  
momenta erunt ut  $A \times CH$  &  $B \times CG$ ,  
(47); sed ob triangula HCe, GfG,  
similia  $GC : HC = Cf : Ce$ , seu  $Cb : Ce$ ,  
sive  $Ca = A : B$ , adeoque  $GC : HC = A : B$   
&  $A \times CH = B \times CG$ ; momenta igitur

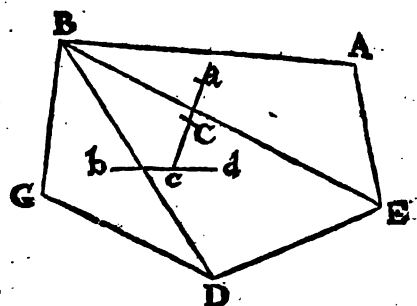
ponderum A & B, in situ quocumque  
dato æqualia sunt & semper æquilibrantur.  
Quare (58) punctum C, est commune gra-  
vitas centrum duorum corporum A & B.  
Q. e. D.



61. Coroll. 1..... Duorum  
corporum A & B, commune gra-  
vitas centrum sit c, & tertii  
corporis D, centrum gravitatis  
proprium sit d; jungatur recta  
cd, quæ ita dividatur in C, ut  
sit summa ponderum A + B ad  
pondus D, sicut Cd, ad Cc,  
trium corporum A, B, D, cen-  
trum gravitatis commune erit in  
C; nam duo corpora A & B, (58)  
considerari possunt tanquam in  
suo communi gravitatis centro c,  
coacta, adeoque si fuerit  $A + B : D = Cd : Cc$ , erit C, centrum gravitatis commune  
trium corporum A, B, D, (60). Eadem ratione quatuor, pluriumve, prout quisque vo-  
luerit, corporum commune gravitatis centrum reperietur.



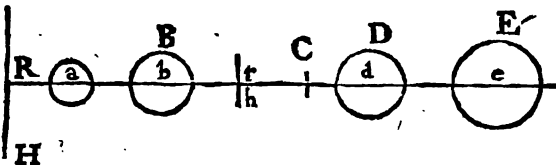
62. Coroll. 2..... figuræ cujuscunque planæ & recti-  
lineæ centrum gravitatis hoc modo inveniri potest.  
Figura data, A B G D E in sua triangula dividatur,  
duorumque triangulorum, BGD, BDE, centra  
gravitatis b & d, recta jungantur, & ita dividatur,  
bd, in c, ut area trianguli BGD, sit ad aream  
trianguli BDE, sicut cd, ad d, b c, eritque, c,  
centrum gravitatis commune duorum triangulo-  
rum BGD, BDE, (60). Centrum gravitatis, a,  
trianguli BAC, & centrum, c, figuræ BGD E,  
mox inventum jungantur recta ca, quæ ita divida-  
tur in C, ut area trianguli BAE, sit ad aream figu-  
ræ BGD E, sicut Cc, ad Ca & C, erit centrum  
gravitatis totius figuræ datæ A B G D E, (61). Hæc omnia clarè intelliguntur, si figurarum  
area quævis, instar ponderis centro gravitatis appensè consideretur.



# 38 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

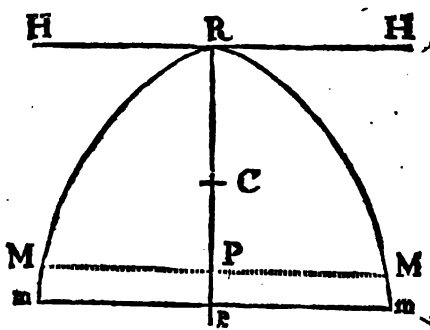
**AXIOMA- 63.** Sit recta R H, horizon-  
**TA, SIVE** ti perpendicularis quæ axis  
**LEGES** rotationis dicatur, & in eâ  
**MOTUS.** sumatur centrum rotationis  
 R, seu punctum fixum circâ  
 quod vectis horizontalis R e,  
 cum appensis ponderibus A,  
 B, D, E, rotari possit, sint-  
 que corporum centra gravitatis propria a, b,  
 d, e, & eorum commune gravitatis centrum  
 C, in vecte R e, ad eandem axis R H, partem  
 posita; distantia R C, communis centri gravi-  
 tatis C, à centro rotationis R, æqualis erit  
 summæ factorum unius cujusque ponderis in  
 suam à centro rotationis R, distantiam, per  
 summam ponderum divisæ ..... *Dem.* ....  
 Momentum cujusque ponderis ad vectem  
 circâ centrum R, movendum, est ut factum  
 ex illo pondere in suam ab eodem centro R,  
 distantiam (47), & omnium momentorum  
 summa, seu totus omnium ponderum ad  
 vectem circâ centrum R, movendum conatus,  
 ut illorum factorum summa; verum quia  
 pondera omnia per vectem R e, dispersa,  
 tanquam in suo communi gravitatis centro  
 C, coacta considerari possunt (58), erit  
 etiam totus omnium ponderum conatus ad  
 vectem circâ R, movendum, ut summa pon-  
 derum in distantiam R C ducta; quare sum-  
 ma factorum uniuscujusque ponderis in suam  
 à centro rotationis R distantiam, æqualis est  
 facto ex summâ ponderum in distantiam R  
 C communis centri gravitatis C, à centro  
 rotationis R; igitur  $R C \times A + B + D + E$   
 &c. =  $A \times a R + B \times b R + D \times d R$   
 +  $E \times e R$  &c., adeoque  $R C = A \times$   
 $a R + B \times b R + D \times d R + E \times e$   
 $R$  &c.:  $A + B + D + E$  &c. Q. e. D.

**64.** Si pondera ad eandem axis rota-  
 tionis partem sita non sint, si v. gr. fue-  
 rit axis rotationis r h, erit  $r C = D \times$   
 $d r + E \times e r - A \times a r - B \times b r : A + B$   
 $+ D + E$ . Nam momenta ponderum D  
 & E, ad vectem circâ r movendum sunt  
 $D \times d r$ ,  $E \times e r$ , & momenta contra-  
 ria ponderum A & B, sunt  $A \times a r$ ,  
 $B \times b r$ ; quare vis omnium ponderum ad  
 vectem r e, movendum erit,  $D \times d r +$   
 $E \times e r - A \times a r - B \times b r$ ; sed si  
 pondera in centro C, coacta supponantur,  
 erit vis illa eadem,  $r C \times A + B + D + E$ ,



ergo  $r C \times A + B + D + E = D \times d r +$   
 $E \times e r - A \times a r - B \times b r$ , ac proinde  
 $r C = D \times d r + E \times e r - A \times a r$   
 $- B \times b r : A + B + D + E$ . Q. e. D.

**65.** Quapropter si omnia pondera sint ad  
 eandem axis rotationis R H, partem posita,  
 & quodlibet pondus vocetur p, summa verò  
 omnia ponderum S p; præterea si distantia  
 à centro rotationis dicatur x, ac proinde fac-  
 tum cujusque ponderis in suam à centro rota-  
 tionis distantiam sit x p, & omnium facto-  
 rum summa s x p; distantia communis centri  
 gravitatis omnium ponderum à centro rota-  
 tionis erit generaliter S x p: S p. Si verò pon-  
 dera fuerint ad diversas axis rotationis r h,  
 partes posita, & distantia cujuslibet ponderis  
 à centro rotationis r, vocetur x, singula verò  
 pondera quæ sunt ad partem r e, posita, di-  
 cantur p, eorumque summa sit S p; insuper  
 singula pondera ad partem R r, sita dicantur  
 q, & eorum summa sit S q, distantia commu-  
 nis centri gravitatis omnium ponderum à  
 centro rotationis r, erit  $s x p - s x q : s p +$   
 $s q$ , vel  $s x q - s x p : s p + s q$ ; unde si  
 $S x p = S x q$ , manifestum est, centrum ro-  
 tationis idem esse cum centro gravitatis.



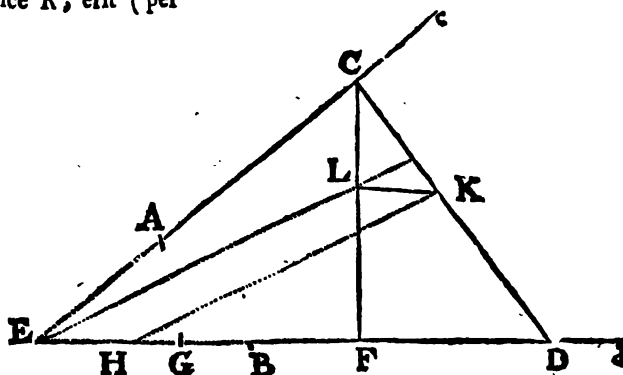
**66.** Harumce formularum auxilio, centra  
 gravitatis figurarum curvarum reperiuntur;  
 Nam si curvæ M R M, axis R P, quo ordi-  
 natæ M M m m, bisariam dividuntur, ut  
 vectis

(P) Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu AXIOMATA, in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione datâ, TA, SIVE punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in li- LEGES MOTUS. neâ

vectis habeatur, vertexque R, ut centrum rotationis & singula elementa qualia sunt M M m m, ut pondera vecti appensa considerentur, distantia centri gravitatis C, à centro rotationis seu vertice R, erit (per

primam formulam) æqualis summæ factorum ex singulis elementis M M m m, in suam à vertice R, distantiam per summam eorundem elementorum divisâ.

(P) 67. Duo corpora C & D, æquabiliter moveantur in lineis rectis A C, B D, positione datis, jungaturque recta C D, & ita dividatur in K, ut sit D K, ad C K, ut corpus C, ad corpus D; punctum K, quod est centrum gravitatis corporum C & D, (60) vel quiescet vel movebitur uniformiter in lineâ rectâ positione datâ... Dem... Concur-



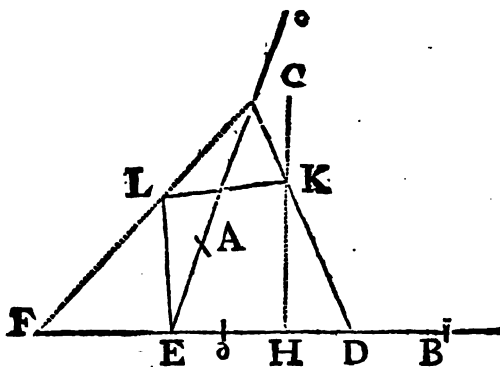
rant lineæ A C & B D, in E. 1°. Corpora C & D, ex punctis fixis A & B, in eandem plagam proficiantur & iisdem temporibus ad puncta C & D, perveniant, ac proinde spatia A C & B D, erunt in ratione datâ velocitatum (5). In B E, capiatur B G, ad A E, in ratione datâ B D, ad A C, & cum data sit A E, dabitur quoque linea B G; sit F D, semper æqualis datæ E G, erit E F = G D, & quia B G : A E = B D : A C, (per const.) erit B G + B D, seu G D : A E + A C, seu E C = B D : A C, adeoque A C : B D = E C : G D, seu E F; est igitur E C ad E F; in ratione datâ, & propterea ex datis angulo C E F, & laterum E C, E F, ratione, dabitur specie triangulum E F C, id est dantur tres anguli. Deinde secetur C F, in L, ut sit C L, ad C F, in ratione datâ C K, ad C D, id est in ratione corporis D, ad summam corporum C + D; & quia in triangulo E F C, specie dato datur ratio laterum E F, F C, dataque est ratio C F, ad F L, dabitur quoque ratio ex his duabus composita E F, ad F L, adeoque ob angulum E F C, etiam datum dabitur specie triangulum E F L; Quare dum progrediuntur corpora C & D, punctum L, semper locabitur in rectâ E L, positione datâ, utpote

quæ est basis trianguli E F L, in quo angulus F, idem constanter manet, & latus E F, positione datum ad latus F L, datam habet rationem. Junge L K, & quia C L : C F = C K : C D (per const.), similia erunt triangula C L K, C F D, & ob datam F D = E G, & datam rationem F D, ad L K, seu C D, ad C K; dabitur L K, magnitudine; lineæ L K, æqualis capiatur E H, & ductâ H K, erit semper E L K H, parallelogrammum, ob L K, æqualem & parallelam ipsi L H, locabitur ergo punctum K, in parallelogrammi illius latere H K, quod positione datum est; nam latus E L, positione, latus verò E H, positione & magnitudine datur. Quare punctum K, seu centrum gravitatis in lineâ rectâ positione datâ progreditur. Quoniam verò, ex demonstratis, triangula C E F, L E F, specie, & tria latera E C, E L, E F, positione data sunt, manifestum est rationem rectæ E L, seu lineæ æqualis H K, ad E C, datam esse. Verum quia punctum C, uniformiter movetur (per hyp.) uniformiter crescit recta E C, ergo pariter recta H K, uniformiter augetur, adeoque punctum K, æquabiliter progreditur in lineâ rectâ H K, positione datâ. Q.e. 1°. demonstrandum....

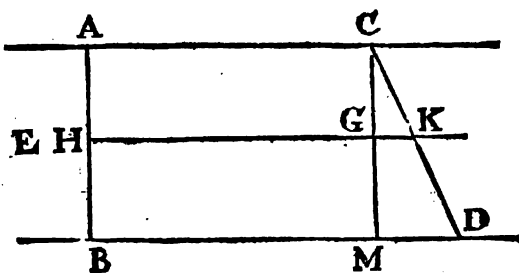
2°. Cor-

**AXIOMA** neâ rectâ. Hoc postea in Lemmate XXIII. ejusque Corollario  
**TA, SIVE** demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; & <sup>(1)</sup> eâ-  
**LEGES** dem  
**MOTUS.**

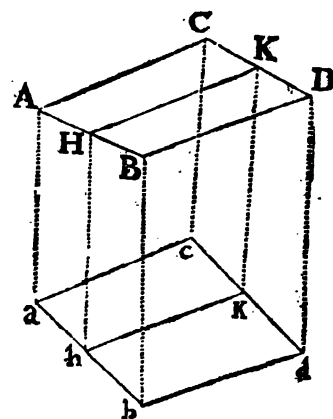
20. Corpora ex punctis fixis A & B, in diversas plagas progrediantur, semperque ca. iatur BG, in partem oppositam directioni BD, FD, verò secundum directionem BD, cætera fiant ut in superiori constructione eadem manebit demonstratio pro 20. casu.



68. Si punctum concursus E, in infinitum abeat, parallelæ fient lineæ AC, BD, & ex superiori demonstratione patet centrum gravitatis K, vel quiescere vel uniformiter moveri, in lineâ HK, positione datâ, lineis AC, BD, parallelâ; si autem lineæ parallelæ AC & BD, ad se mutuo accedant tandemque coincident, eadem semper valet demonstratio; ac proinde si corpora in eadem rectâ moveantur, in hac eadem lineâ centrum gravitatis vel quiescet vel movebitur uniformiter.



(1) 69. Si rectæ AC & BD, non in uno, sed in diversis planis positæ fuerint, ex singulis eorum punctis A & B, C & D, in quibus eodem tempore reperiuntur, in planum quodvis abdc, probabiliter assumptum demittantur perpendiculara Aa, Bb, Cc, Dd; & ex centris gravitatis H & K, perpendiculara Hh, Kk, excitentur, ob motum uniformem punctorum A & B, in lineis AC, BD, evidens est puncta a & b, uniformiter moveri in lineis ac, bd; & quia Aa, Bb, Hh, parallele sunt; lineæ AB, ab, in eadem ratione datâ in H, & h, dividuntur; idemque dicendum de punctis K, & k, in lineis CD, & cd; Quare, ex demonstratis (67), punctum h, uniformiter progreditur in rectâ hk, adeoque centrum gravitatis H, semper movetur in plano HhKk, ad planum abdc,



normali, si loco plani, abdc, aliud quodvis ad arbitrium assumeretur, eodem modo

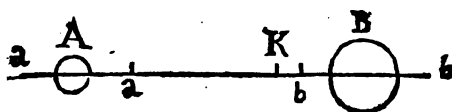
# PRINCIPĪA MATHEMATICA. 41

dem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in Axioma  
eodem plano. Ergo si corpora quocunque moventur unifor- TA, SIVE  
miter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum LEGES  
quorumvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rec- MOTUS.  
tâ; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis  
uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro com-  
muni in ratione datâ. Similiter & commune centrum horum  
duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur unifor-  
miter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia  
centri communis corporum duorum & centri corporis tertii  
in datâ ratione. Eodem modo & commune centrum horum  
trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur unifor-  
miter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia inter  
centrum commune trium & centrum quarti in datâ ratione,  
& sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actio-  
nibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis  
omnino vacant, ideoque moventur singula uniformiter in rec-  
tis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit  
vel movetur uniformiter in directum.

(\*) Porro in systemate duorum corporum in se invicem  
agentium cùm distantia centrorum utriusque à communi gra-  
vitatatis centro fiat reciproce ut corpora; erunt motus relativi  
cor-

modo demonstrari posset centrum gravi-  
tatis H, moveri in plano ad assumptum  
perpendiculari; necesse igitur est ut cen-  
trum illud H, moveatur in communi il-  
lorum planorum ad alia pro lubitu assump-  
ta perpendicularium intersectione, quæ  
cum sit linea recta HK, positione data,  
& punctum h, per rectam hk, unifor-  
miter progrediatur; punctum H, æquabiliter  
fertur in lineâ HK. In omni igitur ca-  
su centrum commune gravitatis duorum  
corporum quæ motu uniformi per lineas  
rectas positione datas progrediuntur, sem-  
per quiescit vel movetur uniformiter in  
rectâ positione datâ.

Tom. I.



(\*) 70. Si duobus corporibus A & B;  
quorum commune gravitatis centrum sit K,  
æquales motus quantitates in partes con-  
trarias de novo imprimantur, quibus eodem  
tempore percurrunt spacia Aa, Bb, centri  
gravitatis status non mutatur; Cum enim  
K, sit commune centrum gravitatis corpo-  
rum A & B, (per hyp.) erit  $A : B =$   
 $KB : KA$  (60) & quia impressæ quan-  
titates motus (6)  $A \times Aa$ ,  $B \times Bb$

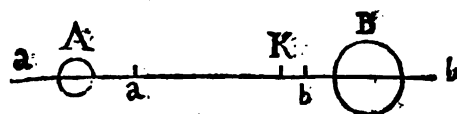
F

æqua-



## 42 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**AXIOMA-** corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud, vel ab  
**TA, SIVE** eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud à  
**LEGES** motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, at-  
**MOTUS.** que ideo ab actionibus horum corporum inter se, nec promo-  
vetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad  
motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium,  
quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune  
gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum  
suum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit,  
commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia au-  
tem horum duorum centrorum dividitur à communi corporum  
omnium centro in partes summis totalibus corporum quorum  
sunt centra reciproce proportionales, ideoque centris illis duo-  
bus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commu-  
ne omnium centrum servat etiam statum suum: manifestum est  
quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum  
corporum inter se nunquam mutat statum suum quoad motum  
& quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum  
inter se vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter  
bina compositæ; & propterea communi omnium centro mu-  
tationem in statu motus ejus vel quietis nunquam inducunt.  
Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in se invi-  
cem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter;  
perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se,  
vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in di-  
rectum; nisi à viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur  
de.



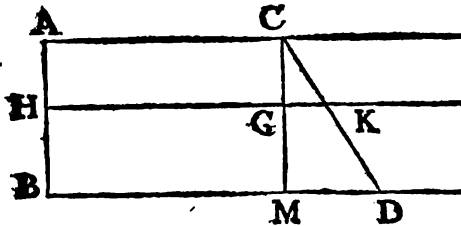
æquales sunt (per hyp.) , erit etiam  
 $A : B = Bb : Aa$ , adeoque  $KB : KA =$   
 $Bb : Aa$ , & componendo vel dividendo  
 $Kb : Ka = Bb : Aa = A : B$ ; dum igitur  
corpora A & B, ad puncta a & b,  
motibus impressis perveniunt, centrum K,

immutum remansit (60), ac proinde ab  
æqualibus motuum mutationibus in con-  
trarias partes factis non mutat statum suum  
motus vel quietis. Quapropter cum mu-  
tua corporum actio (per leg. 2. 3.) æqua-  
les mutationes in utroque corpore versus  
partes contrarias producat, commune gra-  
vitaris centrum duorum corporum ab ac-  
tionibus horum corporum inter se, nec  
promovetur, nec retardatur, nec mutatio-  
nem patitur in statu suo quoad motum vel  
quietem.

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

43

de hoc statu. (1) Est igitur systematis corporum plurium Lex AXIOMATA, SEVE  
eadem quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu mo-  
tus vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii  
seu MOTUS.



(1) 71. Motus progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis semper æstimari debet...  
Dem.... 1º. Corpora duo A & B, in lineis AC & BD, parallelis progrediantur cum velocitatibus, ut AC; BD, eorumque commune gravitatis centrum H, per rectam HK, lineis AC & BD, parallelam feratur, ducatur CM, rectæ AB parallela. Quoniam B: A = AH: BH (60) erit B: B + A = AH: AB, & ob parallelas AB, & CM; GK & MD, erit AH: AB = CG: CM = GK: MD, adeoque GK: MD = B: A + B, & B x MD = A + B x GK; verum quia AC = HG = BM, erit HK = AC + GK, & BD = AC + MD; quare A + B x HK = A + B x AC + A + B x GK = A x AC + B x AC + B x MD, ob A + B x GK = B x MD, ergo A + B x HK = A x AC + B x BD, seu summa corporum A & B, in velocitatem centri gravitatis HK, ducta, æqualis est summæ factorum in singulis corporibus A & B, in suam velocitatem AC, BD....  
2º. Si corpora contrariis directionibus CA & BD, moveantur, negativa erit quantitas motus corporis A, propter contrariam directionem CA, adeoque differentia quantitatum motus corporum, in plagas oppositas tendentium, seu quod idem est, quantitas motus in eandem plagam, æqualis erit factæ ex summa corporum, in velocitatem centri gravitatis.... 3º. Si

parallelæ AC, BD, ad se mutuo accedant tandemque coincident, eadem semper manet demonstratio, quæ proinde etiam obtinet, dum corpora in eadem rectâ feruntur.... 4º. Si corpora non moveantur in lineis parallelis nec in eodem plano, uniuscujusque ponderis directio ac velocitas in duas alias resolvatur, quarum una sit viæ centri gravitatis parallela, altera verò ipsi perpendicularis, & ex demonstratis liquet summam quantitatum motus corporum in plagam versùs quam movetur centrum gravitatis esse æqualem factæ ex summa corporum in velocitatem centri gravitatis....  
5º. Si æquabilis non sit corporum motus, sed quâcumque ratione acceleretur vel retardetur, temporibus infinitè parvis tanquam æquabilis spectari potest, iisque tempusculis summa quantitatum motus corporum æqualis est factæ ex summa corporum in velocitatem centri gravitatis; unde quovis tempore quantitas motus singulorum corporum æqualis est quantitati motus quam habuissent omnia corpora, si communi velocitate centri gravitatis simul lata fuissent.... 6º. Si trium corporum systema moveatur, duo ex hisce corporibus in suo gravitatis centro coacta fingi possunt (ex Dem.) ac proinde trium pluriumve corporum aut etiam ejusdem corporis partium systema ad duorum duntaxat corporum systema reducitur; ergo quantitas motus progressivi seu corporis solitarii seu systematis corporum, ex motu centri gravitatis æstimari debet. Q. e. D.

72. Coroll. 1.... Si differentie quantitatum motus versùs partes contrarias in systemate corporum sit nihilo æqualis, commune centrum gravitatis quiescit; si inæqualis est, progreditur in eam partem versùs quam prævalet motus.

73. Coroll. 2.... Motus systematis corporum in plagam datam habetur, si centri gravitatis motus in duos motus resolvatur, quorum unus in plagam datam dirigatur, alter verò sit ipsi perpendicularis; nam summa corporum ducta in veloci-

AXIOMA seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper  
TA, SIVE debet.

LEGES  
MOTUS.

## COROLLARIUM V.

(<sup>1</sup>) *Corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum sine motu circulari.*

Nam differentię motuum tendentium ad eandem partem, & summę tendentium ad contrarias, eadem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per Legem 11. æquales erunt congressuum effectus in utroque casu; & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

## COROLLARIUM VI.

*Si corpora moveantur quomodocunque inter se, & à viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; per-*

locitatem centri gravitatis versus datam directionem exponit quantitatem motus totius systematis in eandem partem progredientis.

(<sup>1</sup>) 74. Si navi quiescenti in quā continentur corpora variis motibus agitata, motus in directum æquabilis imprimatur, omnia hæc corpora navis velocitatem æquę participant (leg. 1. 2.), adeoque singulis corporibus additur in eandem plagam æqualis velocitas, ac proinde motus navi impressus respectivas corporum velocitates non mutat; quare differentię velocitatum in corporibus quæ ad eandem partem tendunt, & summę velocitatum in corporibus quæ ad partes contrarias tendunt, eadem manent antè & post motum navi impressum; sed ex his summis vel differentiis quæ sunt respectivę corporum velocitates, oriuntur congressus & ictus magnitudines quibus corpora se mutuo

feriant; nam si corpus aliquod M, velocitate C, in corpus quiescens m, incurrat, eadem est ictus magnitudo ac si utrique corpori nova velocitas c, in eandem partem accederet, & corpus M, cum velocitate  $C + c$ , in corpus m, velocitate c, motum impingeret; corpus enim M, in m, non agit per velocitatem c, utrique corpori communem, sed per solam velocitatum differentiam  $C + c - c$ , seu C; hæc autem differentia est ipsamet velocitas quā corpus M, in aliud m, quiescens agit. Iidem ergo erunt congressus ac proinde æquales congressuum effectus in utroque casu (per leg. 2.), & propterea manebunt motus respectivi in uno casu æquales motibus respectivis corporum in altero; si autem motus circularis navi imprimeretur, corpora, propter vim centrifugam (18) in varias partes cum variâ velocitate propellerentur.

*pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.*

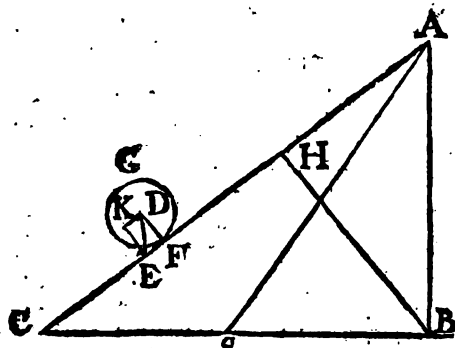
AXIOMATA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

Nam vires illæ æqualiter ( pro quantitativis movendorum corporum ) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter ( quoad velocitatem ) movebunt per legem 11. ideoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

*Scholium.* ( <sup>a</sup> )

Haftenus principia tradidi à Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria

( <sup>a</sup> ) 75. Vis acceleratrix gravitatis, quæ corpus in plano ad horizontem inclinato juxta plani directionem urgetur, est ad vim gravitatis acceleratricem quæ secundum directionem horizonti perpendicularem sollicitatur; ut altitudo plani ad ipsius longitudinem .... *Dem*....



Globus G, plano AC, ad horizontem CB, inclinato incumbat; ex A, ad horizontem CB; demittatur perpendiculum AB, & ex centro D, globi ad planum AC, ducatur recta DE, perpendiculo AB, parallela quæ exponat vim gravitatis acceleratricem quæ globus secundum directionem DE, horizonti perpendicularem urgetur; vis illa, DE, in duas vires resolvatur ( 41 ), quarum altera DF, fit ad planum AC, normalis quæ proin-

dè tota plano sustinetur, altera verò DK, seu FE, plano parallela quæ solæ globus ad motum secundum directionem plani AC, sollicitatur, & erit vis acceleratrix juxta plani inclinati directionem agens, ad vim acceleratricem perpendiculariter sollicitantem, ut EF, ad DE; sed quoniam triangula EFD, ABC, ob parallelas DE, AB, & angulos rectos F & B, æquales, similia sunt, est  $FE : DE = AB : AC$ . Vis igitur acceleratrix gravitatis secundum directionem plani inclinati AC, est ad vim gravitatis acceleratricem secundum directionem horizonti perpendicularem, ut plani inclinati altitudo AB, ad ipsius longitudinem AC. Q. e. D.

76. Coroll. 1.... Quoniam vis acceleratrix gravitatis juxta directionem DE, horizonti perpendicularem constans est ( 26 ), & vis acceleratrix FE, secundum directionem plani inclinati AC, est ad vim DE, in ratione datâ AB, ad AC; vis acceleratrix FE, constans quoque erit; ea igitur omnia quæ de motibus vi acceleratrice constantis generis demonstrata sunt, transferre licet ad motus vi gravitatis acceleratrice in plano inclinato productos; nempe. 1°. Grave per planum inclinatam motu uniformiter accelerato descendit, & motu uniformiter retardato ascendit ( 25 ). 2°. Velocitates sunt ut tempora quibus acquiruntur ( 25 ), spatia e quiete cadendo descripta sunt in ratione duplicatâ temporum quibus percurruntur, item-

AXIOMA-  
TA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

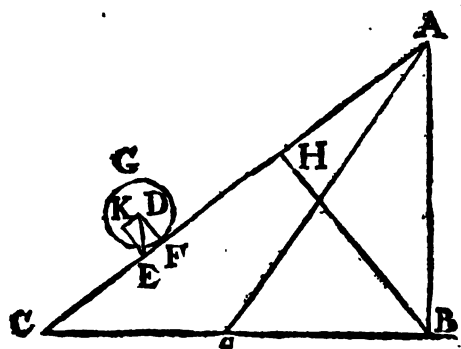
laria duo prima *Galilæus* invenit descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in parabola; conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aëris resistantiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente gravitas uniformis, singulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo imprimit vires æquales in corpus illud, & velocita-

que velocitatum quæ his temporibus acquiruntur; tempora verò itemque velocitates sunt in ratione subduplicatâ spatiorum (27, 28). 3°. Spatium à gravi in plano inclinato percursum ab initio motus computatum, dimidium est illius quod eodem tempore ab eodem mobili uniformiter percurri potest cum velocitate ultimò acquisitâ (29).

77. *Coroll. 2.* Quia vires acceleratrices constantes sunt inter se in ratione velocitatum, quas eodem tempore producunt (13), velocitas lapsu perpendiculari per AB, acquisita erit ad velocitatem eodem tempore in plano inclinato acquisitam, ut longitudo plani, AC, ad ipsius altitudinem AB (75).

78. *Coroll. 3.* Si ex puncto B, perpendiculari AB, ad planum inclinatum agatur perpendicularis BH; spatium AH, in plano inclinato eodem tempore percurritur, quo lapsu perpendiculari describitur AB; nam ob similitudinem triangulorum AHB, ABC; AH: AB = AB: AC, adeoque AH, est ad AB, ut velocitas in plano inclinato acquisita ad velocitatem, eodem tempore in perpendicularo AB, acquisitam (77). Sed velocitates motu uniformiter accelerato acquisitæ, sunt ut dupla spatia, seu, quod idem est, ut spatia eodem tempore percurra (76); ergò AH, AB, sunt spatia eodem tempore percurra.

79. *Coroll. 4.* Tempus quo planum AC percurritur, est ad tempus quo percurritur ipsius altitudo AB, ut longitudo plani AC, ad ejus altitudinem AB; tempus enim per AC, est ad tempus per AH, in ratione subduplicatâ AC, ad AH (76). Sed ob continuam rectarum AC, AB, AH, analogiam AC, est ad AB, in ratione subduplicatâ AC, ad AH; tempus igitur per AC, est ad tempus per AH, hoc est



(78), ad tempus per AB, ut AC, ad AB.

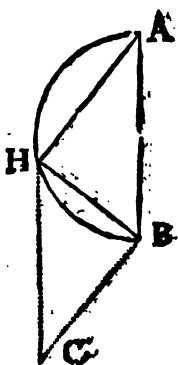
80. *Coroll. 5.* Cum sit AC, ad AB, ut tempus per AC, ad tempus per AB; & AC, ad AB, ut tempus per AC, ad tempus per AB (79), tempora quibus percurruntur diversa plana AC, AC, ejusdem altitudinis AB, sunt ut planorum longitudines.

81. *Coroll. 6.* Celeritates gravium in plano quovis inclinato AC, & in perpendicularo AB, æquales sunt, ubi gravia ex eadem altitudine ad eandem rectam horizontalem CB, pervenerint, adeoque velocitates in planis inclinat AC, AC, ejusdem altitudinis in C & c, sunt æquales; est enim velocitas in B, ad velocitatem in H, ut AB ad AH (ea enim spatia eodem tempore descripta sunt) & ob similitudinem triangulorum AHB, ABC, sicut AC ad AB: velocitas autem in C, est ad velocitatem in H, in ratione subduplicatâ AC, ad AH, hoc est, ob continuam analogiam rectarum AC, AB, AH, in ratione AC, ad AB; quare velocitas in B, est ad velocitatem in H, ut velocitas in C, ad eandem velocitatem in H, adeoque velocitas in C, æqualis est velocitati in B.

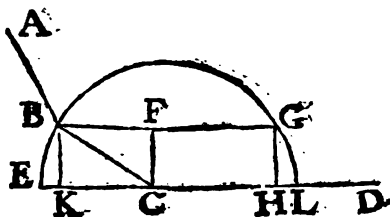
82. *Co-*

citates æquales generat : & tempore toto vim totam imprimit, AXIOMA  
& velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et TA, SIVE  
spatia temporibus proportionalibus descripta, sunt ut velocita- LEGES  
tes MOTUS.

82. Coroll. 7. Tempus descensus per chordas quolibet A H, H B, circuli cujus diameter, A B, est ad horizontem perpendicularis, æquale est tempori descensus per totam diametrum A B, ac præiudè tempora descensus per omnes chordas sunt æqualia; Cum enim angulus A H B, in semicirculo rectus sit, tempus descensus per A H, æquale est tempori descensus per A B, (78), & ducta H C, diametro A B, æquali & parallelâ junctâque C B, erit ob angulum H B C, rectum, tempus per H B, æquale tempori per H C, seu per A B.



83. Si corpus in curvâ immotâ incedit, vis quâ singula curvæ puncta premit, cum vi finitâ quâ moveitur corpus comparata, major non est quantitate infinitesimâ primî ordinis; vis seu celeritas quam in singulis curvæ punctis amittit, major non est quantitate infinitesimâ secundî ordinis; tandem vis seu celeritas per finitum curvæ arcum amissa major non est quantitate infinitesimâ primî ordinis, adeoque corpus in curvâ progreditur eadem celeritate finitâ ac si nihil omnino virtutis amitteret....

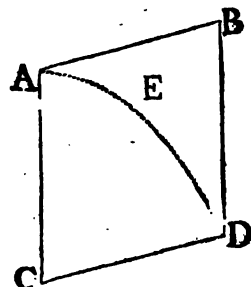


Dem. .... Curva quolibet, ut notum est, considerari potest tanquam polygonum A B C D, ex innumeris atque infinitis lateribus rectis A B, B C, C D, compositum, quorum duo quævis B C, C D,

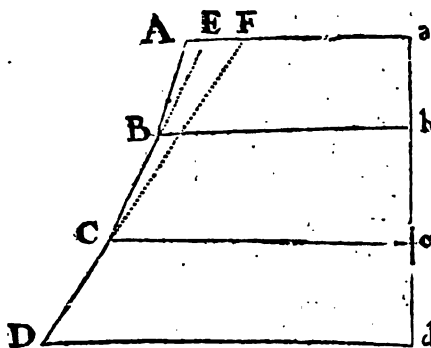
angulum comprehendunt à duobus angulis rectis, nonnisi quantitate infinitesimâ deficientem, ita ut producto latere C D, in E, angulus externus B C E, sit infinitesimus. Centro C, & radio C B, describatur semicirculus E B G L, ex puncto B versò demittatur in rectam E D, perpendicularis B K, & completo rectangulo K F, motus corporis latere B C, expositus, in binos B K, B F, seu K C, resolvitur (Coroll. 1. Newtoni). His positis manifestum est (51) vim seu celeritatem quâ corpus in latere C D, incurrit, illudque premit seu percutit, perpendiculari F G, five B K, repræsentari; celeritatem post ictum, (supponendo corpora esse elaterio destituta) rectâ K C, seu C H, exhiberi, & celeritatem ex impactu in C, amissam rectâ E K, exponi, cum E K, sit differentia rectarum B C, K C; hoc est, celeritatum ante & post impactum. Jam si angulus B C K, finitæ quantitatæ esset, recta B K, finitam haberet ad rectas B C, K C, rationem, quæ decrescente angulo B C K, semper minuitur adeoque infinitesima evadit, dum angulus B C K est infinitesimus; est igitur B K, seu vis quâ corpus curvâ premit in C, quantitas non major infinitesimâ primî ordinis; verum quia in circulo E K: B K = B K: K L, erit E K, quantitas infinitesima respectu B K, quemadmodum; ex demonstratis B K, infinitesima est respectu B C, aut K C, adeoque respectu K L; ergo celeritas seu vis in puncto C amissa non superat quantitatem infinitesimam secundî ordinis. Quare cum velocitas quam corpus per singula curvæ latera A B, B C, C D, amittit, non excedat quantitatem infinitesimam secundî ordinis; per latera curvæ numero infinita, hoc est, per arcum curvæ finitum, non potest celeritatem amittere majorem quantitate infinitesimâ primî ordinis quæ est summa quantitarum infinitesimarum secundî ordinis; eâ igitur quantitate neglectâ, corpus eodem modo motum suum in curvâ continuat ac si nihil virtutis amisset. Q. e. D.

AXIOMATA,  
SIVE  
LEGES  
MOTUS.

tes & tempora conjunctim; id est in duplicata ratione temporum. Et corpore sursum projecto gravitas uniformis vires imprimit & velocitates aufert temporibus proportionales; ac tempora ascendendi ad altitudines summas sunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ sunt ut velocitates ac tempora conjunctim: seu in duplicata ratione velocitatum. Et corporis secundum rectam quamvis projecti motus à projectione oriundus cum motu à gravitate oriundo componitur. Ut si corpus *A* motu solo projectionis dato tempore describere posset rectam *AB* & motu solo cadendi eodem tempore describere posset altitudinem *AC*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & corpus illud motu composito reperietur in fine temporis in loco *D*; & curva linea *AED*, quam corpus illud describet, erit parabola quam recta *AB* tangit in *A*, & cujus ordinata *BD* est ut *AB*q. Ab iisdem legibus & corollariis pendent demonstrata



de



84. Si grave ex quiete in *A*, per plana contigua *AB*, *BC*, *CD*, descendat, & flexus seu anguli *B*, *C*, motui non officiant, velocitas gravis per plana inclinata descendens, æqualis est velocitati quam lapsu perpendiculari haberet in pari ab horizonte distantia. Dem.... Ductis rectis *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, ho-

rizonti parallelis & perpendicularo, a *d*, demisso, producantur *CB*, *DC*, donec occurrant rectæ *Aa*, in *E* & *F*; velocitas lapsu per *AB*, acquisita æqualis est velocitati quæ acquireretur lapsu per *EB*, aut etiam per *AB*, (81), adeoque cum flexus *B*, motui non officiat (per hyp.) gravis motum suum per planum *BC*, eodem modo continuat, ac si ex puncto *E*, per planum unicum *EC*, descendisset; est igitur velocitas in *C*, æqualis velocitati lapsu perpendiculari per *a*, *c*, acquisita. Similiter ostenditur velocitatem in *D* æqualem esse velocitati in *d*. Q. e. D.

85. Augeatur planorum numerus, & singulorum longitudo minuat in infinitum ut linea *ABCD* curva evadat, & quia anguli *B*, *C*, *D*, velocitati corporis non officiant (83), manifestum est, gravis per curvam descendens velocitatem in singulis curvæ punctis *B*, *C*, *D*, æqualem esse velocitati lapsu perpendiculari acquisitæ in punctis correspondentibus *b*, *c*, *d*.

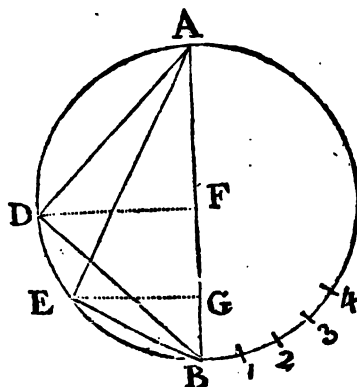
86. Si

de temporibus oscillantium pendulorum, suffragante horologio-  
rum experiētiā quotidianā: Ex his iisdem & lege tertiā *Chris-* AXIOMA-  
*tophorus Wrennus* Eques auratus, *Johannes Wallisus S. T. D.* & *Chris-* TA, SIVE  
*tianus Hugenius*, ætatis superioris geometrarum facile prin- LEGES  
cipes, regulas congressuum & reflexionum durorum corporum MOTUS.  
seorsim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Re-*  
*giā* communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino con-  
spirantes: & primus quidem *Wallisus*, deinde *Wrennus* & *Hu-*  
*genius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata est à *Wren-*  
*no* coram *Regiā Societate* per experimentum pendulorum: quod  
etiam

86. Si grave A descendat per curvam quamlibet ABCD, ductis lineis Aa, Bb, Cc, hori-  
zonti parallelis, & ex puncto curvæ infimo D, rectā DE, ad horizontem normali, patet (85) gravis per arcum AD, vel a D, descendens eandem esse velocitatem in punctis æquē altis B & b, C & c. Quare cum ex A, pervenit ad punctum infimum D, ex impetu per lapsum acquisito ascendit per arcum Da, ad punctum a, æquē altum, in quo omnis velocitas exinguitur, & in punctis correspondētib; B & b, C & c, eandem tam in ascensu quam in descensu habet velocitatem (26). Si verò arcus Da, arcui DA, similis & æqualis fuerit, singuli arcus æquē alti CD & Dc, BD & Db, AD & Da, æqualibus respectivē temporibus percurruntur (26).

87. Velocitas gravis per quemvis circuli arcum EB, descendens in puncto infimo B, est ad velocitatem quam lapsu perpendiculari per totam diametrum AB acquireret, ut chorda EB, ad diametrum AB ..... Dem ... Ductā EG, hori-  
zonti parallelā adeoque ad diametrum AB, perpendiculari, velocitas per arcum EB, acquisita, æqualis est velocitati acquisitæ per GB (85). Est ergo ad velocitatem per AB, acquisitam in ratione subduplicatā GB, ad AB (28.) Sed

Tom. I.



propter triangula rectangula similia AEB, BGE, GB: EB = EB: AB, adeoque EB, ad AB, in ratione subduplicatā GB ad AB; velocitas igitur per arcum EB, acquisita in B, est ad velocitatem per AB, acquisitam ut chorda EB, ad diametrum AB. Q. e. D.

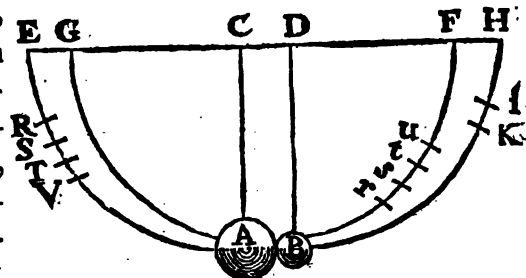
88. Coroll. Ductā quavis alterā chordā DB, erit etiam velocitas per arcum DB, acquisita in B, ad velocitatem per diametrum AB, ut DB, ad AB, ac proinde velocitates per arcus DB, EB, acquisitæ in puncto infimo B, sunt inter se ut horum arcuum chordæ; undè si capiuntur arcus B1, B2, B3, B4, quorum chordæ sint respectivē ut 1. 2. 3. 4. velocitas gravis per arcus illos descendētis in puncto B, erunt ut 1. 2. 3. 4.

G

89. Si

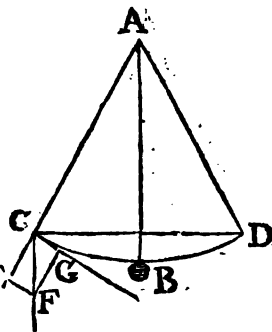


AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. etiam Clarissimus *Mariottus* libro integro exponere mox dignatus est. Verum, ut hoc experimentum cum theoriis ad amussim congruat, habenda est ratio, cum resistentiæ aëris, tum etiam vis elasticæ concurrentium corporum. Pendant corpora sphærica *A*, *B* filis parallelis & æqualibus *AC*, *BD*, à centris *C*, *D*. His centris &

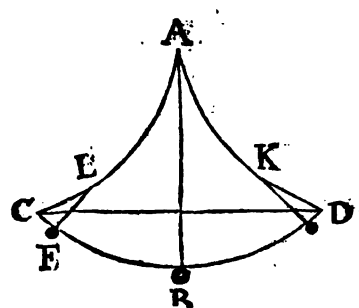


inter-

89. Si pendulum *B*, circa punctum fixum *A*, roteretur, & globus *B*, filo *AB*, appensus infertur puncti consideretur, arcum circuli *CB*, describet, idemque globo huic motus accideret ac si



in superficie sphærica immota & perfectè lævigatâ sublato filo volveretur. . . . *Dem.* . . . Ad punctum *C*, adducatur globus *B*, & exinde demittatur; & recta *CF*, horizonti perpendicularis vim gravitatis acceleratricem in perpendicularo exponat; ea vis resolvatur in duas vires, quarum una exhibetur rectâ *CE*, ad arcum seu tangentem in *C*, perpendiculari; altera verò tangente *CG*; vis *CE*, quâ filum *AC*, directè trahitur ad globi motum nihil confert & solâ vi ut *CG*, urgetur; arcus verò *CB*, considerari potest ut polygonum cuius laus unum in *C*, positionem habet tangentis *CG*, & si globus per planum *CG*, vi gravitatis urgeatur, sublato filo vis *CE*, plano *CG*, tota sustinetur, & globus solâ vi *CG*, ad motum in plano *CG*, sollicitatur. Cum igitur idem in omnibus punctis arcus *CB*, eodem modo demonstrari possit, patet filum *AC*, superficiem *CB*, vices subire, & in utroque casu motum globi per arcum *CB*, eadem ratione perfici. Q. e. D.



90. Coroll. 1. Pendulum *AB*, inter duas laminas curvas *ALC*, *AKD*, immotas & sese contingentes in *A*, ita oscilletur ut filum *AB*, in situ ad horizontem perpendiculari utramque laminam tangat in *A*; dum verò oscillatur pendulum, curvis laminis filum circumplicetur easque perpetuò tangat ut in *L* & *K*; per hanc fili ad laminas applicationem continuo impeditur motus penduli in circulo, aliamque curvam *CB*, describere cogitur; & eodem quo usi fuimus ratiocinio (89), demonstratur pendulum in hac curvâ eodem modo moveri ac si grave *B*, libere & absque filo per curvam immotam & perfectè lævigatam *CB*, incederet.

91. Coroll. 2. Quapropter omnia quæ de motu gravium in curvis superficiebus demonstrata fuere, motui penduli per easdem curvas oscillantis conveniunt. Nempe 1°. Penduli velocitas semper æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per altitudinem perpendiculararem arcui percurso correspondentem (85). 2°. Pendulum ex *C* demissum, vi gravitatis urgen-

# PRINCĪPIA MATHEMATICA. 51

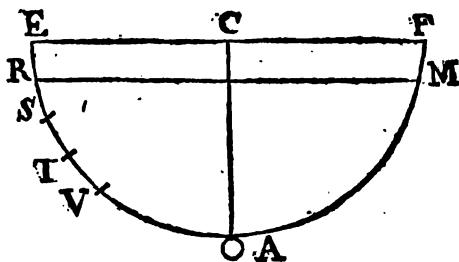
intervallis describantur semicirculi  $EAF$ ,  $GBH$  radiis  $CA$ , AXIOMA-  
 $DB$  bisecti. (b) Trahatur corpus  $A$  ad arcus  $EAF$  punctum  $TA$ , SIVE  
 quodvis  $R$ , & (subducto corpore  $B$ ) demittatur inde, re-  
 LEDES  
 deatque post unam oscillationem ad punctum  $V$ . Est  $R$   $V$  MOTUS.  
 retardatio ex resistantia aëris. Hujus  $R$   $V$  fiat  $S$   $T$  pars  
 quarta sita in medio; ita scilicet ut  $RS$  &  $TV$  æquen-  
 tur; sitque  $RS$  ad  $ST$  ut 3 ad 2. Et ista  $ST$  exhibebit re-  
 tardationem in descensu ab  $S$  ad  $A$  quam proximè. Restitua-  
 tur corpus  $B$  in locum suum. Cadat corpus  $A$  de puncto  $S$ ,  
 & velocitas ejus in loco reflexionis  $A$  sine errore sensibili tan-  
 ta erit, ac si in vacuo cecidisset de loco  $T$ . Exponatur igitur

te ad punctum infimum  $B$ , descendet, &  
 ex impetu concepto, per arcum  $BD$ , af-  
 cender ad eandem altitudinem  $D$ , ibique  
 omni velocitate amissa, vi gravitatis im-  
 pellente ad punctum infimum  $B$ , relabetur,  
 amissamque recuperans velocitatem fed-  
 bit ad punctum  $C$ , atque ita continuas  
 oscillationes ita & reditu in curvâ  $CBD$ ,  
 perficiet (86).

92. Coroll. 3. Si nulla foret medii re-  
 sistentia, nullaque circa laminas incurva-  
 tas aut centrum rotationis frictio, æquales  
 & perpetuæ forent pendulorum oscillatio-  
 nes; verum has ob causas singulis vibra-  
 tionibus, licet insensibiliter, minuitur pen-  
 duli velocitas, arcusque continuò brevior  
 res describit, ac tandem omninò quiescit.

93. Coroll. 4. Velocitates ejusdem  
 penduli in circuli peripheriam excurrentis,  
 sunt in puncto infimo ut arcuum de-  
 scriptorum chordæ (88).

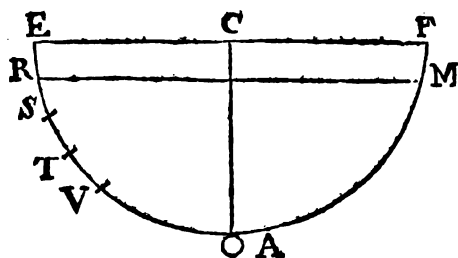
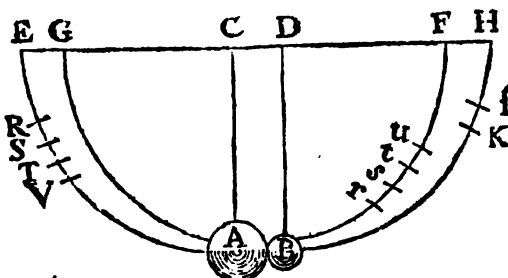
(b) 94. Trahatur corpus  $A$ , ad arcus  
 $EAF$ , punctum quodvis  $R$ , & demitta-  
 tur inde, sublatâ medii resistantiâ ad ean-  
 dem altitudinem  $M$ , ascendere & rursus  
 ad punctum  $R$ , redire debet (92). Cum  
 autem post unam oscillationem ex ita &  
 reditu compositam perveniat (ex hyp.)  
 ad punctum  $V$ , arcus  $RV$  exponet me-  
 dii retardationem in duplici ascensu &  
 descensu; quare ut habeatur medii retar-  
 datio in uno tantum descensu, sumenda est  
 quarta pars totius retardationis, id est quar-  
 ta pars arcus  $RV$ , dummodo ille des-



census neque ex puncto supremo  $R$ , neque  
 ex infimo  $V$  ordiatur: nam cum major sit  
 medii retardatio in arcu majori quam in  
 minori, semperque fiant minores arcus à  
 pendulo oscillante descripti, inæquales  
 quoque erunt retardationes in singulis  
 arcibus, & retardatio descensus per  $RA$ ,  
 major erit quartâ parte totius retardatio-  
 nis  $RV$  ut retardatio ultimi ascensus  $AV$ ,  
 minor erit quartâ parte totius retardatio-  
 nis  $RV$ . Hoc autem aut simili calculo  
 determinavit *Newtonus* punctum  $S$  tale ut  
 retardatio in descensu per  $SA$  sit quar-  
 ta pars totius retardationis  $RV$ . Dica-  
 tur arcus  $RA$ , 1, arcus  $RV$ , 4  $b$ , arcus  
 quæsitus  $SA$   $x$ ; sintque retardationes ar-  
 cubus descriptis proportionales, erit arcus  
 $SA$  ( $x$ ) ad arcum  $RA$  (1) ut retardatio  
 arcus  $SA$  quæ statuitur esse  $b$ , seu quarta  
 pars totius  $RV$ , ad retardationem primi ar-  
 cus  $RA$  quæ erit  $b : x$ . Quærantur succes-

AXIOMA- tur hæc velocitas per chordam arcus  $TA$ . Nam velocitatem  
 TA, SIVE penduli in puncto infimo esse ut chordam arcûs, quem caden-  
 LEGES do descripsit, propositio  
 MOTUS. est geometris notissima.

Post reflexionem perveniat corpus  $A$  ad locum  $s$ , & corpus  $B$  ad locum  $k$ . Tollatur corpus  $B$  & inveniatur locus  $v$ ; à quo si corpus  $A$  demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum  $r$ ; sit  $st$  pars quarta ipsius  $rv$  sita in medio, ita videlicet ut  $rs$  &  $tv$  æquantur; & per chordam arcus  $tA$  exponatur velocitas, quam corpus  $A$  proxime post reflexionem habuit in loco  $A$ . (c) Nam  $t$  erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus  $A$ , sublatâ aeris resistentiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus  $k$ , ad quem corpus  $B$  ascendit, & inveniendus locus  $l$ , ad quem corpus illud ascen-



siæ retardationes secundi, tertii, quartæ arcus eadem ratione; arcus autem secundus est æqualis primo  $RA$ , dempta ejus retardatione  $b:x$ . Tertius arcus æqualis secundo dempta ejus retardatione, & sic deinceps, omnes verò illæ retardationes simul sumptæ æquabuntur toti retardationi  $RV$  seu  $4b$ ; unde fit æquatio ex qua valor arcus  $SA$ , seu  $x$ , obtinebitur, per approximationem autem invenietur æqua-

lis  $1\frac{3}{2}b$ , sumatur itaque  $RS$  æqualis quartæ parti cum ejus semisse totius retardationis  $RV$ , retardatio per arcum  $SA$  erit æqualis  $ST$  quartæ parti totius retardationis  $RV$ , ideòque cadat corpus ex puncto  $S$ , ejus celeritas in  $A$  eadem est sine errore sensibili, ac si in vacuo decidisset ex  $T$ .

(c) 95.  $t$ , (fig. *News.*), erit locus verus & correctus ad quem corpus  $A$ , sublatâ aeris resistentiâ ascendere debuisset; nam corpus  $A$ , ex  $t$ , in medio non resistente descendens, in puncto infimo  $A$ , eam haberet velocitatem quâ posset arcum  $At$ , ascendendo describere (91), & quâ ob aeris resistentiâ, nonnisi arcum  $As$ , (94) percurreret, ergò cum post reflexionem ascendat ad  $s$ , eam habet in  $A$  velocitatem, quâ in medio non resistente ad punctum  $t$  ascenderet,

ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, AXIOMATA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.  
perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus  $A$  (ut ita dicam) in chordam arcûs  $TA$ , quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco  $A$  proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcus  $tA$ , ut habeatur motus ejus in loco  $A$  proxime post reflexionem. Et sic corpus  $B$  ducendum erit in chordam arcûs  $Bl$ , ut habeatur motus ejus proximè post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem remtentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, putà pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directè occurrerant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem semper esse æquales. Ut si corpus  $A$  incidebat in corpus  $B$  quiescens cum novem partibus motûs, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus  $B$  resilliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant,  $A$  cum duodecim partibus &  $B$  cum sex, & redibat  $A$  cum duabus; redibat  $B$  cum octo, factâ detractiōe partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius  $A$  subducantur partes duodecim & restabit nihil: subducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & sic de motu corporis  $B$  partium sex subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam,  $A$  velocius cum partibus quatuordecim, &  $B$  tardius cum partibus quinque, & post reflexionem pergebat  $A$  cum quinque partibus; pergebat  $B$  cum quatuordecim, facta translatione partium novem de  $A$  in  $B$ . Et sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex summâ motuum conspirantium & differentiâ contrariorum colligebatur. Nam er-

**AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.** Motum digiti unius & alterius in mensuris tribuerim difficultati peragendi singula satis accuratè. Difficile erat, tum pendula simul demittere sic, ut corpora in se mutuo impingerent in loco infimo *AB*; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ corpora ascendebant post concursum. Sed & in ipsis corporibus pendulis inæqualis partium densitas, & textura aliis de causis irregularis, errores inducebant.

Porro ne quis objiciat regulam, ad quam probandam inventum est hoc experimentum, præsupponere corpora vel absolute dura esse, vel saltem perfectè elastica, cujusmodi nulla reperiuntur in compositionibus naturalibus; (<sup>d</sup>) addo quod experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum à conditione duritiei neutiquam pendencia. Nam si regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda est, debet solummodo reflexio minui in certâ proportionem pro quantitate vis elasticæ. In theoriâ *Wrenni* & *Hugenii* corpora absolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congressûs. (<sup>e</sup>) Certius id affirmabitur de perfectè elasticis. (<sup>f</sup>) In imperfectè elasticis velocitas reditûs minuenda est simul cum vi elasticâ; propterea quod vis illa, (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub

(<sup>d</sup>) 96. Experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus & non elasticis æquè ac in duris & elasticis, ut potè non à conditione duritiei & elasticitatis, sed tantum ab actionis & reactionis æqualitate & oppositione pendencia; nam si regula illa in corporibus non perfectè elasticis tentanda est, ut ex ipsorum motibus antè conflictum inveniantur motus post conflictum, debet solummodò reflexio minui in certâ proportionem, pro quantitate vis elasticæ (52).

(<sup>e</sup>) 97. Certius id affirmabitur de perfectè elasticis; corpora enim perfectè dura, seu quorum partes nullâ vi finitâ separari aut flecti possunt, nullâ quoque vi restitutivâ aut repulsivâ pollere videntur; adeoque cum nihil sine causâ fiat, corpo-

rum perfectè durorum concurrentium nulla videtur esse posse reflexio.

(<sup>f</sup>) 98. In imperfectè elasticis, velocitas reditûs minuenda est cum vi elasticâ, propterea quod vis illa, licet imperfecta, certa tamen ac determinata est, in iisdem corporibus, nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur; dum enim corporis elastici fibræ ex ictu flectuntur, si aliqua abruptatur fibra, ea non sese restituit, adeoque vis corporis restitutiva minuitur; si verò fibræ extendantur, ut ferri lamina repetitis mallei ictibus in longum diducitur, pars ictûs huic fibrarum extensioni adhibita, vi restitutivæ detrahatur. His causis addi potest instantinus partium corporis percussus motus sono

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

55

sub malleo patiuntur, ) certa ac determinata sit ( quantum sen-  
tio ) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate  
relativâ , quæ sit ad relativam velocitatem concursus in datâ  
ratione. Id in pilis ex lanâ arctè conglomeratâ & fortiter con-  
strictâ sic tentavi. Primum demittendo pendula & mensuran-  
do reflexionem, inveni quantitatem vis elasticæ; deinde per  
hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, &  
respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem  
cum velocitate relativâ, quæ esset ad velocitatem relativam  
concursus ut 5 ad 9. circiter. Eâdem fere cum velocitate re-  
dibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore: in  
vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto  
lex tertia quoad ictus & reflexiones per theoriam comprobata  
est, quæ cum experienciâ plane congruit.

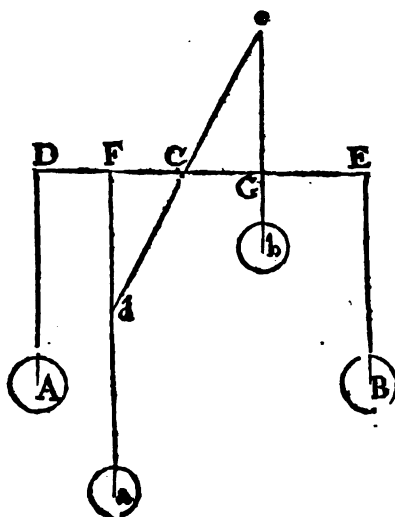
AXIOMA-  
TA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

In

Sono ipso satis indicatus, quæ in reflexio-  
nem non impenditur. Hæc materia va-  
riis Rizzeti experimentis illustratur in  
*Commentariis Institui Bononiensis*. Tria  
globulorum vitreorum paria sibi paravit  
Rizzetus; globuli primi paris diametrum  
habebant trium unciarum, secundi dua-  
rum, tertii unius, ita ut essent diverso-  
rum parium diametri inter se, ut 3. 2. 1.  
Fecit ut globuli primiparis filo appensi si-  
mul congregarentur, notavitque velocita-  
tem respectivam quam habuerunt vel an-  
te vel post ictum, detractâ tamen, more  
*Newtoniano*, aëris resistentiâ; idemque ten-  
tavit tum in 2°. tum in 3°. pari. In 1°.  
globulorum pari cum velocitas respectiva  
ante ictum fuisset 11, fuit post ictum 10;  
in 2°. pari cum fuisset ante ictum 16,  
fuit post ictum 15; in 3°. pari cum fuisset  
ante ictum 31, fuit post ictum 30.  
Unde velocitatis respectivæ defectus erat  
in primo pari 1: 11; in 2°. pari 1: 16.  
in 3°. pari 1: 31; illi autem defectus  
sunt ferè diametris 3, 2, 1. proportiona-  
les. Aliud experimentum tentavit Rizzo-  
tus. Chordam calybeam duos pedes lon-  
gam horizontaliter positam variis modis  
tendebat, donec tandem repererit tres  
chordæ tensiones, quæ efficerent ut tem-  
pora quibus chorda pulsa sese restituebat,

forent ut 3. 2. 1. Eas autem tensiones  
se affecurum esse, ex graviore vel acutio-  
ri chordarum sono intelligebat; in singu-  
lis tensionibus globum eburnæum cujus  
diameter erat duarum unciarum, filo de-  
cem pedes longo appensum & in medio  
tantisper complanatum in chordam de-  
mittebat, & detractâ aëris resistentiâ, ve-  
locitatem respectivam ante & post ictum  
notabat. Observavit autem velocitatem  
ante ictum esse ad velocitatem post ictum,  
ut 11, ad 10, in 1â tensione, cum chor-  
da pulsa restitueretur tempore 3; ut 16  
ad 15 in 2â tensione, cum chorda resti-  
tueretur tempore 2; tandem ut 31, ad  
30, in 3â tensione, cum chorda restitue-  
retur tempore 1; unde concludit defe-  
ctus singulos velocitatis post ictum, tem-  
poribus restitutionum esse proportionales.  
Manente igitur corporum homogeneorum  
magnitudine & figurâ, constans observatur  
ratio velocitatis respectivæ post ictum ad  
velocitatem respectivam ante ictum; sed  
mutatâ magnitudine, experimenta Rizzeti  
ostendunt defectus velocitatis respectivæ  
post ictum in globis homogeneis esse in  
ratione diametrorum, aut etiam in ratio-  
ne temporum quibus globi compressi res-  
tituuntur.

**AXIOMA** - dum & impediendum, si sunt reciproce ut velocitates partium  
**TA, SIVE** rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuò. (1) **Vis**  
**LEGES** cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium  
**MOTUS.** circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi



seu, quod idem est, duo pondera ope machinæ cujuscvis datæ in se mutuò ita agant, ut pondus unum secundum propriam directionem moveri nequeat, quin pondus alterum contrâ propriam illius directionem rapiat; si loco machinæ datæ substituatür vectis cujus longitudo & hypomoclion talia sint, ut duo pondera data, vectis extremitatibus appensa, eadem celeritate ac in machinâ datâ sese mutuò moveant, iidem erunt in vecte & in machinâ datâ conatus ponderum in se mutuò, eadem ipsorum momenta; vis enim eadem requiritur ad eandem velocitatem secundum eandem directionem in iisdem corporibus producendam. Itaque vectis DE, horizontalis, cum appensis ponderibus A & B, rotetur circa hypomoclion C, ut situm d e, obineat, & producatür filum a d, usque ad F; pondus A, secundum propriam directionem percurrit spatium F d; & pondus B, contrâ propriam directionem eodem tempo-

re percurrit spatium G e; adeoque horum ponderum velocitates sunt semper ut spatia F d, G e, eodem tempore percurra. Momentum ponderis a, est ut  $a \times F C$ ; momentum ponderis b, est ut  $b \times C G$  (47). Sed ob similitudinem triangulorum FCD, e CG;  $FC : CG = Fd : Ge$ . Ergo momenta ponderum a & b, sunt inter se ut  $a \times Fd$ , &  $b \times Ge$ ; seu sunt ut facta ex ponderibus in sua respective spatia eodem tempore percurra, adeoque etiam ut facta ex ponderibus in suas respective velocitates; quare si facta illa æqualia sint, aut quod idem est, si pondera seu vires sint reciproce ut velocitates secundum directiones virium æstimatæ, erit æquilibrium. Q. e. D.

101. *Coroll.* Cum ex demonstratis, momenta virium sint semper ut facta ex vi quâlibet in suam velocitatem, seu in spatium quod dato tempore secundum propriam directionem ex dispositione machinæ percurrere debet, omnium machinarum vires metiri licet.

(1) 102. Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Nam si resistentia corporis comprimendi ut pondus movendum consideretur, erit (101) momentum vis manubrium circumagentis, ut factum ex vi illâ in suam velocitatem, & momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ in suam quoque velocitatem; ut ergo sit æquilibrium, debet esse resistentia ad vim manûs, ut circularis velocitas manûs ad velocitatem resistentiæ, sive ad velocitatem progressivam cochleæ; aut quia manus describit circulum cujus radius est manubrii longitudo, & centro cochleæ usque ad manum sumpta, dum interea cochleæ per altitudinem seu distantiam duarum helicum progreditur, vis cochleæ ad premendum corpus erit ad vim manûs manubrii

à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. ( <sup>k</sup> ) Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis à malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium.

AXIOMATA, SIVE  
LEGES  
MOTUS.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam resistantiam vi datâ superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & resistantis sint reciprocè ut vires; agens resistantiam sustinebit: & majori cum velocitatum disparitate ( <sup>l</sup> ) eandem vincet. Certè si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistantia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsiione & elevandorum ponderibus oriri solet; superatâ omni eâ resistantiâ, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum mechanicam tracta-

re

nubrium circumagentis ut peripheria circuli prædicto radio descripti ad distantiam duarum helicum.

( <sup>k</sup> ) 103. Momentum cunei est ut factum ( 101 ), ex vi impressâ à malleo in cunei velocitatem, seu in spatium quod dato tempore percurrit cuneus secundum directionem vis à malleo impressæ; momentum verò resistantiæ ligni cuneo findendi est ut factum ex illâ resistantiâ in velocitatem, quâ partes ligni cedunt cuneo secundum lineas faciebus cunei perpendiculares, juxta quarum directionem partes ligni à cuneo moventur; est etiam momentum resistantiæ ut factum ex resistantiâ ligni in spatium quod partes ligni dato tempore describunt, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Quoniam igitur cuneus agens secundum lineam basi

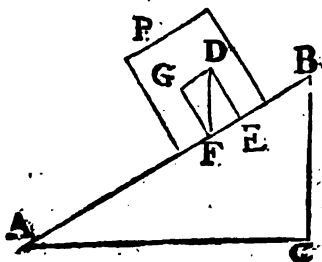
ipsum perpendicularem; totam suam altitudinem percurrit, dum partes ligni totâ basis cunei latitudine à se invicem remonentur, erit ( in casu æquilibrii ) vis cunei ad ligni resistantiam, ut cunei altitudo ad latitudinem ipsius basis.

( <sup>l</sup> ) 104. Attritionem seu frictionem, aliasque resistentias ex crassitie, rigiditate & funium flexione ortas in machinis considerare necessum est, graves alioquin in praxi errores nascerentur.

Hanc difficilem materiam *Sturmius*; *Leibnizius*, *Amontoni*, *Parenius*, *Lamirius* & alii tractarunt. *Bulfingerus* Tom. 20. Comment. *Acad. Petropol.* ad tentandam experimentis frictionum mensuram duo proponit theoremata quæ ob eorum facilitatem & usum hic exscribere non abs re erit.



**AXIOMA** re non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere, quā-  
**TA, SIVE** latè pateat quāmq̃ue certa sit lex tertia motus. Nam si æsti-  
**LEGES** metur agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & si-  
**MOTUS.** militer resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium  
 singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritio-  
 ne, cohæsione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt ac-  
 tio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem sem-  
 per



Suprà horizontem A C, experimento-  
 sæpius instituto, eleveur planum A B,  
 ad angulum B A C, ita ut si corpus pla-  
 no A B, ad hunc angulum elevato im-  
 ponatur, tantum non descendat; descen-  
 dat autem si angulus nonnihil augeatur:  
 & hæreat cum aliqua adversus descensum  
 renitentia, si angulus minuatur. Hic an-  
 gulus dicitur angulus quietis, eoque in-  
 vento sic inferatur.

Uti sinus totus ad sinum rectum anguli  
 quietis, ita pondus absolutum P, ad fric-  
 tionem ejus super plano ad prædictum an-  
 gulum inclinato. Atque iterum.

Uti Radius ad tangentem anguli quie-  
 tis, ita pondus absolutum P, ad fric-  
 tionem ejus super plano horizontali, cum  
 trahitur in directione ad horizontem paral-  
 lelâ .... *Dem...* Linea DF, horizonti  
 perpendicularis, pondus absolutum P, seu  
 vim totam quâ corpus in perpendiculo des-  
 cendere nititur, exponat; & ductâ DE, ad  
 planum A B, normali; vis DF, in binas  
 vires nempe D E, plano perpendicula-  
 rem, & E F, seu D G, plano parallelam

resolvitur (41); vis D E, à plano A B,  
 etiam perfectè lævigato tota sustinetur, &  
 solâ vi D G, seu E F, pondus P, nititur  
 juxta plani directionem descendere; Cum  
 igitur ob frictionem in plano aspero A B,  
 tantum non descendat, erit frictio æqua-  
 lis vi E F; est itaque pondus absolutum  
 P, ad frictionem ejus super plano incli-  
 nato A B, ut D F, ad E F, hoc est, ob  
 angulum E rectum & angulum F D E  
 æqualem angulo quietis B A C, ut sinus  
 totus ad sinum anguli quietis. Q. erat  
 1<sup>um</sup>.

Jam ut idem transferatur ad planum ho-  
 rizontale, debet vis D E, plano perpendi-  
 cularis, considerari ut pondus absolutum,  
 & ita planum A B, se habebit ut planum  
 horizontale respectu ponderis D E; vis  
 autem F E, seu frictio considerata est  
 tanquam vis in æquilibrio constituta cum  
 vi æquali trahente pondus D E, secundum  
 directionem plano A B, parallelam; &  
 ob triangulorum F D E, B A C, simili-  
 tudinem, manifestum est pondus D E, es-  
 se ad frictionem E F, seu pondus abso-  
 lutum in plano horizontali horizontali-  
 ter tractum, esse ad frictionem ejus, ut  
 Radius ad tangentem anguli quietis. Q.  
 erat 2<sup>um</sup>.

105. *Coroll.* In his duobus casibus;  
 frictiones, cæteris omnibus paribus, sunt  
 pressionibus proportionales; nam frictio  
 in plano inclinato dicatur f; in plano ho-  
 rizontali F, & erit per 1<sup>um</sup> theor.  $P : f = A B : B C$ ; & per 2<sup>um</sup> theorema  
 $B : F = A C : B C$ , seu  $F : P = B C : A C$ ; adeoque per compositionem ratio-  
 num  $P : f = A B : A C = F D : D E$ ; hoc est, frictio in plano horizon-  
 tali

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 61

per æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum, **AXIOMATA, SIVE**  
 & ultimo imprimatur in corpus omne resistens, ejus ultima **LEGES**  
 determinatio determinationi reactionis semper erit contraria. **MOTUS.**

ali est ad frictionem in plano ad angu- no horizontali ad pressionem in plano in-  
 lam quietis inclinato, ut pressio in pla- clinato.



MOTU CORPORUM  
LIBER PRIMUS.

## S E C T I O I.

*De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.*

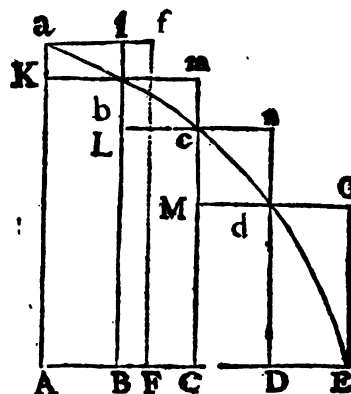
## L E M M A I.

*Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quàm pro datâ quavis differentiâ, sunt ultimò æquales.*

**S**I negas; fiant ultimò inæquales, & sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ *D*: contra hypothesin.

## L E M M A II.

*Si in figurâ quâvis A a c E, rectis A a, A E & curvâ a c E comprehensâ, inscribantur parallelogramma quocunque A b, B c, C d, &c. sub basibus A B, B C, C D, &c. æqualibus, & lateribus B b, C c, D d, &c. figuræ lateri A a parallelis contenta; & compleantur parallelogramma a K b l, b L c m, c M d n, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuat, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta A K b L c M d D, circumscripta A a l b m c n d o E, & curvilinea A a b c d E, sunt rationes æqualitatis.*



Nam

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

63

Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum  $Kl$ ,  $Lm$ ,  $Mn$ ,  $Do$ , hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi  $Kb$  & altitudinum (\*) summa  $Aa$ , id est, rectangulum  $ABla$ . Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus  $AB$  in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per lemma 1) figura inscripta & circumscripta, & multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimò æquales. *Q. E. D.*

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.

## LEMMA III.

*Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , &c. sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim  $AF$  æqualis latitudini maximæ, & compleatur paralle-

(\*) 106. Si fuerint quocumque & cujusvis generis quantitates decrescientes,  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ , erunt omnium differentiarum simul sumptæ æquales excessui maximæ supra minimam. Nam perspicuum est  $Aa - Bb + Bb - Cc + Cc - Dd = Aa - Dd$ : unde si ultima seriei quantitas sit 0, ut in serie  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ , 0, summa differentiarum  $Ka + Lb + Mc + Dd$ , æqualis erit quantitati maximæ  $Aa$ .

107. Linea  $Bb$ , motu sibi semper parallelo accedat ad lineam  $Aa$ , & interim punctum  $b$ , ita moveatur in linea  $Bb$ , ut semper reperiarur in arcu  $ba$ ; decrescente linearum  $Aa$ ,  $Bb$ , distantia  $AB$ , decrescit quoque earum differentia  $Ka$ , ac tandem evanescente  $AB$ , evanescit  $Ka$ , &  $Bb$ , seu  $AK$ , fit ultimò æqualis lineæ  $Aa$ ; evanescunt autem  $AB$  &  $Ka$ , cum lineæ  $Aa$ ,  $Bb$ , neque distantes, neque prorsus congruentes dici possunt, sed simul, ut ita dicam, conjungi incipiunt. In illo statu evanescentiæ, linearum  $Aa$ ,  $Bb$ , differentia  $Ka$ , minor est quavis lineâ datâ, seu infinitè parva est, aut inassignabilis respectu  $AK$  &  $Bb$ ; quantitas autem evanescens, seu infinitè parva, est ad

quantitatem finitam ut finitum ad infinitum; quare cum notum sit infinitum ex finiti additione vel subtractione non mutari, aut tanquam immutatum haberi posse, liquet lineas  $Bb$  seu  $AK$  &  $Aa$ , seu  $AK + Ka$ , pro æqualibus posse usurpari. Similiter, quia evanescente  $Ka$ , trianguli  $Kab$ , & parallelogrammi  $Kl$ , areæ infinitesimæ sunt respectu parallelogrammi evanescentis  $Ab$ , parallelogrammum istud  $Ab$ , usurpari potest pro parallelogrammo  $Al$ , aut etiam pro figurâ  $ABba$ , hoc est, pro differentia arearum curvilinearum  $A Eca$ ,  $B Ecb$ .

108. Ex his sequitur diversos esse infinitesimorum ordines; nam ostensum est (107) parallelogrammum  $Kl$ , infinitesimum esse respectu parallelogrammi  $Ab$ , hoc verò parallelogrammum infinitesimum esse respectu areæ curvilinæ  $A Eca$ .

109. Figurâ  $A Eca$ , circa axem suum  $AE$ , revolvatur, & quolibet ordinata  $Aa$ ,  $Bb$ , describet circulum, cujus est ordinata ipsa radius, quodlibet rectangulum evanescens ut  $KB$ ,  $aB$ , describeret cylindrum evanescentem, & rectangula,  $Kl$ ,  $Lm$ ,  $Mn$ ,  $Do$ , singula describent annulos solidos, quorum summa æqualis erit

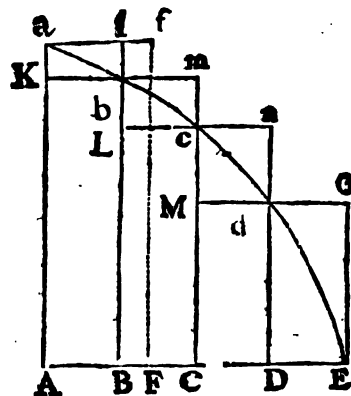
DE MOTU CORPORUM. §1. *Parallelogrammum  $F A a f$ . (<sup>n</sup>) Hoc erit majus quàm differentia figuræ inscriptæ & figuræ circumscriptæ; at latitudine suâ  $A F$  in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. Q. E. D.*

*Corol. 1.* Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

*Corol. 2.* Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum  $a b$ ,  $b c$ ,  $c d$ , &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

*Corol. 3.* Ut & figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

*Corol. 4.* (<sup>o</sup>) Et propterea hæ figuræ ultimæ ( quoad perimetros  $a c E$ , ) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.



### LEMMA IV.

*Si in duabus figuris  $A a c E$ ,  $P p r T$ , inscribantur ( ut supra ) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ*

*erit cylindro ex rotatione rectanguli  $A I$  descripto. Quare cum hic cylindrus sit infinitesimus, patet ( per lemma 1. ) ultimam rationem solidi ex cylindris omnibus compositi ad solidum ex rotatione figuræ curvilineæ  $A E c a$ , genitum esse rationem æqualitatis.*

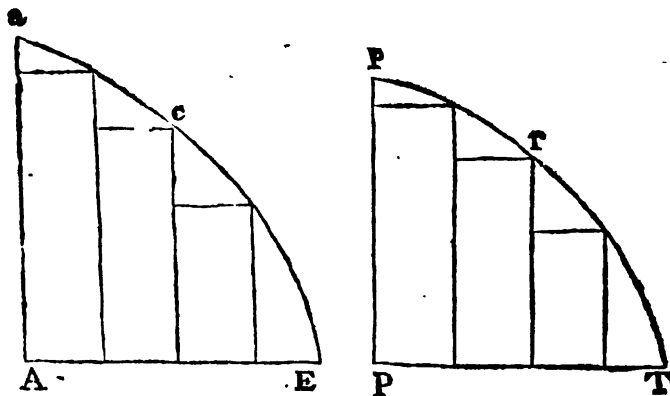
(<sup>a</sup>) 110. Nam si singulorum parallelogrammorum latitudo æqualis esset lineæ  $A F$ , figuræ inscriptæ & figuræ circumscriptæ differentia foret parallelogrammum  $A f$ , ( lem. 11. ); cum igitur singulorum parallelogrammorum latitudo minor sit latitudine  $A F$ , ( ex hyp. ) prædicta figu-

rarum differentia minor quoque est parallelogrammo  $A f$ .

(<sup>o</sup>) 111. Propterea hæ figuræ ultimæ ( quoad perimetros  $a c E$  ) non sunt rectilineæ, seu non sunt ex lateribus rectis quocumque numero finito compositæ, sed sunt figurarum rectilinearum quarum latera numero augentur & longitudine minuuntur in infinitum, limites curvilinei. Dum enim ordinarum  $A a$ ,  $B b$ , ac proinde chordarum  $a b$ ,  $b c$ , numerus in infinitum augetur, & distantie  $AB$ ,  $BC$ , in infinitum minuuntur, puncta  $a$ ,  $b$ ,  $K$ ,  $l$ , &  $b$ ,  $c$ ,  $L$ ,  $m$ , &c. occurrunt & curvam  $a c E$  formant.

rimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma DE MO-  
in alterâ, singulorum ad singula, sint eadem; dico quod fi- TU COR-  
guræ duæ A a c E; P p r T, sunt ad invicem in eâdem illâ PORUM,  
ratione. LIBER  
PRIMUS.

§1.



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula; ita ( componendo ) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad figuram; existente nimirum figurâ priore ( *per lemma III* ) ad summam priorem, & figurâ posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. Q. E. D.

*Corol.* Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam si in lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est ( *per hypothefin* ) in ultimâ ratione partis ad parrem.

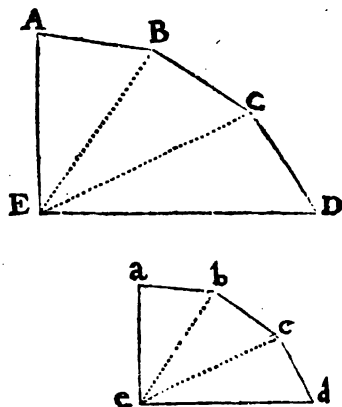
DE MO-  
TU COR-  
PORUM,  
LIBER  
PRIMUS.

§1.

# LEMMA V.

*Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areae sunt in duplicata ratione laterum. (P).*

L E M-



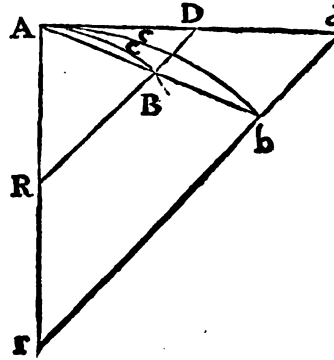
(P) 112. *Demonstr.* . . . . Duxæ figuræ, ADE, ade, similes dicuntur, quarum latera omnia sibi mutuo respondentia, ut AB, ab, BC, bc, proportionalia sunt, & angulos æquales, ut  $\angle ABC, \angle abc$ , continent; unde jam patet summas laterum utriusque figuræ esse inter se ut duo quævis latera correspondentia AB, ab. Ductis ex E, & e, ad omnes angulos lineis EB, EC, eb, ec, figuræ in sua

triangula dividantur; & quoniam anguli D & d, æquales sunt, lateraque ED, ed, DC, dc, proportionalia, (*per definit.*), duo triangula ECD, ecd, erunt similia, adeoque anguli ECD, ecd, æquales, & latera EC, ec, lateribus CD, cd proportionalia; quare cum anguli BCD, bcd sint etiam æquales (*per definit.*), æquantur quoque anguli ECB, ecb, & quia  $BC:bc = CD:cd = EC:ec$ , triangula duo EBC, ebc similia erunt. Idem eadem ratione de aliis triangulis EBA, eba demonstratur. Verum areae singulorum triangulorum similium, quæ in duabus figuris sibi mutuo respondent, sunt inter se in duplicatâ ratione laterum homologorum, ac proinde in datâ ratione; ergo summæ triangulorum, in utraq; figurâ, hoc est, figurarum areae rationem habent laterum homologorum duplicatam. Jam numerus laterum AB, BC, &c. ab, bc, &c. augeatur, & eorum longitudo minuatur in infinitum, & (*per Cor. 4. Lem. III.*) figuræ ABCD, abcd, fiunt curvilineæ; similium igitur figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areae sunt in duplicatâ ratione laterum. Q. E. D.

LEMMA VI.

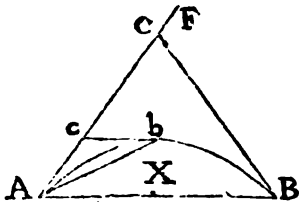
DE MOTU COR-  
PORUM,  
LIBER  
PRIMUS.  
§1.

Si arcus quilibet positione datus  $ACB$  subrendatur chorda  $AB$ , & in puncto aliquo  $A$ , in medio curvaturæ <sup>(1)</sup> continuæ, tangatur à rectâ utrinque productâ  $AD$ ; dein puncta  $A$ ,  $B$  ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus  $BAD$ , sub chordâ & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimò evanescet.



Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus  $ACB$  cum tangente  $AD$  angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum  $A$  non erit continua, contra hypothefin.

LEM-



(1) 113. Curva continua  $BA$ , considerari potest tanquam descripta motu puncti  $B$  continuò mutantis directionem suam quâ per rectam tangentem  $BC$ , progredi nititur. Unde si arcus  $AB$ , sit ubique versùs eandem partem  $X$ , cavus, semperque ducantur tangentes  $AF$ ,  $BC$ , sese intersectantes in  $C$ , accedente puncto  $B$ , ad  $A$ , anguli  $BCF$ ,  $BAC$ ,  $CBA$ , quos tangentes & chordæ complectuntur, continuò, non verò per saltum, decrescunt, & evanescunt chordâ  $Ab$ , evanescunt, atque

nulli fiunt, dum punctum  $b$ , idem omnino est cum puncto  $A$ . Necesse igitur est ob continuitatem decrementorum, ut angulus  $CAb$ , per omnes magnitudinis gradus inter angulum  $CAB$ , &  $0$ , seu nihilum medios transeat priusquam nullus omnino sit; quod generatim statuendum est de omnibus quantitativibus, quæ nascuntur & continuò crescunt, vel quæ continuò decrescunt & tandem evanescunt; non possunt enim continuò crescere vel decrescere, nec ab uno extremo ad alterum pervenire, quin per omnes gradus magnitudinis inter duo extrema medios transeant. Itaque inter tangentem  $AF$ , & chordam infinitesimam  $Ab$ , nulla duci potest linea recta, quæ angulum finitum cum chordâ vel tangente efficiat; ideoque inter arcum  $AB$ , & tangentem  $AF$ , nulla duci potest linea recta quæ arcum non secet.

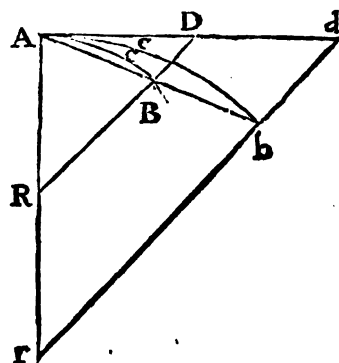


L E M M A . V I I .

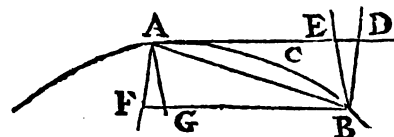
*Isdem positis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis  
ad invicem est ratio æqualitatis.*

51.

Nam dum punctum  $B$  ad punctum  $A$  accedit, intelligantur semper  $AB$  &  $AD$  ad puncta longinqua  $b$  ac  $d$  produci, & (†) secanti  $BD$  parallela agatur  $bd$ . Sitque arcus  $Ac b$  semper similis arcui  $ACB$ . Et punctis  $A, B$  coeuntibus, angulus  $dAb$ , per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ  $Ab, Ad$ , & arcus intermedius  $Ac b$  coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ  $AB, AD$ , & arcus intermedius  $ACB$  evanescunt, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*



*Corol. 1.* Undè si per  $B$  ducatur tangenti parallela  $BF$ , rectam quamvis  $AF$  per  $A$  transeuntem perpetuo secans in  $F$ , hæc  $BF$  ultimo ad arcum evanescentem  $ACB$  rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo  $AFBD$  rationem semper habet æqualitatis ad  $AD$ .



**Corol.**

(1) 114. Secans R D, supponitur semper efficere cum tangente A D & chordâ A B, angulos finitos, aut angulos ad quos angulus evanescens B A D, rationem habet infinitesimam; nam si anguli A B D, B A D, essent ejusdem ordinis infinitesimi, trianguli A B D latera finitima haberent inter se rationem. Angelus enim externus B D d, æqualis duobus internis oppositis D A B, D B A, esset ejusdem

ordinis cum illis angulis ; & quoniam in omni triangulo latera sunt ut finis angulorum oppositorum, latera  $AB$ ,  $BD$ ,  $AD$ , finitam rationem haberent finium angulorum ejusdem ordinis  $B D d$ ,  $D A B$ ,  $A B D$ ; cum autem anguli  $A$  &  $B$ , supponuntur infinitesimi , angulus  $A D B$  est obtusus, adeoque chorda  $AB$ , majori angulo opposita, ad tangentem  $A D$ , datam habebit majoris inequalitatis rationem.

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

69

*Corol. 2.* Et si per  $B$  &  $A$  ducantur plures rectæ  $BE$ ,  $BD$ ,  $AF$ ,  $AG$ , secantes tangentem  $AD$  & ipsius parallelam  $BF$ ; ratio ultima abscissarum omnium  $AD$ ,  $AE$ ,  $BF$ ,  $BG$ , chordæque & arcûs  $AB$  ad invicem erit ratio æqualitatis. DE MO-  
TU COR-  
PORUM,  
LIBER  
PRIMUS.

*Corol. 3.* Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

## LEMMATA VIII.

*Si rectæ datæ  $AR$ ,  $BR$  cum arcu  $ACB$ , chordâ  $AB$  & tangente  $AD$ , triangula tria  $RAB$ ,  $RACB$ ,  $RAD$  constituunt, dein puncta  $A$ ,  $B$  accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

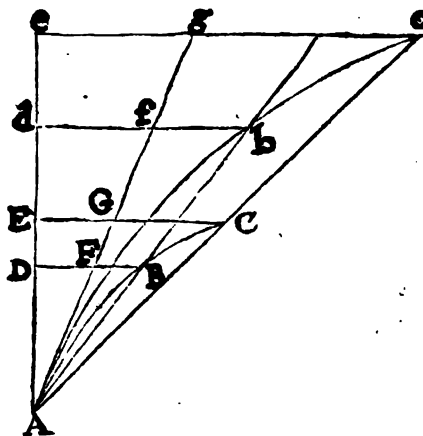
Nam dum punctum  $B$  ad punctum  $A$  accedit, intelligantur semper  $AB$ ,  $AD$ ,  $AR$  ad puncta longinqua  $b$ ,  $d$  &  $r$  produci, ipsique  $RD$  parallela agi  $rb$ , & arcui  $ACB$  similis semper sit arcus  $acb$ . Et coeuntibus punctis  $A$ ,  $B$ , angulus  $bAd$  evanescet, & propterea triangula tria semper finita  $rAb$ ,  $rAc$ ,  $rAd$  coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia  $RAB$ ,  $RACB$ ,  $RAD$  fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q. E. D.*

*Corol.* Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

## LEMMA IX.

Si recta  $AE$  & curva  $ABC$  positione datæ se mutuo secant in angulo dato  $A$ , & ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur  $BD$ ,  $CE$ , curvæ occurrentes in  $B$ ,  $C$ , dein puncta  $B$ ,  $C$ , simul accedant ad punctum  $A$ : dico quod areae triangulorum  $ABD$ ,  $ACE$  erunt ultimo ad invicem in duplicatâ ratione laterum.

Etenim dum puncta  $B$ ,  $C$  accedunt ad punctum  $A$ , intelligatur semper  $AD$  produci ad puncta longinqua  $d$  &  $e$ , ut sint  $Ad$ ,  $Ae$  ipsis  $AD$ ,  $AE$  proportionales, & erigantur ordinatæ  $db$ ,  $ec$  ordinatis  $DB$ ,  $EC$  parallelæ quæ occurrant ipsis  $AB$ ,  $AC$  productis in  $b$  &  $c$ . Duci intelligatur, tum curva  $Abc$  ipsi  $ABC$  similis, tum recta  $Ag$ , quæ tangat curvam utramque in  $A$ , & secet ordinatim applicatas  $DB$ ,  $EC$ ,  $db$ ,  $ec$  in  $F$ ,  $G$ ,  $f$ ,  $g$ . (†) Tum manente longitudine  $Ae$  coeant puncta  $B$ ,  $C$  cum puncto  $A$ ; & angulo  $cAg$  evanescente, coincident areae curvilineæ  $Abd$ ,  $Ace$  cum rectilineis  $Afd$ ,  $Age$ ; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum  $Ad$ ,  $Ae$ : Sed his areis proportionales semper sunt areae  $ABD$ ,  $ACE$ , & his lateribus latera  $AD$ ,  $AE$ . Ergo & areae  $ABD$ ,  $ACE$  sunt ultimo in duplicatâ ratione laterum  $AD$ ,  $AE$ . Q.E.D.



LEM-

(†) 115. Tum manente longitudine finitâ  $Ae$ , & mutatâ, si necessum fuerit, longitudine  $Ad$ , ut sit semper  $Ad : Ae$

$= AD : AE$ , coeant puncta  $B$ ,  $C$ , cum puncto  $A$ , &c.

LEMMA X.

DE MOTU CORPORUM,

*Spatia quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ describit, siue vis illa determinata & immutabilis sit, siue eadem continuò augeatur vel continuò diminuatur, sunt ipso motûs initio in duplicatâ ratione temporum.*

Exponentur tempora per lineas  $AD$ ,  $AE$ , & velocitates genitæ per ordinatas  $DB$ ,  $EC$ ; (1) & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ  $ABD$ ,  $ACE$  his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per lemma 1 x.) in duplicatâ ratione temporum  $AD$ ,  $AE$ . Q. E. D.

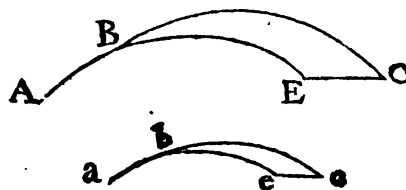
Corol. 1. (2) Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus descri-

(1) 116. Spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ  $ABD$ ,  $ACE$ , his ordinatis descriptæ.

Nam ductâ  $db$ , ipsi  $DB$ , infinite propinqua, ita ut  $Dd$ , sit infinitesima seu evanescens respectu  $AD$ ,  $AE$ , lineæ  $DB$ ,  $db$ , & rectangulum  $dmb$ , ac figura  $Ddbb$ , pro æqualibus respectivè usurpari possunt (107), aded ut per tempusculum infinitesimum;  $Dd$ , velocitas  $DB$ , tanquam uniformis haberi possit; spatium autem æquabili velocitate  $db$ , percursum, est ut factum ex velocitate  $db$ , & tempusculo  $Dd$ , (5), hoc est, ut rectangulum  $Dd \times db$ , seu ut area  $Ddbb$ ; si igitur areæ  $ACE$ ,  $ADB$ , in infinita numero atque infinitesima rectangula, ut  $dmb$ , divisæ concipiantur, erunt summæ spatorum percursum, seu spatia temporibus  $AE$ ,  $AD$ , percurfa, ut summæ horum rectangulorum, hoc est, ut areæ ipsæ  $ACE$ ,  $ADB$ , (Lem. III.)

117. Cor. Vis acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio considerari

potest, tanquam vis determinata & immutabilis. Spatia enim, quæ corpus urgente vi acceleratrice constante describit, sunt semper in duplicatâ temporum ratione (27); & contra, si spatia percurfa duplicatam habeant temporum rationem, vis acceleratrix constans est; nam si mutabilis esset vis, illa quoque temporum & spatorum proportio mutaretur. Ergo (Lem. X.) vis quælibet acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio tanquam immutabilis spectari potest.



(2) 118. Corpora duo  $A$  &  $a$ , curvas similes  $ABE$ ,  $abe$ , illarumque partes similes  $AB$ ,  $ab$ ,  $BE$ ,  $be$ , temporibus proportionalibus describant; duobus hisce corporibus, cum ad puncta  $B$  &  $b$ , pervenerint, accedunt novæ vires acceleratrices inter se æquales & similiter applicatæ, quæ prioribus viribus addux corpora deferant per arcus  $BC$ ,  $bc$ . Jungau-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM,  
LIBER  
PRIMUS.

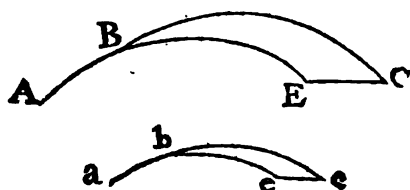
§1.

describentium errores, qui viribus quibuscvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distantias corporum à figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus sine viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

*Corol. 2.* (\*) Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

*Corol. 3.* (†) Idem intelligendum est de spatiis quibuscvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

*Corol. 4.* Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, descripta directè & quadrata temporum inversè. *Corol.*



gantur rectæ EC; ec, quæ errores solâ virium perturbantium actione genitos exponunt; Lineæ enim illæ sunt spatia solâ virium perturbantium actione descripta. Cum autem vires perturbantes supponantur æquales & similiter applicatæ, idem contingere debet ac si corpus aliquod eadem vi acceleratrice sollicitatum spatia EC, ec, diversis temporibus describeret, adeoque spatia illa sunt, ipso motus initio, ut quadrata temporum quibus percurruntur (*Lem. X.*) BC, bc, & quibus absque virium perturbantium actione percurrerentur arcus similes BE, be; si igitur vires illæ perturbantes supponantur constantes, spatia EC, ec, non solùm motus initio, sed & tempore finito descripta, erunt ut prædictorum temporum quadrata (27). Undè si admodum exigua sit virium perturbantium variatio, spatia seu errores erunt quam proximè ut quadrata temporum.

(\*) 119. Errores autem qui viribus proportionalibus, seu viribus in datâ ratione existentibus, ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim. Nam si tempora sunt eadem, errores sunt in datâ ratione virium; si vires sunt eadem, errores sunt in duplicata ratione temporum quibus generantur; cùm igitur vires & tempora variant, errores sunt in ratione compositâ ex datâ virium ratione & duplicatâ temporum.

(†) 120. Nam vires motus initio tanquam constantes haberi possunt (117); dupla autem spatia, adeoque simplicia spatia, quæ corpora urgentibus viribus constantibus describunt, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim (30); ergo spatia quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt, sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim. Si itaque vires acceleratrices, motus initio, sint G, g, spatia S, s, tempora T, t, erit  $S = GTT$ ;  $s = gtt$ , ideoque  $G : g = \frac{S}{TT} : \frac{s}{tt}$

S: G: s: g, hoc est, vires sunt ut spatia motus initio descripta directè & quadrata temporum inversè; Temporum verò quadrata, sunt ut descripta spatia directè & vires inversè.

*Corol. 5.* Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directe & vires inversè.

*Scholium.*

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directe vel inversè: sensus est, quod prior augetur vel diminuitur in eadem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciproca. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directe aut inversè: sensus est, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciproce augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directe & C directe & D inversè: sensus est, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum  $B \times C \times \frac{1}{D}$  hoc est, quod A &  $\frac{B \times C}{D}$  sunt ad invicem in ratione datâ.

LEMMA XI.

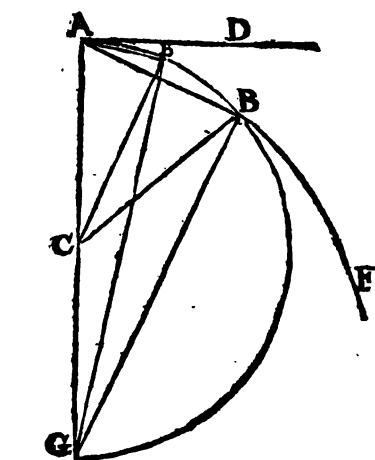
*Subtensa evanescens anguli contactus, in curvis omnibus (2) curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, est ultimo in ratione duplicatâ subtensæ arcus contermini.*

*Caf.*

(2) 111. Circuli curvatura est in omnibus circumferentiæ punctis eadem, seu uniformis; in variis autem circulis eo major est, quo minor est circuli radius, adeò ut circuli curvatura sit semper in ratione inversâ radii. Aliarum linearum curvatura in singulis punctis determinatur per curvaturam arcus circularis qui cum arcu infinitesimo curvæ in puncto dato congruit, seu, quod idem est, qui curvam in puncto dato osculatur. Est igitur linearæ cujuscvis in puncto dato curvatura inversè ut radius circuli curvam lineam in dato puncto osculantis.

Sumantur duo curvæ AF, puncta A & B, ducanturque rectæ AC, BC, ad curvam perpendiculares, & ex puncto intersectionis C, tanquam centro, radiis CA, CB, duo describantur circuli, quorum unus radio CA, descriptus tanget curvam in A, alter autem radio CB, descriptus tanget eam in B. Si ad se mutuò acce-

*Tom. I.*



dant puncta A & B, donec arcus AB evanescat, duæ perpendiculares AC, BC, pro æqualibus usurpari poterunt (*Lem. I*),

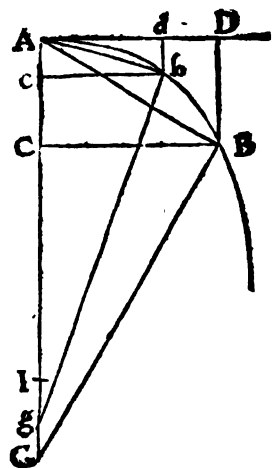
K

cop.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

§1.

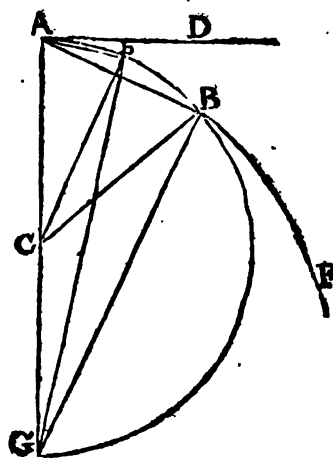
*Caf. 1.* Sit arcus ille  $AB$ , tangens ejus  $AD$ , subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis  $BD$ , subtensa arcus  $AB$ . Huic subtensæ  $AB$  & tangenti  $AD$  perpendiculares erigantur  $AG$ ,  $BG$ , concurrentes in  $G$ ; dein accedant puncta  $D$ ,  $B$ ,  $G$ , ad puncta  $d$ ,  $b$ ,  $g$ , sitque  $J$  intersectio linearum  $BG$ ,  $AG$  ultimo facta (\*) ubi puncta  $D$ ,  $B$  accedunt usque ad  $A$ . Manifestum est quod distantia  $GJ$  minor esse potest quam assignata quavis. Est autem (ex natura circularum per puncta  $ABG$ ,  $Abg$  transeuntium)  $AB$  quad. æquale  $AG \times BD$ , &  $Ab$  quad. æquale  $Ag \times bd$ ; ideoque ratio  $AB$  quad. ad  $Ab$  quad. componitur ex rationibus  $AG$  ad  $Ag$  &  $BD$  ad  $bd$ . Sed quoniam  $GJ$  assumi potest minor longitudine quavis assignatâ, fieri potest ut ratio  $AG$  ad  $Ag$  minùs differat à ratione æqualitatis quam pro differentiâ



quavis

conjungentur duo puncta contactus  $A$  &  $B$ , duoque circuli tangentes abibunt in unum  $ABG$ , qui curvam osculabitur in  $A$ , vel  $B$ , adeoque curvatura lineæ  $AF$ , in  $A$ , est in ratione inversâ radii  $AC$  circuli osculantis. Si ergo finitus sit radius osculi  $AC$ , finita quoque erit curvatura in  $A$ ; si vero radius sit infinitus, curvatura erit infinitesima; ac tandem si radius sit infinitissimus, curvatura erit infinita. Quoniam autem eo magis curva à tangente  $AD$  deflectit, quo circuli osculantis radius  $AC$  minor est, & contra, patet angulum contactus crescere & decrescere cum curvaturâ & in eadem ratione inversâ radii.

122. Ducantur chordæ  $AB$ ,  $BG$ ; angulus  $ABG$ , in semicirculo rectus est; ac proinde si in curvâ quâcumque curvaturam finitam in puncto aliquo  $A$  habente ducantur chordæ evanescèntes  $Ab$ ,  $AB$ , ad easque agantur perpendiculares  $BG$ ,  $bG$ , hæ lineæ convenient in puncto  $G$ , junctique punctis  $A$  &  $G$ , recta  $AG$  ad tangentem  $AD$  perpendicularis erit, & fini-



tam habebit magnitudinem; ut pote quæ æqualis est duplo radio finito  $AC$ , circuli curvam osculantis in  $A$ .

(\*) 123. Ubi puncta  $D$ ,  $B$ , accedunt usque ad  $A$ , linea  $AJ$  (122) est diameter circuli curvam  $A, b, B$  osculantis in





DE MOR-  
TU COR-  
FORUM;  
LIBER  
PRIMUS.

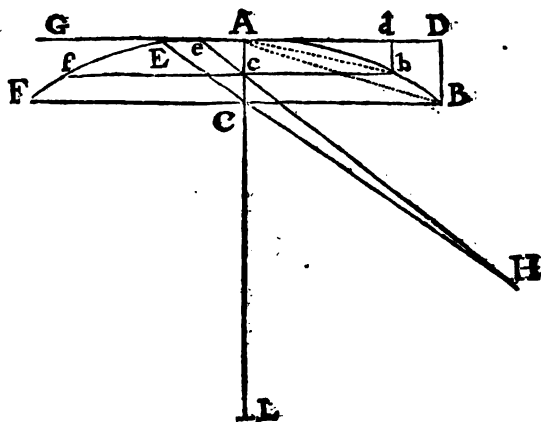
*Corol. 2.* (<sup>d</sup>) Eorundem quadrata sunt etiam ultimo ut sunt arcuum sagittæ, quæ chordas bifecant & ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ  $BD$ ,  $b d$ .

*Corol. 3. (°).* Ideoque sagitta est in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate describit arcum.

*Coral. 4.* (<sup>f</sup>) Triangula rectilinea  $ADB$ ,  $Adb$  sunt ultimo in triplicatâ ratione laterum  $AD$ ,  $Ad$ , inque fescupli-

(d) 126. Sit  $FAB$ , arcus circuli curvam datam osculantis in  $A$ , tangens  $AD$ , radius osculi  $AL$ , chordæ  $FB$ ,  $fb$ , ad radium  $AL$ , & rectæ  $BD$ ,  $bd$ , ad tangentem  $AD$ , normales, per puncta  $Cc$ , semperducantur lineæ  $EC$ ,  $ec$ , ad datum punctum  $H$ , convergentes . evanescētes arcu  $AB$ , rectæ  $DB$ ,  $db$ , & ipsiſ æquales sagittæ  $AC$ ,  $Ac$ , sunt ut tangentium  $AD$ ,  $Ad$ , arcuum  $AB$ ,  $Ab$ , & chordarum  $AB$ ,  $Ab$ , quadrata ( *Corrol. 1.* ) adeoque ut duplorum arcuum  $FAB$ ,  $fAb$ , & chordarum  $fb$ ,  $FB$ , iis arcubus evanescētibz ( *Lem. 7.* ) congruentium, atque etiam tangentium Jam ubi punctum  $C$ , usque addit, chorda evanescens  $AE$ , cuncte  $AG$ , coincidit ( *Lem. 6.* ) & bz quoque lineis  $EH$ ,  $eH$ ,  $CEA$ ,  $ceA$ , sunt similia, a  $EC$  est ad  $ec$ , ut  $AC$ , ad  $Ac$  ut arcuum evanescēntium  $FAB$   $fAb$  chordarum  $FB$ ,  $fb$ , & tangentium

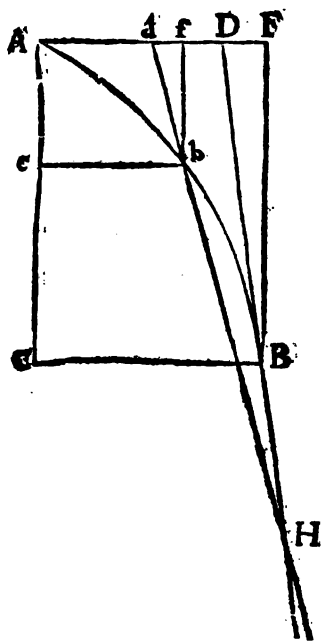
(c) 127. Ideoque sagittæ AC, AC, vel EC, ec, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus corpus datâ velocitate percurrit arcus evanescentes FAB, fAb, vel dimidiis Ab, Ab; spatia enim datâ velocitate percurra sunt ut tempora (5), adeoque pro temporibus substitui possunt arcus FAB, fAb, sed sagittæ sunt in ratione duplicatâ eorum arcuum, (126), ergo & temporum.



(f.) 128. *Triangula rectilinea ABD*. *Abd*, sunt ultimò in triplicatà ratione laterum *AD*, *Ad*, inque (esquuplicatà laterum *BD*, *bd*; ductis enim *BF*, *bf*, ad tangentem *AB*, perpendicularibus, erit ob triangulorum *BDf*, *bdf*, similitudinem  $BD: b d = BF: b f$ , & propterea areæ triangulorum *ABD*, *Abd*, sunt in ratione composita laterum *AD*, ad *Ad*, & *BD*, ad *bd*; sed (124, 125. cor. 1.)  $BD: b d = A D: A d$ ; adeoque  $\sqrt{BD}: \sqrt{bd} = AD: Ad$ , ergò triangula *ABD*, *Abd*, sunt in ratione composita *AD*, ad *Ad*, & *AD*; ad  $A d^2$ , hoc est, in ratione triplicatà laterum *AD*, *Ad*; sunt etiam in ratione composita *BD*, ad *bd*; &  $\sqrt{BD}$ , ad  $\sqrt{bd}$ , hoc est, in ratione  $BD \times \sqrt{BD}$  ad  $bd \times \sqrt{bd}$ .

## 77

DE MO-  
TU COR-  
PORUM,  
LIBER  
PRIMUS.  
§ 1.



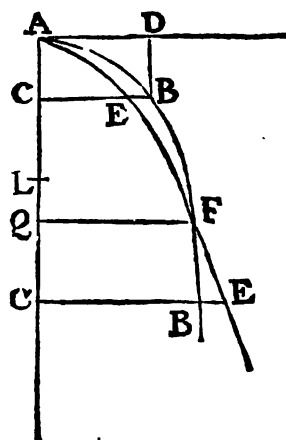
130. Quare arcus evanescens spectari potest tanquam arcus parabolæ cuius latus rectum est æquale diametro circuli osculantis. Nam in arcu circulari  $AB$ , (vid. fig. textus) ordinata  $CB$ , ad diametrum perpendicularis, est media proportionalis inter abscissam  $AC$ , & reliquam diametri partem, seu totam diametrum, cum  $AC$ , evanescit ( Lem. 1. ), adeoque quadratum ordinatæ  $CB$ , æquale est rectangulo ex abscissa evanescente  $AC$ , & diametro circuli, quæ est proprietas parabolæ cuius latus rectum æquale est prædictæ diametro.

(b) 131. Parabolæ segmentum  $A b B$ , est tertia pars trianguli rectilinei  $A C B$ , vel æqualis  $A D B$ ; adeoque area curvilinea  $A D B b A$ , æqualis est duabus tertiiis partibus ejusdem trianguli rectilinei  $A D B$ . Vid. *Gregor. à S. Vincentio* cor. 1. Prop. 232. Lib. V. Quadraturæ circuli, aut *Archimed.* Prop. 17. Quadrat. Parabolæ.

(8) 129. *Arcus evanescens* A B ;  
in curvis omnibus curvaturam finitam  
ad punctum contactus A, habentibus ,

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinitè majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinitè minorem; hoc est, curvaturam ad punctum *A*, nec infinitè parvam esse, nec infinitè magnam, seu intervallum *AJ* finitæ esse magnitudinis. (1) Capi enim potest *DB* ut *AD* 3: quo in casu circulus

(1) 132. Sit parabolæ Apollonianæ *A E F*, axis *A C*, vertex *A*, tangens in vertice *A D*, ordinata *C E*, latus rectum *A L*, circulus diametro *A L*, descriptus parabolam osculatur in *A*, (130.) eundemque ac parabola contactus angulum



efficit in *A*. Ad eundem axem *A C*, & verticem *A*, describatur superioris generis parabola cujus ordinatæ *C B* sint semper in subtriplicatâ abscissarum *A C*, vel parallelarum & æqualium *D B*, ratione; & erit angulus contactus *B A D*, angulo contactus *E A D*, infinitè minor. .... Dem... Parabolæ *A F E*, latus rectum *A L*, dicatur *A*; parabolæ *A B B*, latus rectum sit *B*, & erit ex harum curvarum naturâ  $A \times AC = CE^2$  &  $B^2 \times AC = CB^2$ , adeoque  $AC = CE^2 : A = CB^2 : B^2$ , undè reperitur  $CB^2 = CE^2 \times B^2 : A$ , &  $CB$  ad  $B^2 : A = CE$  ad  $CB^2$  ergo cum erit  $CB = B^2 : A$ , tunc erit  $CE^2 = CB^2$ , atque adeò parabolæ *A E E*, *A B B*, ordinatam habebunt communem quæ dicatur *Q F*, & sese interfecabunt in puncto *F*; jam verò si fuerit  $CB$  minor quam  $B^2 : A$ , erit quoque  $CE^2$  minor quam  $CB^2$ , adeoque  $CE$  minor quam  $CB$ ; sed omnes ordinatæ inter verticem *A*, & ordinatam communem *Q F*, (quæ est  $= B^2 : A$ ) minores sunt eâ, ergo omnes  $CE$  inter *A* & *F* comprehensæ sunt minores ordinatis correspondenibus  $CB$ , tota igitur pa-

rabolæ Apollonianæ portio *A E F*, quâ ordinatæ *C E* terminantur, cadit intrâ portionem *A B F*, alterius parabolæ, ac proinde angulus contactus *B A D*, semper minor est angulo contactus *E A D*, cum ergò angulus *E A D*, aucto in infinitum latere recto *A L*, possit sine fine minui, manifestum est angulum contactus *B A D*, quovis angulo dato *E A D*, infinitè minorem esse. Q. e. D.

133. Ad eundem axem *A C*, & verticem *A*, successive describantur curvæ *A E E*; ejus naturæ, ut abscissarum *A C*, & ordinatarum *C E*, relatio exprimitur æquatione generali  $A^m \times AC = CE^{m+1}$ . Si loco exponentis, *m*, successive ponantur in æquatione numeri quilibet positivi, integri vel fracti continuò crescentes vel decrecentes, obtinebuntur infinitæ series diversæ angulorum contactuum, quorum quilibet est infinitè minor priore, dum numerus, *m*, semper crescit, & infinitè major dum numerus, *m*, semper decrecit. ... Dem... Numerus, *m*, augeatur numero positivo, *n*, integro vel fracto, & describatur curva *A B B*, cujus æquatio sit  $B^{n+1} \times AC = CB^{n+1}$ . Ex hac æquatione & superiori  $A^m \times AC = CE^{m+1}$ , reperitur  $AC = CB^{n+1} : B^{n+1} : A^m = CE^{m+1} : A^m$ , adeoque  $CB^{n+1} : B^{n+1} = CE^{m+1} : A^m$  atque  $CB^n$  ad  $B^n : A^m = CE^m$  ad  $CB^{n+1}$ ; sit  $CB^n = B^n : A^m$ , & erit  $CB^{n+1} = CE^m$ , adeoque  $CB = CE = Q F$ . Quare cum inter verticem *A*, & communem ordinatam *Q F*, omnes ordinatæ sint minores ipsâ *Q F*, patet ut suprâ (132), totam portionem *A E F*, curvæ *A E E*, cadere intrâ portionem *A B F*, alterius curvæ *A B B*, ac proinde angulum contactus *B A D*, quovis dato angulo contactus *E A D* infinitè minorem esse, & reciprocè angulum *E A D*, esse angulo *B A D* infinitè majorem. Q. e. D.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 79

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

nullus per punctum  $A$  inter tangentem  $AD$  & curvam  $AB$  deduci potest, proindeque angulus contactus erit infinite minor circularibus. <sup>(1)</sup> Et simili argumento si fiat  $DB$  successive ut  $AD^4$ ,  $AD^5$ ,  $AD^6$ ,  $AD^7$ , &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat  $DB$  successive ut  $AD^2$ ,  $AD^{\frac{1}{2}}$ ,  $AD^{\frac{1}{3}}$ ,  $AD^{\frac{1}{4}}$ ,  $AD^{\frac{1}{5}}$ ,  $AD^{\frac{1}{6}}$ , &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite major minorve priore. Ut si inter terminos  $AD^2$ , &  $AD^{\frac{1}{3}}$ , inseratur series  $AD^{\frac{1}{2}}$ ,  $AD^{\frac{1}{4}}$ ,  $AD^{\frac{1}{5}}$ ,  $AD^{\frac{1}{6}}$ ,  $AD^{\frac{1}{7}}$ , &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

(1) Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies cur-

(1) 134. In æquatione  $A^m \times AC = CE^{m+1}$ , loco exponentis  $m$ , successive ponantur numeri 1, 2, 3, 4, 5 &c., & erit  $AC$  successive, ut  $CE^2$ ,  $CE^3$ ,  $CE^4$ ,  $CE^5$  &c., & habebitur (133) series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Loco  $m$  substituantur successive numeri decrescentes, 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ , &c. erit  $AC$ , successive ut  $CE^{\frac{1}{2}}$ ,  $CE^{\frac{1}{3}}$ ,  $CE^{\frac{1}{4}}$ ,  $CE^{\frac{1}{5}}$ , &c., & habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus (132), secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore (133). Loco  $m$ , substituantur numeri 1,  $1 + \frac{1}{6}$ ,  $1 + \frac{1}{3}$ ,  $1 + \frac{1}{2}$ ,  $1 + \frac{2}{3}$ ,  $1 + \frac{3}{4}$ ,  $1 + \frac{4}{5}$ , &c., erit  $AC$ , suc-

cessive ut  $CE^{\frac{1}{6}}$ ,  $CE^{\frac{1}{3}}$ ,  $CE^{\frac{1}{2}}$ ,  $CE^{\frac{2}{3}}$ , &c., & habebitur series infinita angulorum contactus, quorum quilibet posterior est infinite minor priore (133), & inter binos quosvis angulos hujus alteriusve seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium; ut enim ea series inveniatur, sufficit inter duos numeros datos, v. G. 1,  $1 + \frac{1}{2}$ , seriem invenire numerorum crescentium vel decrescentium, quorum quilibet major sit altero ex numeris datis, minor altero, quod facillimum est.

(1) 135. Id exemplo facili illustrare satis erit. Pyramidis & coni sit idem vertex eademque altitudo, & basis pyramidis sit polygonum inscriptum circulo qui basis est coni, numerus laterum polygoni augeatur, & eorum longitudo minuatur in-

curvas & contenta. ( <sup>m</sup> ) Præmisi verò hæc lemmata, ut ef-  
fugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more ve-  
terum geometrarum, ad absurdum. Contractiones enim red-  
duntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed  
quoniam durior est indivisibilium hypothesis, & propterea me-  
thodus illa minus geometrica censetur; ( <sup>n</sup> ) malui demon-  
stra-

infinitum, & polygoni ac circuli ultima  
ratio ( *Lem. 7.* ) erit ratio æqualitatis, ac  
proinde ultima ratio pyramidis illiusque  
superficiæ ad conum & illius superficiem  
curvam, erit quoque ratio æqualitatis; unde  
curva superficies conï æqualis est summæ  
ultimæ triangulorum evanescentium, quo-  
rum communis vertex est vertex conï,  
bases verò latera evanescentia polygoni  
circulo inscripti.

( <sup>m</sup> ) 136. Quàm magnos progressus  
Geometria fecerit, hinc cognoscere licet.  
Veteres Geometræ in iis quæstionibus quæ  
Infinitum considerationem involvunt, suas  
demonstrationes ad absurdum revocabant, &  
ex falsis suppositionibus verum eruebant. Ut  
inter duas quantitates quæ ad æqualitatem  
constanter verguant, & tandem propius ad  
invicem accedunt quàm pro datâ quâvis  
differentiâ rationem æqualitatis intercedere  
demonstrarent, prius supponebant inter eas  
quantitates esse vel majoris vel minoris inæ-  
qualitatis rationem, deinde utrumque fal-  
sum demonstrabant, & ex hac reductione  
quàm ad absurdum vocant, inter illas quan-  
titates perfectam æqualitatem esse conclu-  
debant. Quàm autem perplexus sit & tædio-  
sus hic demonstrandi modus, nemo non videt.  
Verùm licet imperfecta admodum fuerit ve-  
terum geometria, non iis tamen omnino  
ignota fuerant methodi infiniteimalis prin-  
cipia. Quantitates infinite parvas seu eva-  
nescentes pro nihilo habendas esse in mul-  
tis demonstrationibus tanquam axioma po-  
suerunt *Euclides* & *Archimedes*; in exem-  
plum afferemus unicam vulgaris Geometriæ  
theoremata. Ut demonstrarent circulos esse  
inter se ut quadrata diametrorum, fingeant  
iis circulis inscripta esse vel circumscrip-  
ta polygonia similia quorum latera nume-  
ro auferentur & longitudine minuerentur  
in infinitum, ita ut polygonorum inscrip-

torum vel circumscriptorum à circulo dif-  
ferentia foret quâvis datâ magnitudine mi-  
nor; quia verò hæc polygonia sunt ut quadra-  
ta diametrorum circulorum quibus inscri-  
buntur vel circumscribuntur, circulos pari-  
ter esse ut quadrata diametrorum conclude-  
bant. Varios infinitorum ordines supponit  
illud idem theoremata, licet non adverterent  
veteres. Nam considerabant polygonia circulis  
inscripta tanquam composita ex infinitis  
numero atque infinite parvis seu evanescenti-  
bus lateribus; manifestum autem est dif-  
ferentiam polygoni inscripti à circulo quâvis  
datâ minorem componi ex infinitis nume-  
ro atque infinite parvis seu evanescenti-  
bus circuli segmentis quorum latera po-  
lygoni sunt chordæ; hæc verò segmenta  
sunt minimæ quantitates illæ quas secun-  
di ordinis infiniteimas dicunt Recentio-  
res. Hic pedem fixerant veteres, primus-  
que longius progredi ausus est celeberrimus  
Geometra *Bonaventura Cavalieri* qui  
anno 1635. indivisibilium methodum in  
geometriam introduxit. Hoc primum po-  
suit suæ methodi decretum, lineas nempe  
ex infinitis punctis constare, superficies  
ex infinitis lineis, & solida ex infi-  
nitis superficiibus; Deinde indivisibilia il-  
la elementa, totamque eorum summam  
comparat in unâ magnitudine cum singu-  
lis elementis eorumque summâ in aliâ  
magnitudine, & sic duarum magnitudinum  
rationem determinat. Hæc autem quantita-  
tum indivisibilium hypothesis durior minus-  
que geometrica *Newtono* visa est.

( <sup>n</sup> ) 137. *Newtonus*, ut indirectas &  
perplexas vitaret veterum demonstratio-  
nes, earum tamen certitudinem & eviden-  
tiam conservaret, veterum principium Lem-  
mate primo generaliter expressit, illudque  
in Lemmatis sequentibus ad curvas gene-  
ratim applicavit, & inde directas perbre-  
vesque

rationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites (°) summarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes quâ potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium; & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium (P) determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocari.

DE MOTU  
CORPORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

§ 1.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima; ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendere posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis (q) velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam; ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: Per velo-

vesque demonstrationes in toto operis decursu deduxit. Ut autem methodi indivisibilium breviter assequeretur, tutius tamen & accuratius procederet, loco indivisibilium evanescentia divisibilia substituit, & quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas considerat; supponit nimirum lineas describi ac describendo generari non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum, & solida per motum superficialium, angulos per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, & sic in cæteris.

(°) 138. Ubi area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividitur, & eorum numerus augetur atque latitudo minuitur in infinitum, horum parallelogrammorum summa (Lem. 2.), nunquam potest esse major area curvilinea, sed hæc

Tom. I.

area est terminus ad quem parallelogrammorum decrecentium summa semper accedit & quem tandem attingit, ubi parallelogramma evanescentia aut nascuntur. Idem dicendum de evanescentibus curvarum chordis respectu perimetri curvilineæ.

(P) 139. Quantitates evanescentes accipi non debent velut determinatæ aut determinabiles quædam portiones quantitatum quæ certam & definitam parvitatem obtineant. Quasvis enim portiunculas linearum, superficialium aut corporum acceperimus aut designaverimus, hæ semper reipsa finitæ erunt, non evanescentes; itaque non sunt intra certos terminos quantumvis proximos coarctandæ, unde hæ quantitates semper ut decrecentes ac perpetuo diminuendæ accipi debent.

(q) 140. Exempli causâ, gravis sursum projecti & ad altissimum locum pervenientis;

L

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

§ 1.

velocitatem ultimam intelligi eam, quā corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quācum corpus attingit locum ultimum & quācum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescent, non postea, sed quācum evanescent. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quācum nascuntur. Et summa prima & ultima est quācum esse (vel augeri aut minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, problema est verè geometricum eundem determinare. Geometrica verò omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitimè usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum, demonstravit. Verum hæc obiectio falsæ innititur hypothese. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescent, revera non sunt rationes quantitatum (\*) ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescientium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quàm pro datâ quâ-

(\*) 141. Seu, quantitatum determinatarum & indivisibilium, sed &c.

142. Ut quantitatum evanescentium aut nascentium relationes atque proprietates inveniantur, considerantur quantitates finitæ, harum investigantur relationes & proprietates & lex quâ continuò crescunt vel decrescunt; quibus cognitis facillè intelligitur quanam proprietates quantitativis illis crescentibus ac decrescientibus semper conveniant, adeoque & cum in infinitum minuuntur & evanescent, vel cum nascuntur. Imò verò ex Lemmate primo aliisque

sequētib; invenitur quanam sint proprietates quæ licet quantitativis finitis non conveniant, evanescentibus tamen & nascentibus competunt, cum nempe quantitates finitæ decrescunt ad illarum proprietates, ut ita dicam perpetuò accedunt, & ad eas tempore dato accedunt magis quàm pro differentiâ quâvis datâ.

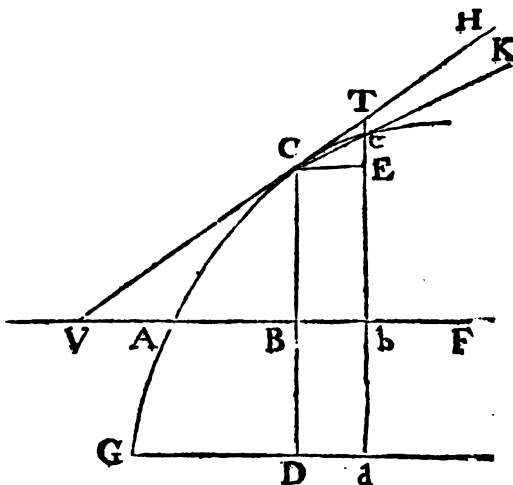
Ex præcedentibus Lemmatis facillè deducitur ac demonstratur *Newtoniana* fluxionum methodus cujus generalia principia ut potè nobis in posterum profutura breviter explicabimus.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 83

quâvis differentiâ , nunquam verò transgredi, neque priùs at-  
tingere quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs  
intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data  
est differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima  
ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur  
quan-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
§ 1.

143. Quantitates indeterminatæ quæ continuò crescunt vel decrescunt, variabiles aut fluentes dicuntur; constantes verò aut determinatæ vocantur, quæ aliis continuò crescentibus vel decrescentibus, eadem manent. Ordinatæ  $BC$ ,  $BD$ , super basi  $AF$ , motu sibi semper parallelo ita progrediantur, ut ordinatâ  $BD$ , eadem semper manente, punctum  $D$ , rectam  $GD$  describat, & interim continuò crescente vel decrescente ordinatâ  $BC$ , punctum  $C$  describat curvam  $ACc$ ; abscissa  $AB$ , ordinatâ  $BC$ , curvæ arcus  $AC$ , areæ  $ACB$ ,  $AGDB$ , sunt quantitates indeterminatæ seu fluentes; recta verò  $BD$ , est quantitas constans.



144. Quantitates fluentes, ut  $AB$ ,  $BC$ , æqualibus temporibus crescentes & crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ crescunt, ac generantur, evadunt majores vel minores; Si enim punctum  $B$ , velocitè semper progrediatur quam punctum  $C$ , in lineâ  $BC$ , incrementa  $Bb$ , fluentis  $AB$ , majora erunt incrementis  $Ec$ , fluentis  $BC$ , eodem tempore genitis. Velocitates quibus illa incrementa ut  $Bb$ ,  $Ec$ , eodem tempore genita, primò nascuntur, dum nempe  $bc$ , coincidit cum  $BC$ , dicuntur fluxiones, & methodus ex fluxionibus inveniendi fluxiones, methodus fluxionum directa vocatur; methodus verò ex fluxionibus inveniendi fluentes, methodus fluxionum inversa appellatur.

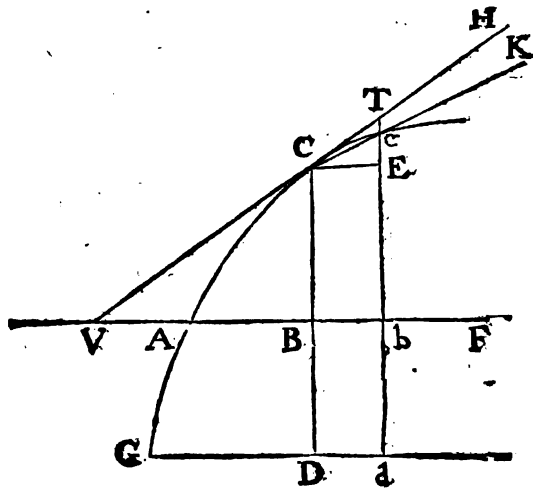
145. Velocitates quibus fluentium quantitatum incrementa eodem tempore genita, primò nascuntur, sunt uniformes. . . Dem... Cum curva  $ACc$ , motu puncti  $C$ , velocitate quâvis finitâ progredientis describi possit, si illius puncti veloci-

tas secundum directionem  $CE$ , lineæ  $AB$  parallelam, supponatur uniformis, velocitas ejusdem secundum directionem  $Ec$ , pro variâ curvæ  $ACc$  naturâ, varia quidem erit in diversis curvæ punctis, v. gr. in  $C$ , &  $c$ ; sed quò magis punctum  $c$ , ad  $C$ , accedet, eò minor erit velocitatis secundum directionem  $Ec$ , variatio in punctis  $C$ , &  $c$ , adeò ut dum punctum  $c$ , coincidit cum puncto  $C$ , omnis velocitatis per  $Ec$ , variatio expiret. Quare (Lem. 1.) velocitates quibus fluentium incrementa eodem tempore genita primò nascuntur, sunt uniformes. Q. e. D.

146. Cum ergò velocitates uniformes sint spatiis eodem tempore percurrentis proportionales (§), manifestum est fluxiones (143) esse in ratione incrementorum eodem tempore genitorum, dum primò nascuntur vel ultimò evanescent; adeoque ut fluxionum relatio inveniatur, sumere oportet incrementa fluentium eodem tempore genita, & primam eorum incre-



quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. In se-  
quentibus igitur, si quando facili rerum conceptui consulens, di-  
xero quantitates quàm minimas, vel evanescentes, vel ultimas;  
cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed co-  
gita semper diminuendas sine limite.



mentorum nascentium, vel ultimam eva-  
nescentium rationem considerare tanquam  
relationem fluxionum.

147. Hinc summa fluxionum est ut  
summa incrementorum nascentium vel eva-  
nescentium, summa verò incrementorum  
omnium nascentium est ipsa quantitas  
fluens; nam si tota area  $Acb$  divisa in-  
telligatur in parallelogramma ut  $BE$ , eo-  
rumque numerus augeatur & latitudo  $Bb$   
minuatur in infinitum, summa omnium in-  
crementorum nascentium  $Bb$ , ab  $A$  usque  
ad  $b$ , erit ipsa fluens  $A'b$ , summa  
omnium incrementorum  $Ec$ , ab  $A$ , us-  
que ad  $c$ , erit fluens  $b'c$ , summa omnium  
 $Cc$ , erit arcus fluens  $A'c$ , & summa omnium  
parallelogrammorum  $BE$ , erit area  $Acb$   
fluens (106. 107.); ergò summa fluxio-  
num est ut ipsa quantitas fluens.

148. Quoniam in figurâ superiori fluxio  
aliqua, vel abscissa  $AB$ , vel ordinata  
 $CB$ , aut arcus  $AC$ , ad arbitrium tan-

quam uniformis spectari possit, (Ex dictis  
145.) patet ex pluribus fluxionibus unam  
tanquam constantem posse considerari &  
quantitate finitâ constanti exponi, dum  
aliæ fluxiones variâ ratione mutari & quan-  
titatibus variabilibus exponi possunt.

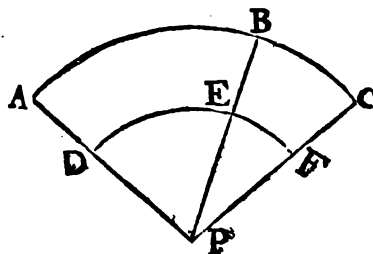
149. Quare cum quantitates variables  
suas habeant fluxiones quæ rursus possunt  
esse variables, liquet dari fluxiones flu-  
xionum, seu varios, imò infinitos fluxio-  
num ordines. Fluentium finitarum fluxio-  
nes dicuntur fluxiones primæ; harum flu-  
xiones primæ dicuntur fluentium finitarum  
fluxiones secundæ, & ita porro in infinitum.

150. Ductâ rectâ  $VTH$ , quæ curvam  
tangat in  $C$ , ipsique  $bc$  &  $BA$  pro-  
ductis occurrat in  $T$  &  $V$ ; linea  $bc$  in  
locum suum priorem  $BC$  redeat, & ul-  
tima forma triangulorum evanescentium  
 $CEc$ ,  $CEc$ ,  $CET$ , est similitudinis &  
ultima ratio æqualitatis (Lem. VIII.)  
ideoque fluxiones primæ ipsarum  $AB$ ,  $BC$ ,  
 $AC$ .

$A C$ , sunt (146.) ut trianguli  $C E T$ , latera  $C E$ ,  $E T$ , &  $C T$ , & per eadem latera exponi possunt, vel quod perinde est, per latera  $V B$ ,  $C B$ , &  $V C$ , trianguli  $V B C$ , similis triangulo  $C E T$ .

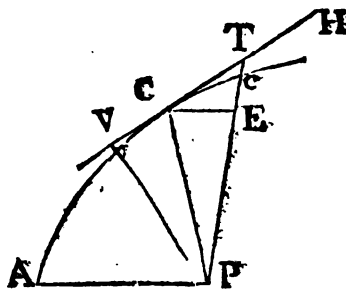
151. Quoniam areae  $B b c C$ ,  $B b d D$ , eodem tempore describuntur communi ordinatarum  $B C$ ,  $B D$  motu, erunt areae illae nascentes vel evanescentes ut fluxiones arearum  $A C B$ ,  $A B D G$ , (146); sed area nascentis  $B b c C$ , non differt à parallelogrammo  $B E$ , (107); ergò fluxiones arearum  $A C B$ ,  $A B D G$ , sunt in ratione primà parallelogrammorum  $B E$ ,  $B d$  nascentium, seu ob commune latus  $B b$ , in ratione ordinatarum  $C B$ ,  $B d$ .

152. Si circulus centro  $B$ , radio fluente  $B C$ , descriptus per longitudinem abscissae  $A B$ , ad angulos rectos progrediatur, describet solidum idem quod ex rotatione figurae  $A C B$ , circa axem  $A B$  generaretur, & fluxio solidi geniti erit ut factum ex area circuli illius in incrementum nascentis  $B b$ , abscissae  $A B$ , & fluxio superficiei solidi geniti erit ut factum ex perimetro ejusdem circuli in arcum  $C c$ , vel tangentem  $C T$ , nascentem... *Dem...* Rectangulum nascentis  $B E$ , non differt à figura  $B b c C$  nascente (107), adeoque incrementum nascentis solidi ex rotatione figurae  $A C B$ , geniti aequale est solido ex rotatione rectanguli  $B E$ , circa latus  $B b$ , genito; hoc autem solidum est cylindrus aequalis facto ex area circuli radio  $C B$  descripti in altitudinem  $B b$ ; solidi igitur motu circuli  $C B$  per axem  $A B$  geniti incrementum nascentis adeoque & ipsius fluxio (146) est ut factum ex area circuli in incrementum nascentis  $B b$ , abscissae  $A B$ . Similiter cum arcus nascentis  $C c$ , cum tangente  $C T$  coincidat, (Lem. 7.) superficies nascentis ex rotatione figurae  $B b c C$ , genita aequalis est superficiei conii truncati, adeoque aequalis facto ex semisumma peripheriarum, quarum sunt radii  $B C$ ,  $B c$ , in latus  $C T$ , seu ob  $b c = B C$  (107) aequalis facto ex peripheria circuli, cujus radius  $B C$ , in latus  $C T$ , vel arcum  $c t$ , nascentem; ergò factum istud est incrementum nascentis superficiei curvae ex rotatione  $A C$  descriptae, adeoque est ut illius superficiei fluxio. (146). Q. e. D.



153. Anguli rectilinei  $A P B$ ,  $E P F$ , sunt inter se directè ut arcus  $A B$ ,  $E F$ , qui angulos subtendunt & reciprocè ut arcuum radii  $A P$ ,  $E P$ ... *Dem...* est angulus  $A P B$ , ad angulum  $B P C$ , seu  $E P F$ , ut arcus  $A B$ , ad arcum  $B C$ , adeoque ut  $A B : A P$ , ad  $B C : A P$ ; sed ob arcus similes  $B C$ ,  $E F$ , est  $B C : A P = E F : E P$ ; ergò angulus  $A P B$ , est ad angulum  $E P F$ , ut  $A B : A P$ , ad  $E F : E P$ . Q. e. D.

154. Hinc sequitur 1°. quemlibet angulum  $A P B$  exprimi posse arcu  $A B$  qui ipsum subtendit diviso per radium  $A P$ . 2°. Quemlibet arcum circuli  $A B$ , esse ut factum ex angulo  $A P B$  in radium  $A P$ , atque adeò hoc facto exprimi posse. 3°. Incrementum nascentis anguli fluentis  $A P B$ , adeoque & illius anguli fluxionem (146) esse in ratione directà arcus circularis nascentis & inversà radii illius.



155. Recta  $P C$  fluens circa datum punctum  $P$  revolvatur, & punctum illius extremum  $C$ , curvam  $A C c$ , describat quam tangit in  $C$  recta  $V C H$  in quam ex polo  $P$ , demissa sit perpendicularis  $P V$ . Sit  $A$  punctum in curva  $A C c$  fixum, progrediamurque recta  $P C$  de loco

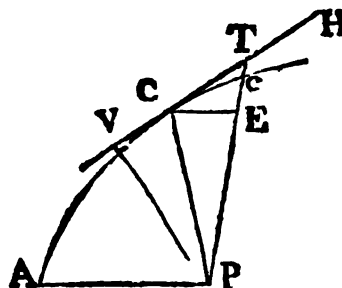
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

§ 1.

co suo  $PC$ , in locum novum  $Pc$ , & producta  $Pc$ , tangentem secet in  $T$ . Capiatur  $PE = PC$ , seu radio  $PC$  describatur circuli arcus  $CE$ , ut habeantur  $E, c$ , incrementum rectæ  $PC$ ,  $Cc$ , incrementum curvæ  $Ac$ ,  $PCc$ , incrementum areæ  $PACP$ , angulus  $CPc$ , incrementum anguli  $APC$ , eodem tempore genita. Redeat jam  $PC$ , in locum suum priorem  $PC$ , ut incrementa illa omnia evanescant & horum incrementorum evanescentium ratio ultima erit ratio fluxionum quantitatū fluxionum quarum sunt incrementa (146).

156. Quoniam autem perveniente  $Pc$ , in locum  $PC$ , triangula  $CEc$ ,  $CET$ , evanescunt sunt ultimò similia & æqualia (Lem. 8.) circuli arcus  $CE$ , cum chorda ipsius coincidit, ipsique æqualis est (Lem. 7.), & præterea evanescente angulo  $CPE$ , anguli  $PCE$ ,  $PEC$ , sunt inter se & duobus rectis æquales, adeoque  $CE$ , ad  $PT$ , normalis. Manifestum est. .... 1°. Triangulum  $TPV$  esse triangulo  $TEC$ , adeoque & triangulo evanescenti  $cEC$ , simile, ac proinde fluxiones arcus  $AC$ , & rectæ  $PC$ , esse inter se ut duo latera  $VT$ ,  $TP$ , seu  $VC$ ,  $PC$ . .. 2°. Fluxionem anguli  $APC$ , esse ut  $CE:PC$  (154)... 3°. Fluxionem areæ  $ACP$ , esse ut factum ex rectâ  $CP$ , in normale  $CE$  evanescentem; nam area trianguli  $PCT$ , æqualis dimidio rectangulo  $PT \times CE$ , seu ob evanescentem  $ET$ , dimidio rectangulo  $PC \times CE$  (Lem. 1.).

157. Similibus argumentis ex fluentibus calculo expressus fluxiones inveniri possunt, in quantitibus finitis analysim instituendo, & finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigando. Hæc autem sunt calculi fluxionum principia. Nimirum. . . 1°. Cum fluxiones sint in primâ ratione incrementorum nascentium & ultimâ evanescentium (146), fluxiones iis incrementis primò nascentibus vel ultimò evanescentibus possunt exprimi. . . 2°. Quantitates quæ nonnisi suo incremento nascentis aut evanescente differunt, sunt æquales (Lem. 1.)... 3°. Quantitatum constantium nullæ sunt fluxiones, nulla incrementa vel decrementa. . . 4°. Si inter quantitates indeterminatas aliquæ decreverint, dum aliæ crescunt, decreverint fluxiones sunt negativæ, sunt enim ut incrementa negativa, seu ut decrementa.



158. Quantitates fluentes designantur ultimis alphabeti litteris  $z, y, x, v$ ; constantes indicantur aliis  $a, b, c$  &c. fluentium fluxiones primas aut ipsi proportionalia incrementa nascentia vel evanescencia NEWTONUS notat iisdem litteris quibus fluentes exponuntur, sed iis punctuatis sic  $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$ ; Leibnitius litteram  $d$ , incrementi nascentis vel evanescentis notam characteristicam fluentibus præponit sic  $dz, dy, dx, dv$ . Fluxiones secundæ designantur sic  $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$ , vel sic  $ddz, ddy, ddx, ddv$ ; fluxiones tertiæ sic  $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$ , vel sic  $dddz, dddy, dddx, dddv$ , vel sic  $d^3z, d^3y, d^3x, d^3v$ , & ita deinceps in infinitum.

159. Fluxio quantitatis ex pluribus terminis per additionem vel subtractionem compositæ, æqualis est omnibus singulorum terminorum fluxionibus per eadem signa + vel - junctis; ita fluxio quantitatis compositæ  $a + z - y$ , erit  $d z - d y$ ... Dem... Totius quantitatis  $a + z - y$ , incrementum tempore dato genitum æquale est differentiæ incrementorum ipsarum  $z$  &  $y$ , cum nullum sit constantis  $a$ , incrementum (156) adeoque incrementum nascentis vel evanescens quantitatis  $a + z - y$ , æquale est differentiæ incrementorum nascentium vel evanescentium ipsarum  $z$  &  $y$ , sed fluxiones sunt in primâ ratione incrementorum nascentium (145) ergò fluxio totius quantitatis  $a + z - y$ , est  $d z - d y$ . Q. e. D. Si crescente quantitate  $z$ , decreveret  $y$ , ipsius  $y$ , fluxio foret negativa nempe  $-d y$  (157) adeoque fluxio  $d z - d y$ , fieret  $d z + d y$ . Quod in sequentibus semper est observandum.

160. Flu-

160. Fluxio quantitatis fluentis ex pluribus variabilibus per multiplicationem compositæ, æqualis est summæ factorum ex singularum variabilium componentium fluxionibus in aliarum variabilium facta ductis, hoc est fluxio quantitatis  $xy$ , est  $x dy + y dx$ , fluxio quantitatis  $ax$  est  $a dx$ , fluxio quantitatis  $xyz$  est  $y dx + x dy + z dx$ . Dem... Recta CB, fluens super

rectæ AB cui normalis est, progrediatur, illiusque punctum extremum C, describat curvam ACc, perveniat Bc in locum bc, & compleantur rectangula BF, bf, BE, cf, EG; AB, dicatur  $x$ , BC dicatur  $y$ , adeoque rectangulum BF erit  $xy$ . Dum BC, pervenit in bc, incrementum rectanguli BF seu  $xy$ , æquale est summæ rectangulorum BE, EG, Cf; est autem rectangulum EG, ad rectangulum EB, ut Ec ad BC, & ad rectangulum Cf ut CE, vel Bb, ad FC, seu AB; quare redeunte bc, in locum suum priorem BC, & decrefcentibus continuè Ec, & EC atque tandem ultimò evanescentibus, decrefcit quoque & tandem evanescit, seu fit insignabilis ratio rectanguli EG, ad rectangula EB & cf; adeoque (Lem. 1.) summa duorum rectangulorum BE, cf, fit ultimò æqualis summæ trium rectangulorum BE, EG, Cf; ergò incrementum nascens rectanguli BF, seu  $xy$ , æquale est summæ duorum rectangulorum BE, Cf, nascentium, seu summæ factorum ex  $x$ , in incrementum nascens ipsius  $y$ , & ex  $y$ , in incrementum nascens ipsius  $x$ , adeoque fluxio facti  $xy$  (146) est  $x dy + y dx$ . Undè etiam fluxio  $ax$ , est  $a dx$ , quia  $a$ , constans nullam habet fluxionem. Q. e. D.

Jam in facto  $xyz$  ponatur  $xy = v$ , & erit  $xyz = vx$ , adeoque fluxio facti  $xyz$  æqualis fluxioni facti  $vx$ ; fluxio autem facti  $vx$ , est  $x dv + v dx$ , & fluxio facti  $xy = v$ , est  $x dy + y dx = dv$ , id est si in fluxione  $x dv + v dx$ , pro  $v$  &  $dv$  scribantur  $xy$ , &  $x dy + y dx$ , fluxio facti

$xyz$ , nempe  $x dv + v dx$ , erit  $xx dy + y x dz + x y dx$ ; & par est ratio aliorum factorum quorumcumque. Q. e. D.

161. Cor. 1... Ponantur singulæ fluentes  $x, y, z$ , &c. sibi mutuo semper æquales & ipsius  $xx$ , fluxio erit  $x dx + x dx = 2x dx$ : fluxio cubi  $z$  erit  $xx dz + x dx + x dx dz + 3x dx = 3x dx$ : fluxio potentie  $z^n$  erit  $4x dx = 4x dx$ : & eodem argumento fluxio potentie cujuscunque  $x^m$  erit  $m x^{m-1} dx$ .

162. Cor. 2... Fluxio quantitatis  $\frac{1}{2}$ , est  $\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$  nam po-

natur  $x^{\frac{1}{2}} = y$  & erit  $x = yy$ ,  $dx = 2y dy$  (161)  $dy = d(x^{\frac{1}{2}}) = dx : 2y = dx : 2x^{\frac{1}{2}}$  & generaliter fluxio quantitatis  $\frac{m}{n}$  est  $\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$ .

163. Cor. 3... Fluxio fractionis  $\frac{y}{x}$  seu  $xy^{-1}$  est  $y dx - x dy : yy$ . Nam siar  $x : y = x$ , erit  $x = yx$ ,  $dx = y dx + x dy$  &  $dx = dz : y - x dy : y = dz : y - x dy : yy = y dx - x dy : yy$ : fluxio quantitatis  $ax = y$  est  $am y^{a-1} x^{a-1} dx = ax^{a-1} y^{a-1} dy$  (160).

164. Fluxiones secundæ ex primis fluxionibus, tertie ex secundis, iisdem regulis colliguntur quibus primæ fluxiones ex fluentibus finitis eruuntur. Ubi tamen sic pergitur ad fluxiones secundas, tertias & sequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem considerare, & pro ejus fluxione primâ unitatem scribere, pro secundâ verò & sequentibus nihil (148). Exemplum unicum afferemus; sit querenda fluxio fluxionis  $y dy : dx$ , supponendo quantitatem  $x$  uniformiter fluere, adeoque  $dx$  constantem seu = 1, invenitur fluxio  $y ddy + dy^2 : dx$ .

165. Ex fluxionibus fluentes inveniuntur, operationes instituendo iis contrarias quibus ex fluentibus reperiuntur fluxiones; quare, litterâ S, significante fluentem fluxionis cui præponitur, seu summam primarum incrementorum nascentium, vel ultimam evanescentium (147) methodi fluxionum inverse fundamentates formulæ erunt.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

$$1. S. dz = z. \& S. adz = az. S. dz : a$$

$$2. S. m z^m = \frac{m}{n} dz = z^m,$$

$$\& S. m a z^m = \frac{m}{n} dz = a z^m,$$

$$\& S. \frac{m}{n} z^m = \frac{m}{n} dz = z^m : a.$$

$$3. S. (dz + dy) = z + y.$$

$$4. S. (z dy + y dz) = y z.$$

$$\& S. (a^m y^n z^m = \frac{m}{n} dz + a^n z^m y^{n-1} dy) = a z^m y^n.$$

$$5. S. (y dz - z dy) : yy = z : y.$$

166. Si fluxio, cujus fluens quaeritur, nulli harum formularum similis fuerit, per novarum variarum substitutionem aliasque artes quas hic tractare nobis non licet, ad illas saepe reduci potest. Sit in exemplum fluxio  $cb + cx^{\frac{1}{2}} \times dx$ , ponatur  $cb + cx^{\frac{1}{2}} = z$  & erit  $cb + cx^{\frac{1}{2}} = zz$ , &  $cdx = 2z dz$ , &  $dx = \frac{2z dz}{c}$

adeoque  $cb + cx^{\frac{1}{2}} \times dx = 2zz dz : c$ . Hæc autem fluxio similis est formulæ  $m a z^m = \frac{m}{n} dz$ , estque  $z : z^m = \frac{m}{n}$ , adeoque  $m = 3, m a = 3 a = 2 : c$ , &  $a = 2 : 3 c$ . adeoque  $S. m a z^m = \frac{m}{n} dz = a z^m = 2 z : 3 c$

loco  $z$ , scribatur ipsius valor  $cb + cx^{\frac{1}{2}}$ , & inveniatur  $S. cb + cx^{\frac{1}{2}} \times dx = \frac{2}{3} c (cb + cx) \times cb + cx^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} (b + x) \times cb + cx^{\frac{1}{2}}$ .

167. Superiorum formularum auxilio ex fluxionibus secundis primæ, ex tertiis secundæ &c. inveniuntur. Exempla sint  $S. d dx = dx$ .  $S. d x. d dx = \frac{1}{2} dx dx = \frac{1}{2} dx^2$ . Nam ponatur  $dx = y$ , & erit  $d dx = dy$ , &  $d x. d dx = y dy$ , & per formulam secundam invenitur  $S. y dy = \frac{1}{2} yy$ , & si loco  $y$  substituatur ipsius valor,  $dx$ , erit  $S. y dy = S. dx d dx = \frac{1}{2} dx^2$ . Similiter.  $S. (dy^2 + y d dy) : dx = y dy : dx$ , supponendo  $dx$  constantem, nam fiat  $d dy = dv$ , adeoque  $d y = v$ , & fluxio proposita evadet,  $v dy + y dv : dx$ , cujus fluens (per formulam 4<sup>am</sup>) est  $vy : dx$ , ob  $dx$  constantem. Cum autem sit  $v = dy$ , erit  $vy : dx = y dy : dx$ .

168. Postquam fluentes ex fluxionibus collectæ sunt, si de veritate conclusionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum vicissim colligendæ sunt, & cum fluxionibus sub initio propositis comparandæ. Nam si prodeunt æquales, conclusio rectè se habet; sin minus, corrigendæ sunt fluentes sic, ut earum fluxiones fluxionibus sub initio propositis æquantur. Nam & fluens pro lubitu assumi potest, & assumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis assumptæ æqualem fluxioni propositæ, & terminos homologos inter se comparando.

169. Quoniam constantis quantitatis nulla est fluxio, & eadem proinde fluxio  $dz$  ex fluentibus  $z$ , &  $z + a$ , colligitur; fluens omnis quæ ex fluxione primâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate aliquâ constante; quæ ex fluxione secundâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio secunda nulla est; quæ ex fluxione tertiâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio tertia nulla est. Et sic deinceps in infinitum.

170. Cum fluens composita, quæ ex propositâ fluxione collecta est, unicam variabilem includit, ut fluens  $\frac{2}{3} (b + x) \times bc + cx^{\frac{1}{2}}$ , quæ (166) deducta est ex fluxione  $cb + cx^{\frac{1}{2}} \times dx$ , ita determinari solet constans adjungenda vel detrahenda: in fluente inventâ loco variabilis  $x$ , ponitur 0; tum si fluens ipsa sit etiam 0, completa est. Si quid verò residuum fuerit, ut hic remanet  $+\frac{2}{3} b \sqrt{bc}$ , hæc residuum cum signo contrario fluenti primò inventæ adjicitur, ut habeatur fluens completa,  $\frac{2}{3} (b + x) \times bc + cx^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} b \sqrt{bc}$ . Hujus regulæ ratio est, quod fluens inventa supponi possit exhibere aream curvæ alicujus, cujus sit abscissa variabilis  $x$ , adeo ut dum  $x = 0$ , area, fluente expressâ, sit etiam 0; unde si in fluente primò inventâ loco  $x$ , substituatur 0, sitque aliquod residuum, illud ex fluente detrahi debet. Generaliter, quantitas constans adjicienda vel subducenda ex naturâ quæstionis determinatur, aut arbitraria est.

SECTIO II.

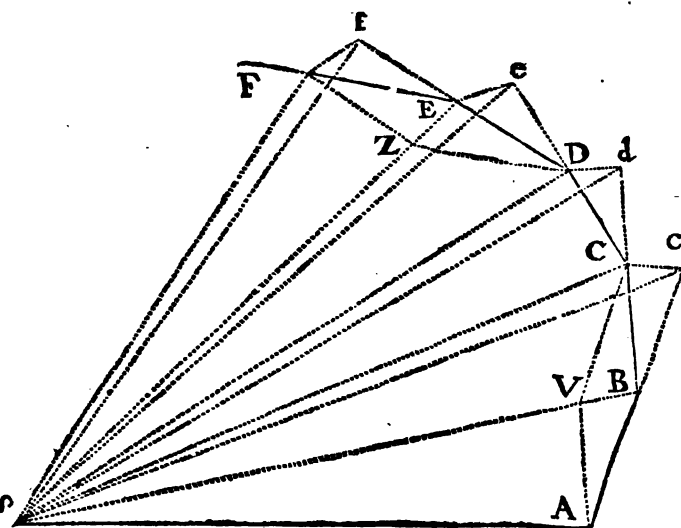
*De inventioque virium centripetarum.*

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Areas; quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.*

Dividatur  
tempus in par-  
tes æquales,  
& primâ tem-  
poris parte  
describat cor-  
pus vi insitâ  
rectam  $AB$ .  
Idem secundâ  
temporis par-  
te, si nil im-  
pediret, rectâ  
pergeret ad  $c$ ,  
(per leg. 1.)  
describens li-

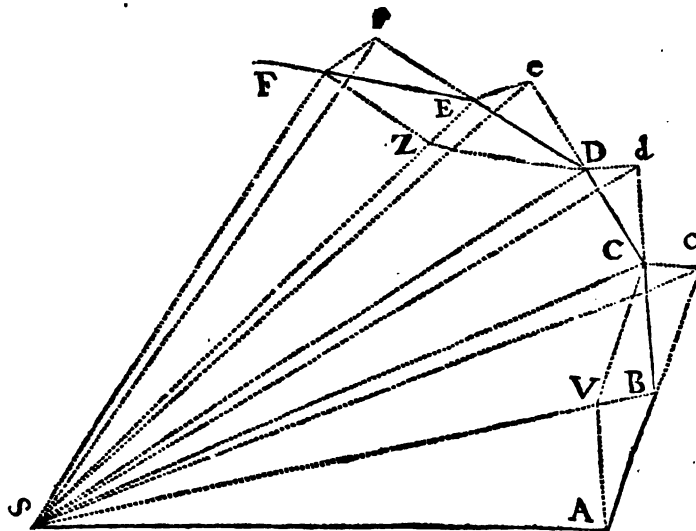


neam  $Bc$  æqualem ipsi  $AB$ ; adeò ut radiis  $AS$ ,  $BS$ ,  
 $cS$  ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ  $ASB$ ,  
 $BS c$ . Verùm ubi corpus venit ad  $B$ , agat vis centripeta  
impulso unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta  $Bc$   
declinet & pergat in rectâ  $BC$ . Ipsi  $BS$  parallela agatur  $cC$ ,  
occurrentes  $BC$  in  $C$ ; & completâ secundâ temporis parte, cor-  
pus (per legum corol. 1.) reperietur in  $C$ , in eodem <sup>(\*)</sup> pla-  
no cum triangulo  $ASB$ . Junge  $SC$ ; & triangulum  $SB C$ ,  
ob parallelas  $SB$ ,  $Cc$ , æquale erit triangulo  $SB c$ , atque ideo  
etiam

(\*) 171. Reperitur in  $C$ , in eodem pla-  
no cum triangulo  $ASB$ ; nam diagonalis  
 $BC$ , quam viribus conjunctis mobile descri-  
bit, est in plano parallelogrammi  $VB Cc$ ,  
cujus latera  $BV$ ,  $Bc$ , viribus separatis de-  
scribenda, sunt in plano trianguli  $ASB$ .  
Tom. I. M

bit, est in plano parallelogrammi  $VB Cc$ ,  
cujus latera  $BV$ ,  $Bc$ , viribus separatis de-  
scribenda, sunt in plano trianguli  $ASB$ .  
M

DE MOTU CORP. LIBER PRIMUS. etiam triangulo  $SAB$ . Simili argumento si vis centripeta successivè agat in  $C, D, E, \&c.$  faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas  $CD, DE, EF, \&c.$  jacebunt hæ omnes in eodem plano ; & triangulum  $SCD$  triangulo  $SB C$ , &  $SDE$  ipsi  $SCD$ , &  $SEF$  ipsi  $SDE$  æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto



describuntur : & componendo , sunt arearum summæ quævis  $SAD S, S A F S$  inter se , ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum ; & eorum ultima perimeter  $A D F$ , ( per corollarium quartum lemmatis tertii ) erit linea curva : ideòque vis centripeta , quâ corpus à tangente hujus curvæ perpetuò retrahitur , aget indefinenter ; areæ verò quævis descriptæ  $SADS, S A F S$  temporibus descriptionum semper proportionales , erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

*Corol. 1.* Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistantibus reciprocè ut perpendicularum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demissum. <sup>(b)</sup> Est enim velocitas in locis illis  $A, B, C, D, E$ , ut sunt bases æqua-

(<sup>b</sup>) 172. Est enim velocitas in locis illis  $A, B, C, D, E$ , ut sunt bases æqualium triangulorum  $AB, BC, CD, DE, EF$ , æqualibus temporibus uniformi motu

descriptæ (<sup>5</sup>) ; æqualium autem triangulorum bases sunt reciprocè ut eorum altitudines , hoc est , reciprocè ut perpendiculara ex centro virium  $S$ , in bases demissa.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 91

qualium triangulorum  $AB, BC, CD, DE, EF$ ; & hæ bases sunt reciproce ut perpendiculara in ipsas demissa.

*Corol. 2.* Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistantibus ab eodem corpore successivè descriptorum chordæ  $AB, BC$  compleantur in parallelogrammum  $ABCU$ , & hujus diagonalis  $BU$  in eâ positione quam ultimò habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producat utrinque; (<sup>c</sup>) transibit eadem per centrum virium.

*Corol. 3.* Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistantibus descriptorum chordæ  $AB, BC$  ac  $DE, EF$  compleantur in parallelogramma  $ABCU, DEFZ$ ; vires in  $B$  &  $E$  sunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium  $BU, EZ$ , ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus  $BC$  &  $EF$  componuntur (per legem corol. 1.) ex motibus  $Bc, BU$  &  $Ef, EZ$ : atqui  $BU$  &  $EZ$ , ipsis  $Cc$  &  $Ff$  æquales, in demonstratione propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in  $B$  &  $E$ , ideòque sunt his impulsibus proportionales.

*Corol. 4.* Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistantibus à motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos, sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bisecant ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. (<sup>d</sup>) Nam hæ sagittæ sunt semissæ diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio.

*Corol.*

fa. Cum igitur evanescentibus triangulis  $ASB, BSC$  &c. ultima perimeter  $ABCDEF$ , sit linea curva quam (113) rectæ  $Ac, Bd, Ce, Df$ , tangunt in punctis  $A, B, C, D, E$ , manifestum est velocitates in illis punctis esse reciproce ut perpendiculara à centro  $S$ , in tangentes demissa.

(<sup>c</sup>) 173. Transibit eadem per centrum virium. Nam ex demonstratione propositionis hujus, sumptâ  $BV = Cc$ , erit  $VC$ , æqualis & parallela lineæ  $Bc$ , seu  $AB$ , adeòque  $VA, BC$ , erunt etiam æquales & parallele, &  $BV$ , quæ producta transit per centrum  $S$ , erit diagonalis parallelogrammi  $ABCV$ .

174. Si ducantur per puncta quævis  $B$  &  $D$ , perimetri curvæ vel diversarum curvarum tangentes  $Bc, De$ , & demittantur angulorum contactuum subtense  $Cc, Ee$ , radiis  $SB, SD$ , ad centrum virium convergentibus parallele, sintque arcus  $BC, DE$ , æqualibus temporibus descripti, patet ex corollario 3. vires centripetas in  $B$  &  $D$ , esse ad invicem in ultimâ ratione subtenfarum  $Cc, Ee$ .

(<sup>d</sup>) 175. Nam hæ sagittæ sunt semissæ diagonalium  $BV, EZ$ , diagonales enim  $AC, DF$ , quæ sunt chordæ arcuum evanescentium  $ABC, DEF$ , alias diagonales  $BV, EZ$ , bisecant.

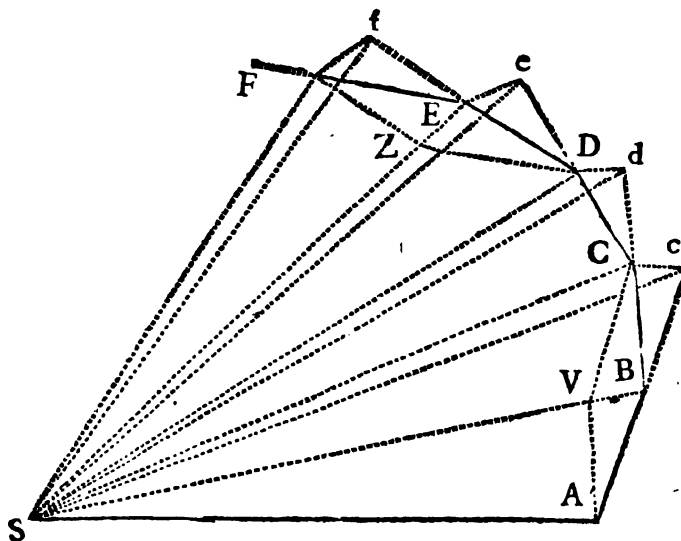


## 92 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo- *Corol. 5.* Ideoque vires eadem sunt ad (°) vim gravitatis;  
 TU COR- ut hæ sagittæ ad sagittas horizonti perpendiculares arcuum pa-  
 PORUM. rabolicorum, quos projectilia eodem tempore describunt.  
 LIBER *Corol. 6.* Eadem omnia obtinent per legum corol. v. ubi  
 PRIMUS. plana, in quibus corpora moventur, unà cum centris virium,  
 quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed moventur uniformi-  
 ter in directum.

### PROPOSITIO II. THEOREMA II.

*Corpus omne, quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano de-  
 scriptâ, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu  
 rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum  
 illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripetâ tenden-  
 te ad idem punctum.* *Cas.*



(°) 176. Vis enim gravitatis per li-  
 neas parallelas ad horizontem perpendicu-  
 lares agit, & gravia obliquè projecta pa-  
 rabolas describunt (40), quod etiam in

figurâ superiori contingeret; si centrum  
 virium S, in infinitum abiret, & vis cen-  
 tripeta in omnibus punctis A, B, C, D,  
 eadem maneret.

*Caf. 1.* Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, DE MO-  
detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agen- TU COR-  
tem ( per leg. 1. ) Et vis illa, quâ corpus de cursu rectilineo PORUM.  
detorquetur, & cogitur triangula quam minima  $SAB$ ,  $SBc$ , LIBER  
 $SCD$ , &c. circa punctum immobile  $S$  temporibus æqualibus PRIMUS.  
æqualia describere, (  $f$  ) agit in loco  $B$  secundum lineam pa-  
rallelam ipsi  $cC$  ( per prop. XL lib. 1. elem. & leg. 11. ) hoc  
est, secundum lineam  $BS$ ; & in loco  $C$  secundum lineam ip-  
si  $dD$  parallelam, hoc est, secundum lineam  $SC$ , &c. Agit  
ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud im-  
mobile  $S$ . Q. E. D.

*Caf. 2.* Et, per legum corollarium quintum, perinde est ;  
sive quiescat superficies, in quâ corpus describit figuram cur-  
vilineam, sive moveatur eadem unâ cum corpore, figurâ de-  
scriptâ, & puncto suo  $S$  uniformiter in directum.

*Corol. 1.* In spatiis vel mediis non resistentibus, si areae non  
sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concur-  
sum radiorum; (  $g$  ) sed indè declinant in consequentia, seu  
versus plagam in quam fit motus, si modo arearum descriptio  
acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia.

*Corol.*

(  $f$  ) 177. Agit in loco  $B$ , secundum  
lineam parallelam ipsi  $Cc$ , hoc est, se-  
cundum lineam  $BS$ ; nam solâ vi insitâ in  
 $A$ , corpus uniformi cum motu progredere-  
tur per rectam  $ABc$ , & æqualibus tem-  
poribus æquales lineas  $AB$ ,  $Bc$ , descri-  
beret; verum per vim centripetam in  $B$ ,  
detorquetur à rectâ  $Bc$ , ut aliam rectam  
 $BC$ , eodem tempore describat quo de-  
scripsisset  $Bc$ ; adeoque junctâ  $Cc$ , vis  
centripeta agit in  $B$ , secundum directio-  
nem parallelam ipsi  $Cc$  ( per coroll. 1.  
Leg. ), sed ob  $AB = Bc$ , & ob trian-  
gulum  $SBc$ , æquale triangulo  $SAB$ ,  
( per hyp. ), erit triangulum  $SAB =$  triang.  
 $SBc =$  triang.  $SBc$ , adeoque per prop.  
40. vel 39. lib. 1. Elem. communis triangu-  
lorum  $SBc$ ,  $SBc$  æqualium basis  $BS$ , pa-  
rallala est rectâ  $Cc$ , quæ illorum trian-  
gulorum vertices jungit; cum igitur, per  
demonstrata, vis centripeta in  $B$ , agat

secundum directionem parallelam lineæ  
 $Cc$ , necessum est ut agat secundum di-  
rectionem rectæ  $BS$ , hoc est, ut tendat  
ad centrum  $S$ .

(  $g$  ) 178. Sed indè declinant in con-  
sequentia, si modò arearum descriptio ac-  
celeratur: sin retardatur, declinant in an-  
tecedentia. Nam si triangulum  $SBc$ ,  
æquale non est triangulo  $SAB$ , seu  $SBc$ ,  
eodem tempore descripto, recta  $Cc$ , non  
erit parallela lineæ  $BS$ , sed producta cum  
lineâ  $SB$ , itâ converget ut tendat in pla-  
gam motûs, si triangulum  $SBc$ , trian-  
gulo  $SBc$ , majus est, & tendat in plagam  
contrariam si triangulum  $SBc$ , triangu-  
lo  $SBc$ , minus. Quare vis centripeta in  
 $B$ , agens secundum directionem paralle-  
lam lineæ  $Cc$ , in primo casu declinat  
in consequentia, in secundo casu declinat  
in antecedentia.

# 94 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Corol. 2. (h) In mediis etiam resistantibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant à concursu radiorum versus plagam, in quam fit motus.

## Scholium.

Urgeri potest corpus à vi centripetâ compositâ ex pluribus viribus. In hoc casu sensus propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum S. (i) Porro si vis aliqua agat perpetuò secundum lineam superficiæ descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus defleatur à plano sui motus: sed quantitatem superficiæ descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

## PROPOSITIO III. THEOREMA III.

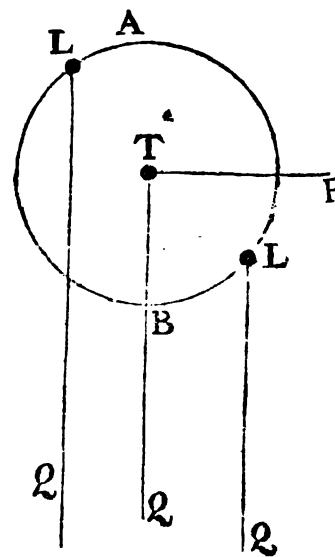
*Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcumque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.*

(h) Sit corpus primum L, & corpus alterum T: & (per legum

(h) 179. Cum enim medium resistat accelerationi descriptionis arearum, liquet arearum descriptionem etiam sublatâ mediæ resistantiæ accelerari oportere, ac proinde per Coroll. 1. virium directiones declinare à concursu radiorum, in S, versus plagam in quam fit motus.

(i) 180. Porro si vis illa perpetuò secundum lineam superficiæ descriptæ perpendicularem agat, planum subiectum duntaxat premit, & corpus in illo plano motum in neutram partem impellit, ac proinde nec superficiæ descriptæ quantitatem augeat nec minuit, & propterea in compositione virium in plano agentium negligenda est.

(\*) 181. Corpus L, circa alterum T, in curvâ A L B, ita revolvatur, ut circa illius centrum T, semper describat areas temporibus proportionales, dum interim corpus T, urgetur vi acceleratrice secundum directionem T Q, & per Leg. Coroll. 6. si vi novâ acceleratrice quæ æqualis & contraria sit illi quâ corpus T



secundum directionem T Q urgetur; urgea-

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

95

legum corol. vi.) si vi novâ, quæ æqualis & contraria sit illi, DE Mo-  
quâ corpus alterum  $T$  urgetur, urgeatur corpus utrumque se-  
cundum lineas parallelas; perget corpus primum  $L$  describere <sup>TU COR-</sup>  
circa corpus alterum  $T$  areas easdem ac prius: vis autem, qua <sup>PORUM.</sup>  
corpus alterum  $T$  urgebatur, jam destruetur per vim sibi æ-  
qualem & contrariam; & propterea (per leg. i.) corpus illud  
alterum  $T$  sibi met ipsi jam relictum vel quiescet, vel movebi-  
tur uniformiter in directum: & corpus primum  $L$  urgente dif-  
ferentiâ virium, id est, urgente vi reliquâ perget areas tem-  
poribus proportionales circa corpus alterum  $T$  describere. Ten-  
dit igitur (per theor. i i.) differentia virium ad corpus illud al-  
terum  $T$  ut centrum. *Q. E. D.*

*Corol. 1.* Hinc si corpus unum  $L$  radio ad alterum  $T$  ducto  
describit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (si-  
ve simplici, sive ex viribus pluribus juxta legum corollarium se-  
cundum compositâ) quâ corpus prius  $L$  urgetur, subducatur  
(per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, qua cor-  
pus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urge-  
tur, tendet ad corpus alterum  $T$  ut centrum.

*Corol. 2.* Et, si areae illæ sunt temporibus quamproximè pro-  
portionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum  $T$  quampro-  
ximè.

*Corol. 3.* Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproximè  
ad corpus alterum  $T$ , erunt areae illæ temporibus quamproximè  
proportionales.

*Corol. 4.* Si corpus  $L$  radio ad alterum corpus  $T$  ducto de-  
scribit areas, quæ, cum temporibus collatæ, sunt valde inæqua-  
les; & corpus illud alterum  $T$  vel quiescit, vel movetur uni-  
for-

geatur corpus utrumque secundum li-  
neas parallelas  $QT$ ,  $QL$ ; perget corpus  
 $L$ , describere circa corpus  $T$ , areas eas-  
dem ac prius; vis autem acceleratrix quâ  
corpus  $T$  urgebatur jam destruetur per  
vim sibi æqualem & contrariam; & prop-  
terea, per Leg. i. corpus illud  $T$ , sibi  
met ipsi jam relictum vel quiescet vel mo-

vebitur uniformiter in directum; nimirum  
quiescet, si nullâ aliâ vi præter accelera-  
tricem secundum directionem  $TQ$ , antè  
urgebatur; movebitur verò æquabiliter per  
rectam aliquam  $TF$ , si præter vim acce-  
leratricem per  $TQ$ , agentem, aliâ vi non  
acceleratrice ferebatur juxta directionem  
 $TF$ , &c.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

formiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum  $T$  tendentis vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subtractionem vis totius in corpus illud alterum  $T$  agentis.

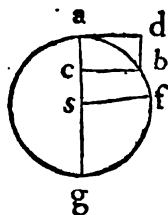
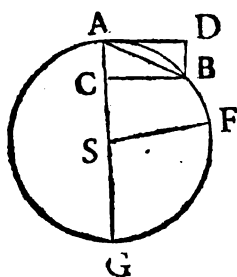
### Scholium.

Quoniam æquabilis arearum descriptio index est centri, quod vis illa respicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur à motu rectilineo, & in orbita sua retinetur; quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

### PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

*Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.*

(<sup>1</sup>) Tendunt hæ vires ad centra circulorum per prop. 11. & corol. 2. prop. 1. & sunt inter se ut arcuum æqualibus tempo-



describant, & areæ seu sectores ASF, FSG, & asf, fsg, erunt in singulis circulis ut arcus AF, FG, & af, fg; hoc est (5) ut tempora quibus describuntur, ac proinde vires quibus corpora A & a, in peripheriis ABGA, abga retinentur, tendunt ad centra S & s. Sint arcus AB, ab, æqualibus temporibus quam minimis descripti, & ductis tangentibus AD, ad, & ad eas perpendicularibus BD, bd, completisque parallelogrammis CD, cd, vires centripetæ in A & a, erunt inter se ut rectæ Db, db, seu ut sinus versî AC, ac, (174). Verum

(<sup>1</sup>) 182. Corpora duo A & a, circulos ABGA, abga, æquabili motu

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 97

poribus quàm minimis descriptorum sinus versi per corol. 4. DE MOTU CORP. 1. hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circularum applicata per *lem. VII.* & propterea, cum hi arcus sint ut arcus temporibus quibuscvis æqualibus descripti, & diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circularum.

*Q. E. D.*

*Corol. 1.* Cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, & ratione simplici radiorum inversè. <sup>(m)</sup>

*Corol. 2.* <sup>(n)</sup> Et, cum tempora periodica sint in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, & ratione velocitatum inversè; <sup>(o)</sup> vires centripetæ sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, & ratione duplicatâ temporum periodicorum inversè.

*Corol. 3.* <sup>(p)</sup> Unde si tempora periodica æquantur, & prop-

rùm ductis chordis  $AB$ ,  $ab$ , est  $AC:AB=AB:AG$ , &  $ac:ab=ab:ag$ , undè  $AC=\frac{AB^2}{AG}$ , &  $ac=\frac{ab^2}{ag}$ ; cum igitur chordæ & arcus nascentes æquales sint (per *lem. VII.*) erit  $AC:ac$ , hoc est, vis centripeta in  $A$ , ad vim centripetam in  $a$ , ut quadratum arcus evanescentis  $AB$  diametro  $AG$  divisum, ad quadratum arcus evanescentis,  $ab$ , diametro  $ag$ , divisum; & propterea cum hi arcus & c.

<sup>(n)</sup> 183. Vis centripeta quâ corpus in peripheriâ circuli uniformiter incedens retinetur, est in omnibus peripheriæ punctis eadem, ut pote semper proportionalis constantis velocitatis quadrato ad radium constantem applicato.

<sup>(o)</sup> 184. Tempora periodica, hoc est, tempora quibus integræ peripheriæ describuntur, sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè & ratione velocitatum inversè. Nam <sup>(s)</sup> velocitates sunt ut peripheriæ ad tempora periodica applicatæ, sed peripheriæ sunt ut radii, ergo velocitates sunt ut radii ad tempora periodica applicati, ac proinde tempora periodica sunt ut

*Tem. L*

radii directè & velocitates inversè. Si corporum  $A$  &  $a$ , tempora periodica dicantur  $T$  &  $t$ , celeritates  $C$  &  $c$ , radii  $AS$ ,  $as$ , dicantur  $R$  &  $r$ , erit  $C:c=\frac{R}{T}:\frac{r}{t}$  ideòque  $T:t=\frac{R}{C}:\frac{r}{c}$ .

<sup>(o)</sup> 185. Vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circularum radios; nam vires centripetæ corporum  $A$  &  $a$ , dicantur  $V$  &  $v$ , erit (per coroll. 1.)  $V:v=\frac{C^2}{R}:\frac{c^2}{r}$ , sed quoniam (184)  $C:c=\frac{R}{T}:\frac{r}{t}$ ,

$$\text{adeòque } C^2:c^2=\frac{R^2}{T^2}:\frac{r^2}{t^2} \text{ erit } \frac{C^2}{R}:\frac{c^2}{r}=\frac{R}{T^2}:\frac{r}{t^2} \\ =\frac{R}{T^2}:\frac{r}{t^2} \text{ ergò } V:v=\frac{R}{T^2}:\frac{r}{t^2}=t^2R:T^2r \\ =\frac{r^2}{r}:\frac{T^2}{R}.$$

<sup>(p)</sup> 186. Unde si tempora periodica æquantur & propterea (184) velocitates sint ut radii, erunt etiam vires centripetæ ut radii, nam cum sit (185)  $V:v=t^2R:T^2r$ , si  $T^2=t^2$ , erit  $V:v=R:r$ .

*N*

*E*

propterea velocitates sint ut radii; erunt etiam vires centri-  
petæ ut radii: & contra.

*Corol. 4.* (q) Si & tempora periodica, & velocitates sint  
in ratione subduplicatâ radiorum; (r) æquales erunt vires cen-  
tripetæ inter se: & contra.

*Corol. 5.* (f) Si tempora periodica sint ut radii, & propterea ve-  
locitates æquales; vires centripetæ erunt reciprocè ut radii: & contra.

*Corol. 6.* (t) Si tempora periodica sint in ratione sesquipli-  
catâ radiorum, & propterea velocitates reciprocè in radiorum  
ratione subduplicatâ; (u) vires centripetæ erunt reciprocè ut  
quadrata radiorum: & contra. *Corol.*

Et contrâ si vires centripetæ sint ut  
radii, tempora periodica æquantur.  
Cum enim sit (185)  $V:v = t^2 R : T^2 r$ ,  
si ponatur  $V:v = R:r$ , erit  $R:r = t^2 R : T^2 r$ ,  
unde  $r t^2 R = R T^2 r$ , adeoque  $t^2 = T^2$ , &  $t = T$ .

(q) 187. Si tempora periodica sint in  
ratione subduplicatâ radiorum, velocita-  
tes erunt in eadem ratione. Nam (184)

$$C:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t} \text{ adeoque } C:c = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$$

Undè si fuerit  $T:t = R^2:r^2$  ac proin-  
dè  $T^2:t^2 = R:r$ , erit  $C:c = R:r$ .

Et contrâ si fuerit  $C:c = R:r$ , erit  
 $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = R:r$ , adeoque  $\frac{R}{T^2} = \frac{r}{t^2}$ , &  
 $R t^2 = r T^2$ , unde  $T^2:t^2 = R:r$ .

(r) 188. Si & tempora periodica ac  
proindè velocitates (187) sint in ratione  
subduplicatâ radiorum, æquales erunt vi-  
res centripetæ inter se. Cum sit (185)  
 $V:v = t^2 R : T^2 r$ , si ponatur  $T^2:t^2 = R:r$ ,  
erit  $t^2 R = T^2 r$ , unde  $V=v$ .

Et contrâ si  $V=v$ , cum sit (185)  $V:v = t^2 R : T^2 r$ , erit  $t^2 R = T^2 r$ , & proin-  
dè  $T^2:t^2 = R:r$ .

(f) 189. Si tempora periodica sunt ut  
radii & propterea (184) velocitates æ-  
quales, vires centripetæ erunt reciprocè  
ut radii. Quoniam enim (per coroll. 1.)

$$V:v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}, \text{ si } C^2=c^2, \text{ erit } V:v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}.$$

Et contrâ si fuerit  $V:v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$ , cum

$$\text{sit (coroll. 1.) } V:v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r} \text{ erit } \frac{1}{R} : \frac{1}{r} = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}, \text{ adeoque } C^2=c^2, \text{ \& } C=c.$$

(t) 190. Si tempora periodica sint in  
ratione sesquiplicatâ radiorum, erunt ve-  
locitates reciprocè in ratione radiorum sub-  
duplicatâ; nam quoniam (184)  $C:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ ,  
adeoque  $C^2:c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$  si  
fuerit  $T^2:t^2 = R:r$ , erit  $C^2:c^2 = \frac{R^2}{R} : \frac{r^2}{r} = R:r$ .

Et contrâ si fuerit  $C^2:c^2 = R:r$ ,  
erit  $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = R:r$ , adeoque  $\frac{R}{T^2} = \frac{r}{t^2}$ ,  
&  $R:t^2 = T^2:r$ .

(u) 191. Si tempora periodica sint  
in ratione sesquiplicatâ radiorum & prop-  
terea (190) velocitates reciprocè in ra-  
diorum ratione subduplicatâ, vires cen-  
tripetæ erunt reciprocè ut quadrata ra-  
diorum. Nam cum sit (185)  $V:v = t^2 R : T^2 r$ ,  
si fuerit  $T^2:t^2 = R:r$ ,  
erit  $V:v = r^2 R : R^2 r = r^2 : R^2$ .

Et contrâ si  $V:v = r^2 : R^2$ , erit (185)  
 $r^2 : R^2 = t^2 R : T^2 r$  ac proindè  $t^2 R = T^2 r$ ,  
&  $R:t^2 = T^2:r$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 99

*Corol. 7.* Et universaliter, si (x) tempus periodicum sit ut radii  $R$  potestas quælibet  $R^n$ , & propterea velocitas reciproce ut radii potestas  $R^{n-1}$ ; (y) erit vis centripeta reciproce ut radii potestas  $R^{2n-1}$ : & contra.

*Corol. 8.* (z) Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque similibus, centraque in figuris illis similiter posita habentium, par-

(x) 192. Si tempora periodica sint ut radiorum potestates quælibet  $R^n, r^n$ , velocitates erunt reciproce ut radiorum potestates  $R^{n-1}, r^{n-1}$ . Nam ponatur  $T:t = R:r^n$ , & quoniam (184)

$$G:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}, \text{ erit } C:c = \frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n} \\ = \frac{1}{R^{n-1}} : \frac{1}{r^{n-1}} = r^{n-1} : R^{n-1}.$$

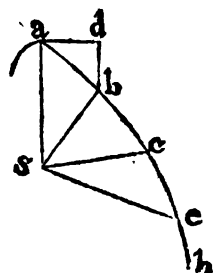
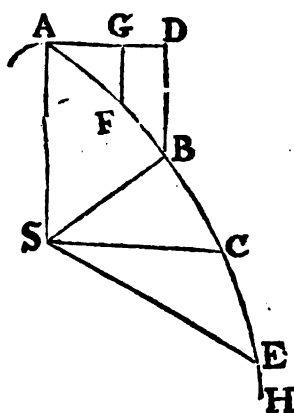
Et contrà si fuerit  $C:c = r^{n-1} : R^{n-1}$ , erit  $\frac{1}{T} : \frac{1}{t} = r^{n-1} : R^{n-1}$ , adeoque

$$\text{que } \frac{R^n}{T} = \frac{r^n}{t}, \text{ undè } R^n:r^n = T:t.$$

(y) 193. Et universaliter si tempora periodica sint ut radiorum potestates quælibet  $R^n, r^n$ , & propterea (192) velocitates reciproce ut radiorum potestates  $R^{n-1}, r^{n-1}$ , erunt vires centripetæ reciproce ut radiorum potestates  $R^{2n-1}, r^{2n-1}$ . Nam ponatur  $T:t = R:r^n$ , adeoque  $T^2:t^2 = R^2:r^{2n}$ : & cum sit (185)  $V:v = t^2 R:T^2 r$ , erit  $V:v = R r^{2n} : r R^2 = r^{2n-1} : R^{2n-1}$ .

Et contrà si fuerit  $V:v = r^{2n-1} : R^{2n-1}$ ; cum sit  $V:v = t^2 R:T^2 r$ , erit  $r^{2n-1} : R^{2n-1} = t^2 R:T^2 r$ , adeoque  $t^2 R^2 = T^2 r^{2n}$ , undè  $T^2:t^2 = R^2:r^{2n}$  &  $T:t = R:r^n$ .

(z) 194. Corpora A & a, figurarum similibus ABH, abh, centra S, s, in figuris illis similiter posita habentium, partes similes ABE, abe, ità describant ut arcus ASB, ASC &c. asb, asc &c. circa centra S, s, in singulis figuris descriptæ temporibus quibus describuntur sint respectivè proportionales, & per prop. 11. vires centripetæ ad centra S, s, ten-



dent. Per puncta A & a, in curvis similiter posita agantur tangentes AD, ad, sineque arcus minimi, AF, ab, eodem tempore in utraque curvâ descripti, & ductis rectis FG, bd, radiis vectoribus AS, as, parallelis, vis centripeta in A, est ad vim centripetam in a, ut FG, ad bd, (174). Sumatur autem



# 100 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORP. LIBER PRIMUS.  
partes describunt; consequuntur ex demonstratione præcedentium ad hosce casus applicatâ. Applicatur autem substituendo æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, & distantias corporum à centris pro radiis usurpando.

Co-

arcus AB similis ab; (ita ut sit  $as : AS = a : AB$ , ac proinde sit  $AB = \frac{ab \times AS}{as}$ ) ducaturque BD radio AS

parallela, erit per coroll. 1. Lem. x1.  $FG : BD = AF : AB$ , & quia figuræ ABD & abd, sunt similes, est  $BD : bd = AB : ab$ , itaque per compositionem rationis est  $FG : bd = AF : ab$  &  $AF : ab = AF^2 : ab^2$

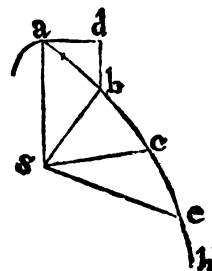
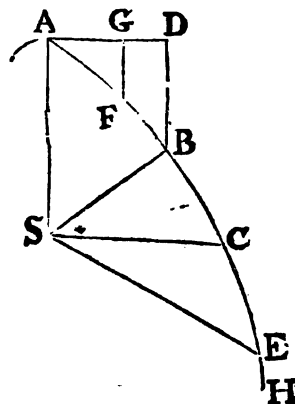
$AB \times a : b$  (& quia  $AB = \frac{ab \times AS}{as}$ )

$= AF^2 : \frac{ab \times AS}{as} \times ab = \frac{AF^2}{AS} : \frac{ab^2}{as}$ .

Cum igitur demonstratum fuerit vires centripetæ in A & a, esse inter se ut sunt GF, bd, erunt vires illæ ut quadrata arcuum AF, ab, simul descriptorum applicata ad radios homologos AS, as.

195. Coroll. 1. Quoniam velocitates finitæ corporum A & a, per arcus nascentes AF, ab, sunt uniformes, erunt illæ ut arcus AF, ab, æqualibus temporibus descripti (5). Unde vires centripetæ in A, & a, erunt ut velocitatum in A & a, quadrata, ad radios AS, as applicata.

196. Coroll. 2. Figuræ similes ASE, ase, divisæ concipiantur in innumeros sectores æquales ASB, BSC &c., & asb, bsc, &c. sibi mutuò in duabus figuris similes, & ob æquabilem arearum seu sectorum in singulis figuris descriptionem, sectores æquales æqualibus temporibus describentur, ac proinde arcus AB, BC, & arcus ab, bc, &c. æqualibus respectivè temporibus percurrentur: erit igitur tempus per AB, ad tempus per ab, ut tempus per AE, ad tempus per ae, hoc est, tempora quibus describuntur arcus similes AB, ab, sunt ut tempora quibus describuntur alii quicumque similes arcus, AE, ae, adeoque ut tempora periodica. Cum igitur (195) velocitates in A & a, sint inter se ut arcus AB, ab, ad sua



respectivè tempora applicati, erunt quæque velocitates illæ inter se ut arcus AB, ab, seu ob figurarum similitudinem, ut radii AS, as, ad tempora periodica applicati, id est, celeritates in punctis correspondētibz A & a, sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum homologorum directè & ratione temporum periodicorum inversè, adeoque tempora periodica sunt ut radii directè & velocitates inversè.

197. Coroll. 3. Celeritates in A & a, dicantur

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 101

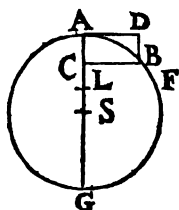
*Corol. 9.* <sup>a</sup> Ex eâdem demonstratione consequitur etiam; **DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.**  
quod arcus, quem corpus in circulo datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo tempore quovis describit, medius est pro-

dicantur  $C, c$ , vires centripetæ  $V, v$ , radii vectores homologî  $R, r$ ; tempora periodica  $T, t$ , & erit (196)  $C:c = \frac{R}{T} = \frac{r}{t}$ ,  
&  $T:t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$ , &  $C^2:c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$ .  
Et quoniam (195)  $V:v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$ ,

erit  $V:v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 : R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$ , hoc est, vires centripetæ sunt

reciprocè ut quadrata temporum periodicorum ad radios homologos applicata. Cum igitur cætera omnia de temporibus, velocitatibus & viribus in circulis corollaria, ex superioribus proportionibus deducta sint, evidens est eadem omnia convenire temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcumque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt.

(<sup>a</sup>) 198. Corpus A uniformiter revolvatur in circuli peripheriâ ABGA, & idem vel aliud corpus ex puncto A, per radium AS, eâdem vi centripetâ quâ corpus A in circuli peripheriâ retinetur continuè ita urgeatur ut (vi illâ centripetâ constanti permanente; quemadmodum fit in corporibus vi gravitatis constante cadentibus) corpus illud eadendo percurrat AL, eodem tempore quo corpus A, uniformiter describit arcum AF. Quoniam vis acceleratrix per radium AS, constans est & continuè agit (per hyp.) corpus per AS, motu uniformiter accelerato cadit (25) & spatia percurra sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur (27), ducatur per A, tangens AD, & sumpto arcu minimo AB, in tangentem demittatur perpendicularis BD, & compleatur rectangulum CD, eo-



dem tempore quo corpus A, æquabili motu describit arcum AB, per vim centripetam percurrit DB, seu AC, (ex coroll. 3. Prop. 1<sup>æ</sup>.) erit igitur AC, ad AL, ut quadratum temporis per AB, ad quadratum temporis per AF, hoc est, ob motum in circulo æquabilem AC:

$AL = AB^2 : AF^2 = \frac{AB^2}{AG} : \frac{AF^2}{AG}$ ; cum igitur ob arcum nascentem AB, suæ chordæ æqualem, sit  $AC = \frac{AB^2}{AG}$ , erit

quoque  $AL = \frac{AF^2}{AG}$  atque adeò  $AL \times$

$AG = AF^2$  & proinde  $AL : AF = AF : AG$ .

199. Coroll. 1. Velocitas quâ corpus A, peripheriam circuli AFGA, uniformiter describit, æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per dimidium radium AS, si vi centripetâ constanti continuè urgeretur æquali illi quâ corpus A in peripheriâ circuli retinetur: Nam sit AL altitudo per quam A cadere debet ut acquirat velocitatem quâ peripheriâ circuli describitur, sitque AF arcus eo tempore descriptus quo A cadit per AL eodem etiam tempore motu æquabili percurreretur, 2 AL per velocitatem eam in L acquisitam (30), adeoque erit  $AF = 2 AL$  siquidem eodem tempore eademque celeritate æquabili percurruntur, sed est semper  $AF^2 = AL \times AG$  (198) cum igitur sit  $2 AL = AF$  ac proinde  $4 AL^2 = AF^2$  erit  $4 AL^2 = AL \times AG$  &  $4 AL = AG$  &  $AL = \frac{AG}{4} = \frac{AS}{2}$ .

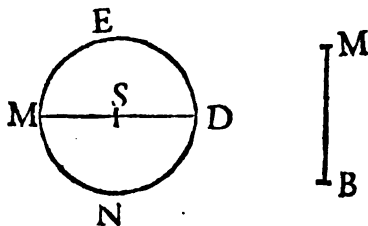
200. Coroll. 2. Tempus revolutionis per integram peripheriam est ad tempus descensus uniformiter accelerati per dimidium radium, ut peripheria ad radium. Nam eodem tempore quo dimidius radius motu uniformiter accelerato percurritur, totus radius describeretur cum æquabili velocitate lapsa per dimidium radium acquisitâ (30) eâ verò ipsâ celeritate corpus circuli peripheriam

# 102 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM. portionalis inter diametrum circuli, & descensum corporis eâdem  
data vi eodemque tempore cadendo confectum. Scho-

LIBER (199) describit. Ergo cum spatia eâdem ve-  
PRIMUS. locitate uniformi percurâ, sint ut tempo-  
ra (5) patet propositum.

201. Coroll. 3. Hinc datâ vi centri-  
petâ quâlibet in datâ à centro distantia,  
facile est reperire velocitatem quâ corpus  
proijci debet ut circâ prædictum centrum  
in datâ distantia circum uniformiter de-  
scribat; velocitas enim illa æqualis est  
velocitati quam corpus acquireret caden-  
do per dimidiam distantiam à centro, si  
datâ vi centripetâ continuò urgeretur (199).  
Dato autem circuli radio, datur periphe-  
ria, & datâ æquabili in circulo velocitate  
cum peripheriâ, invenitur tempus perio-  
dicum, & arcus dato quovis tempore de-  
scriptus habetur.



202. Coroll. 4. Datis circuli radio &  
velocitate corporis in eo revolvantis, fa-  
cile colligitur proportio vis centripetæ in  
eo circulo ad vim quamlibet notam, qualis  
est vis gravitatis. Primum enim inveniatur  
tempus revolutionis unius in eo circulo per-  
actæ (5), mox inveniatur tempus quo cor-  
pus vi illâ centripetâ continuò sollicitatum  
per dimidium radium caderet (200). Ex  
datâ autem vi gravitatis seu ex dato spatio  
quod grave liberè cadendo, dato quodam  
tempore percurrit, invenitur (27) spatium  
ab eodem gravi percursum eo tempore quo  
corpus vi centripetâ sollicitatum per dimi-  
dium radium cadit, sed vires acceleratrices  
constantes, rationem habent spatiorum  
quæ dato tempore percurrere faciunt (30)  
est ergo vis ea centripeta ad vim gravitatis,  
ut dimidius circuli radius ad spatium id  
quod grave percurreret eo tempore quo

corpus vi centripetâ sollicitatum dimidium  
illum radium percurrit.

Exempli causâ. Corpus M, ope fili MS  
clavo in S alligati, circâ centrum S. uni-  
formiter describat circum MNDE, in  
plano horizontali positum, eaque sit cor-  
poris revolvantis celeritas quæ acquiritur  
à gravi per altitudinem MB cadente,  
queritur ratio vis centripetæ in circulo  
ad vim gravitatis. Tempus quo grave ca-  
dit per altitudinem MB, dicatur T, &  
velocitas in B acquisita, quâ (ex hyp.)  
corpus M circuli peripheriam uniformi-  
ter describit, erit  $\frac{2 MB}{T}$  (30), periphe-  
ria circuli dicatur p, & cum tempus pe-  
riodicum in circulo sit æquale periphe-  
riæ ad velocitatem  $\frac{2 MB}{T}$  applicatæ (5)

erit id Tempus Periodicum  $\frac{p \times T}{2 MB}$ ; jam  
verò est peripheria ad radium (200) ut  
tempus Periodicum ad tempus quo corpus  
M, solâ vi centripetâ constante sollicita-  
tum, dimidium radium MS percurrit, sive  
 $p : MS = \frac{p \times T}{2 MB}$  ad tempus per dimidium

radium quod est idèò  $\frac{T \times MS}{2 MB}$ . Cum  
autem grave tempore T altitudinem MB  
sit emensum, & in motu uniformiter acce-  
lerato spatia percurâ sint ut quadrata tem-  
porum quibus percurruntur (27) erit  $T^2$  ad  
 $\frac{T^2 \times MS^2}{4 MB^2}$ , seu  $4 MB^2$  ad  $MS^2$  ut spa-  
tium MB tempore T percursum ad spatium  
percursum tempore  $\frac{T \times MS}{2 MB}$ , quo corpus  
M, vi centripetâ percurrit dimidium ra-  
dium, quod erit  $\frac{MS^2 \times MB}{4 MB^2} = \frac{MS^2}{4 MB}$   
est igitur (13) vis centripeta in cir-  
culo ad vim gravitatis ut  $\frac{MS}{2}$ , ad  $\frac{MS^2}{4 MB}$ ,  
sive ut  $2 MB$  ad  $MS$ .

*Scholium.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

(<sup>b</sup>) Casus corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus, (ut seorsum collegerunt etiam nostrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrecentem in duplicatâ ratione distantiarum à centrīs, decrevi fusiùs in sequentibus exponere.

Porro præcedentis propositionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam si corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem ex descensu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus corol. ix. Et (<sup>c</sup>) hujusmodi propositionibus *Hugenius* in eximio suo tractatu *de Horologio Oscillatorio* vim gravitatis cum revolvantium viribus centrifugis contulit.

(<sup>d</sup>) Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur polygonum laterum quotcunque. Et si corpus in polygoni lateribus datâ cum velocitate

(<sup>b</sup>) 203. Ex observationibus colligunt astronomi planetas secundarios, ut sunt Jovis vel Saturni Satellites, radiis ad suum planetam primum ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiquadratâ distantiarum à centro planetæ primarii; planetas verò primarios radiis ad solem ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiquadratâ radiorum. Quare casus corollarii VI. in corporibus cœlestibus obtinet, id est, planetarum velocitates sunt reciproce in ratione subduplicatâ radiorum, & vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata radiorum.

(<sup>c</sup>) 204. *Hugenius* ad calcem tractatus *de horologio oscillatorio*, de viribus centrifugis in circulo earumque cum vi gravitatis

proportione 13. theoremata sine demonstratione proposuit. Eorum aliqua in corollariis propos. hujusce IV. demonstravit *Newtonus*, viamque aperuit, cui insistendo cætera omnia facili negotio absolvi possunt, quod postea perfecerunt multi insignes Mathematici.

(<sup>d</sup>) 205. Duo intelligantur polygona similia & regularia circulis duobus inscripta, quorum latera numero crescant & longitudine minuantur in infinitum, & corpora duo in polygonorum lateribus æquabili velocitate ferantur, atque ad singulos angulos à circulo reflectantur. Manifestum est corporum in polygonis revolvantium vires centrifugas non esse mensurandas ex solâ velocitate quâ in singulis angulis incurrunt in circulum & quâ ab illo reflectuntur, sed intus habendam esse rationem frequentiarum impactuum aut

DE MOTU  
CORPORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

tate movendo ad ejus angulos singulos à circulo reflectatur; vis, quâ singulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejusdem ad circuli prædicti radium; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, si polygonum lateribus infinitè diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; & huic æqualis est vis contraria, quâ circulus continuo repellit corpus centrum versus.

P R O-

aut reflexionum; ita ut si eadem fuerit duorum corporum revolvendum celeritas, vires centrifugæ sint ut numeri impactuum aut reflexionum tempore dato peractarum; nam quò plures sunt tempore dato impactus & reflexiones, eò magis corpus circulum urget, ut à centro recedat & viceversâ eò magis ad centrum urgetur per circuli reactionem æqualem & contrariam actioni. Quare si varia fuerit corporum in polygonis revolvendum celeritas æqualis, vires centrifugæ erunt ut velocitates & numeri impactuum seu reflexionum tempore dato peractarum conjunctim. Est autem numerus reflexionum tempore dato ut numerus laterum polygoni eo tempore descriptorum. Porro si eadem supponatur in utroque polygono velocitas, numeri laterum eodem tempore descriptorum erunt reciprocè ut latera singula; quo enim majora sunt latera, eo minor eorum numerus dato tempore datæque velocitate percurritur; quare manente eâ-

dem in utroque polygono velocitate, numeri reflexionum sunt inversè ut latera, sive ob polygonorum similitudinem, inversè ut radii circulorum. Si verò ponatur idem circulorum radius, & varia in utroque polygono velocitas uniformis, erunt numeri laterum in utroque polygono dato tempore percursorum, directè ut velocitates æquabiles, seu, ut longitudines dato tempore descriptæ (5). Quare variantibus polygoni velocitate & radio, numerus reflexionum est ut velocitas, seu ut longitudo tempore dato descripta applicata ad radium. Cum igitur suprà ostensum sit vim centrifugam in circulo, aut vim centripetam ipsi æqualem & contrariam, esse in ratione compositâ velocitatis & numeri reflexionum dato tempore peractarum, liquet eandem vim centrifugam esse quoque ut quadratum velocitatis radio divisum, & etiam ut quadratum longitudinis seu arcus dato tempore descripti applicatum ad radium.

PRINCIPIA MATHEMATICA. 105  
PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

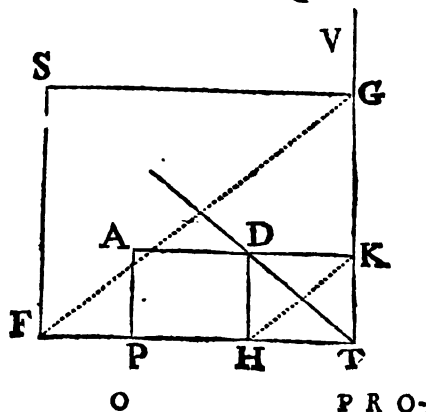
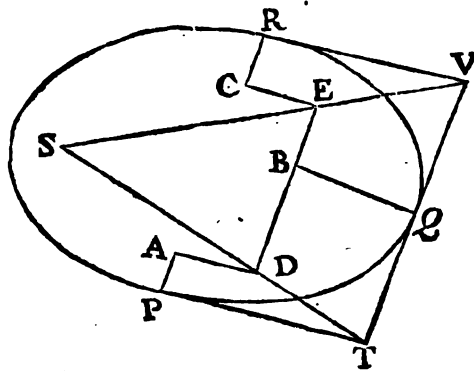
*Datâ quibuscunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.*

Figuram descriptam tangent rectæ tres  $PT, TQV, VR$  in punctis totidem  $P, Q, R$ , concurrentes in  $T$  &  $V$ . Ad tangentes erigantur perpendiculara  $PA, QB, RC$  velocitatibus corporis in punctis illis  $P, Q, R$ , à quibus eriguntur, reciprocè proportionalia; id est, ita ut sit  $PA$  ad  $QB$  ut velocitas in  $Q$  ad velocitatem in  $P$ , &  $QB$  ad  $RC$  ut velocitas in  $R$  ad velocitatem in  $Q$ . Per perpendicularorum terminos  $A, B, C$  ad angulos rectos ducantur  $AD, DBE, EC$  concurrentes in  $D$  &  $E$ : Et actæ  $TD, VE$  concurrent in centro quæsito  $S$ .

Nam perpendiculara à centro  $S$  in tangentes  $PT, QT$  demissa (per corol. 1. prop. 1.) sunt reciprocè ut velocitates corporis in punctis  $P$  &  $Q$ ; ideoque per constructionem ut perpendiculara  $AP, BQ$  directè, id est ut perpendiculara à puncto  $D$  in tangentes demissa. (\*) Unde facillè colligitur quòd puncta  $S, D, T$  sunt in unâ rectâ. Et simili argumento puncta  $S, E, V$  sunt etiam in unâ rectâ; & propterea centrum  $S$  in concursu rectarum  $TD, VE$  versatur. Q. E. D.

(\*) 206. Puncta  $S, D, T$ , sunt in unâ rectâ Demissis enim ex centro  $S$ , in tangentes  $TV, TF$ , perpendicularis  $SG, SF$ , & ex puncto  $D$ , perpendicularis  $DK, DH$ , patet angulos  $FSG, HDK$ , lineis parallelis contentos esse æquales & propter laterum  $SF, SG, DH, DK$ , analogiam, triangula  $FSG, HKD$ , esse similia, adeoque angulos  $SFG, DHK$ , æquari, ac proinde lineas  $FG, HK$ , esse parallelas, & triangula  $FTG, HTK$ , similia, erit ergò  $TH:TF=HK:FG=DH:SF$ , &  $TK:TG=HK:FG=DK:SG$ . Quare linea  $TD$ , producta transibit per centrum  $S$ .

Tom. I.



O

P R O-

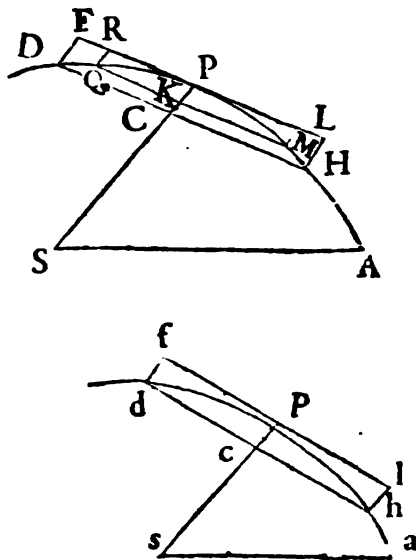
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

*Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam nascentem tempore quam minimo describat, & sagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam bisecet, & producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directè & tempus bis inversè.*

(<sup>f</sup>) Nam sagitta dato tempore est ut vis (*per coroll. 4. prop. 1.*) & augendo tempus in ratione quâvis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illâ duplicatâ (*per coroll.*

(<sup>f</sup>) 207. Corpora  $P$  &  $p$ , circa virium centra  $S$  &  $s$ , revolvendo, curvas  $APQ$ ,  $apq$ , describant, sintque chordæ minimæ  $DH$ ,  $dh$ , radiis vectoribus  $SP$ ,  $sp$ , bifariam divisæ, & chordis illis evanescentibus, erit  $CH = PH$ , &  $DC = DP$  (*per coroll. 1. Lem. VII.*) adeoque  $PH = PD$ ; undè puncta  $P$  &  $p$ , sunt in medio arcuum evanescentium  $DPH$ ,  $dph$ , posita. Præterea quoniam punctis  $C$  &  $P$ ,  $c$  &  $p$ , coeuntibus, puncta  $D$  &  $H$ ,  $d$  &  $h$ , simul cum punctis  $P$ ,  $p$ , coincidunt, ultima chordarum evanescentium  $DH$ ,  $dh$ , positio congruit cum tangentium  $FL$ ,  $fl$  positione, ac proinde chordæ evanescentes  $DH$ ,  $dh$ , tangentibus  $FL$ ,  $fl$ , æquidistant, adeoque rectæ  $DF$ ,  $df$ , radiis  $SP$ ,  $sp$ , parallelæ sagittis  $PC$ ,  $pc$ , evanescentibus æquales sint. His, ad clariorem eorum quæ *Newton* supponit, intelligentiam positis, demonstrandum est vires centripetas in  $P$  &  $p$ , esse inter se ut sunt sagittæ  $PC$ ,  $pc$ , directè, & inversè ut quadrata temporum quibus describuntur arcus evanescentes  $HPD$ ,  $hpd$ , aut dimidii  $PD$ ,  $pd$ . . . . . *Dem.* . . . . Si arcus  $PD$ ,  $pd$ , æqualibus temporibus describerentur, sagittæ  $PC$ ,  $pc$ , (*per coroll. 1. Prop. 1.*) essent ut vires centripetæ in  $P$  &  $p$ . Quod si vires in  $P$  &  $p$ , æquales forent, tempora verò per arcus  $PD$ ,  $pd$ , inæqualia, sint v. g. sicut  $T$  ad  $t$ , dico sagittas

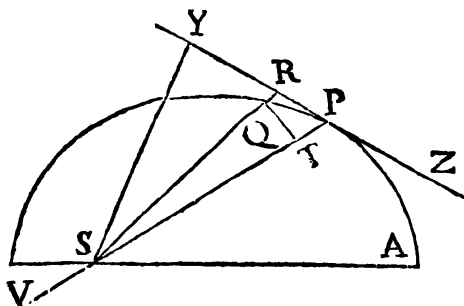


$PC$ ,  $pc$ , fore ut horum temporum quadrata directè; sive ut  $T^2$  ad  $t^2$ . Sit enim arcus  $PQ$ , descriptus eodem tempore  $t$  quo arcus  $pd$ , positus viribus in  $P$  &  $p$ , æqualibus, spatia  $QR$ ,  $fd$ , seu  $PK$ ,  $pc$ , virium illarum actione eodem tempore descripta erunt æqualia; Verum (*per cor.*

rol. 2. & 3. lem. xi.) ideoque est ut vis semel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directè & tempus bis inversè. *Q. E. D.*

(s) Idem facilè demonstratur etiam per coroll. 4. lem. x.

*Coroll. 1.* Si corpus *P* revolvendo circa centrum *S* describat lineam curvam *APQ*; tangat verò recta *ZPR* curvam illam in puncto quovis *P*, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto *Q* agatur *QR* distantia *SP* parallela, ac demittatur *QT* perpendicularis ad distantiam illam *SP*: vis centripeta erit reciprocè ut solidum *SP quad. × QT quad.*



$\frac{QR}{SP^2}$ ; si modo solidi illius ea semper fu-

matur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta *P* & *Q*. (h) Nam *QR* æqualis est sagittæ dupli arcus *QP*, in cujus medio est *P*, & duplum trianguli *SQP* sive *SP × QT*, tempori, quo arcus iste duplus describitur, proportionale est; ideoque pro temporis exponente scribi potest.

II. & III. Lem. xi.)  $PD^2 : PQ^2 = DF : QR$  sive  $fd$ , & ob motum per arcus evanescentes uniformem, sunt arcus *PD*, *PQ* ut tempora quibus describuntur, hoc est ut *T* ad *t*, ideoque  $PD^2 : PQ^2 = T^2 : t^2 = DF : QR$  sive  $fd$ , & quia  $DF = PC$  &  $df = pc$  ergo  $T^2 : t^2 = PC : pc$ , itaque si vires in *P* & *p* sint æquales, erunt sagittæ *PC*, *pc*, ut quadrata temporum quibus arcus *PD*, *pd*, describuntur. Quoniam igitur manentibus temporibus sagittæ sunt ut vires, & manentibus viribus, sagittæ sunt ut temporum quadrata, necessum est ut variantibus viribus atque temporibus sagittæ sint ut vires & quadrata temporum conjunctim. Quamobrem si vires in *P* & *p*, dicantur *V*, *v*, erit  $PC : pc = V : v$  &  $T^2 : t^2 = V : v$ , & dividendo antecedentes per  $T^2$ , & consequentes per  $t^2$ , erit  $V : v = \frac{PC}{T^2} : \frac{pc}{t^2}$ . *Q. E. D.*

(s) 208. Idem facilè demonstratur etiam per coroll. 1v. Lem. x. quo statuitur vires esse ut spatia, ipso motus initio, descripta directè & quadrata temporum inversè: Cum enim *FD*, *fd*, seu sagittæ *PC*, *pc*, sint spatia ex virium centripetarum actione descripta iisdem temporibus quibus percurruntur arcus evanescentes *PD*, *pd*, patet per suprà dictum coroll. vires centripetas esse inter se in ratione composita ex directâ ratione sagittarum *PC*, *pc*, & reciproca quadratorum temporum quibus describuntur arcus evanescentes *PD*, *pd*, seu *HD*, *hd*.

(h) 209. Nam *QR* æqualis est sagittæ dupli arcus *QP*, in cujus medio est *P*, (207), duplum verò trianguli evanescentis *SQP*, (quod per Lem. viii., tanquam rectilineum considerari potest) æquale est facto ex perpendicularo *QT*, in basim

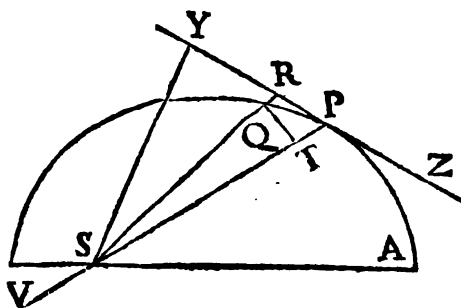
DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.



# 108 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo- *Corol. 2.* Eodem argumento vis centripeta est reciproce ut  
TU COR-  
PORUM. solidum  $\frac{SYq \times QPq}{QR}$ , si modò  $SY$  perpendicularum sit à cen-  
LIBER  
PRIMUS. tro virium in orbis tangentem  $PR$  demissum. (i) Nam rectan-  
gula  $SY \times QP$  &  $SP \times QT$  æquantur.

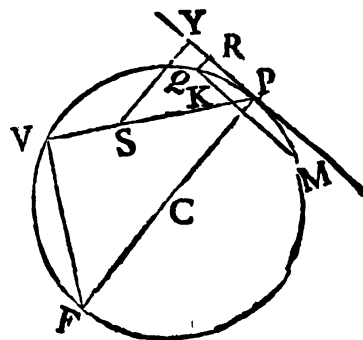
*Corol. 3.* Si orbis vel cir-  
culus est, vel circulum con-  
centricè tangit, aut concen-  
tricè secat, id est angulum  
contactus aut sectionis cum cir-  
culo quam minimum continet;  
eandem habens curvaturam  
eundemque radium curvaturæ  
ad punctum  $P$ ; & si  $PV$   
chorda sit circuli hujus à corpore per centrum virium acta:  
erit vis centripeta reciproce ut solidum  $SYq \times PV$ . (k) Nam  
 $PV$  est  $\frac{QPq}{QR}$ .



sim  $SP$ ; cum igitur in eadem curvâ  $APQ$ ,  
aræ sint proportionales temporibus qui-  
bus describuntur, ac proinde rectangulum  
 $QT \times SP$ , scribi possit loco temporis  
quo duplus arcus  $QP$ , seu duplum trian-  
gulum  $SQP$ , describitur, erit vis centri-  
peta in  $P$ , directe ut  $\frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$  & in-  
verse ut  $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ .

(i) 210. Rectangula  $SY \times QP$ , &  
 $SP \times QT$ , æquantur; nam tangens  $PR$ ,  
cum arcu evanescente  $QP$ , congruit (per  
*Lem. VII*) & propterea tangens illa  
considerari potest tanquam trianguli  $SPQ$ ,  
basim  $PQ$ , producta, &  $SY$ , tanquam  
perpendicularis ad illam basim productam,  
quare area dupli trianguli  $SPQ$ , est  
 $SY \times QP = SP \times QT$ .

(k) 211.  $PV$  est  $\frac{QP^2}{QR}$ . Sit enim cir-  
culus osculator  $PQVF$ , & ductâ chordâ  
 $QM$ , quam alia chorda  $PV$ , per virium



centrum  $S$  acta, bifecat in  $K$ , erit (per  
*prop. 35. lib. 3. Elem.*)  $QK^2 = VK \times$   
 $PK$ ; sed evanescente  $PK$ ,  $VK = VP$ ,  
& (207)  $QR = PK$ , ac (per *coroll. 1.*  
*Lem. VII*)  $QK = QP$ , ergò  $QP^2 =$   
 $PV \times QR$ , &  $PV = \frac{QP^2}{QR}$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 109

*Corol. 4.* Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directè, & chorda illa inversè. Nam velocitas est reciprocè ut perpendicularum *SY* per *corol. 1. prop. 1.*

*Corol. 5.* Hinc si detur figura quævis curvilinea *APQ*, & in ea detur etiam punctum *S*, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, quâ corpus quodvis *P* à cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum  $\frac{SPq \times QTq}{QR}$  vel solidum

$SYq \times PV$  huic vi reciprocè proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

212. Iisdem positis sit *PC*, radius oculi = *R*, & erit vis centripeta in *P*, reciprocè ut solidum  $\frac{SY^2 \times R}{SP}$ : quoniam

enim rectæ *SY*, & *FCP*, ad tangentem *PY*, perpendiculares æquidistant, erit angulus *VPF* = *PSY*; cumque sit præterea angulus *FVP*, in semicirculo æqualis recto *SY P*, duo triangula *PVF*, *SYP*, similia sunt, ac proinde *SP*:*SY* = *PF* seu *2R*:*PV*, adeoque *PV* =  $\frac{SY \times 2R}{SP}$  &  $SY^2 \times PV = \frac{SY^3 \times 2R}{SP}$ ;

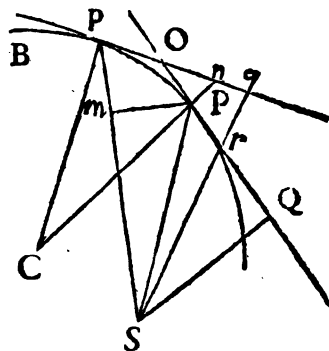
hoc est dividendo per numerum constantem 2, ut  $\frac{SY^3 \times R}{SP}$ . Hæc est expressio

vis centripetæ quam *Joannes Bernoullius*, *Abrahamus de Moivre* & *Guido Grandus* invenerunt.

## SCHOLIUM.

213. *NEWTONUS* generalem virium centralium theoriam in superioribus propositionibus aperuit, earumque elegantes formulas in propositionis vi<sup>te</sup> corollariis tradidit. Plurimas per analysim methodumque fluxionum postea exquisierunt alii qui primum inter Geometras locum tenebant. Hos inter eminet *Varignonius* qui in *Commentariis Parisiensibus* an. 1700, 1701, 1706, virium centralium formulas suâ varietate

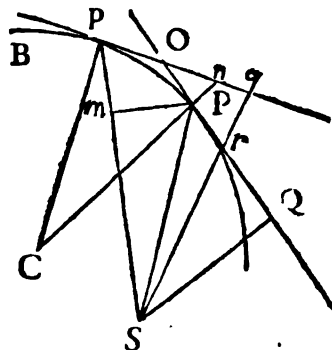
& universalitate eximias dedit; præclaras quoque addidit *Joannes Bernoullius* in iisdem *Commentariis* an. 1710. Duas proposuit *Jacobus Hermannus* in scholio ad propositionem 22<sup>am</sup> Lib. 1. *Phoronomia*, quas ut pote multum expeditas, nobisque in posterum profuturas, & ex superioribus *NEWTONI* formulis facillimè deducendas, hic exscribemus ac demonstrabimus.



214. Itaque corpus *P*, circâ centrum virium *S* revolvendo describat curvam *BpP*, & centro *C* radio *CP* descriptus intelligatur arcus infinitesimus *Pp* circuli curvam *BpP* osculantis in *P*, ac centro *S* radio *SP*, arcus *Pm*, & denique *SQ*, *Sq*,  
O 3 ad

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



ad tangentes PQ, pq, perpendiculares. Duo Triangula qOr, nCp, seu PCp similia sunt, nam æquales sunt anguli r q O, Cpn, sunt enim ambo recti, & anguli r O q, PCp, qui cum angulo P O p duos rectos efficiunt. Similia quoque sunt Triangula pmP, pql, seu PQS, ob Angulos ad q & m rectos & angulum mpP communem, dum coeunt puncta P, p, quare pP:rq=PC:Oq, seu pq, seu PQ; & mp:PP=PQ:SP unde ex æquo mp:rq=PC ad SP & PC =  $\frac{SP \times mp}{rq}$ . Porro (212) vis centripeta

in P est ut  $\frac{SP}{PC \times SQ}$ ; ergò si substituatür valor ipsius PC, modò inventus, eris vis ut  $\frac{rq}{SQ \times mp}$ , hoc est, si vis centripeta sit = v, SP=z, ac proinde mp=dz, SQ=p, adeoque rq=dp, erit  $v = \frac{dp}{p \cdot dz}$ , & radius osculi CP=r =

$\frac{z \cdot dz}{dp}$ , quas duas formulas tradunt Keil-  
lius in sua de legibus virium centripeta-

rum epistola ad Halleium directâ; & Hermannus loco suprâ citato.

215. Sit Pp=ds, & Pm=dy, & ob triangula similia pPm, PSQ, erit ds:dy=z:p, adeoque  $p = \frac{z \cdot dy}{ds}$ , &

sumptis utrinque fluxionibus nullâ constante usurpatâ, invenietur (163)  $dp = \frac{dz \cdot dy \cdot ds + z \cdot ds \cdot ddy - z \cdot dy \cdot dds}{ds^2}$ ;

quare  $v = \frac{dp}{p \cdot dz} = \frac{dp \cdot ds}{z \cdot dy \cdot dz}$  ob p,  
=  $\frac{z \cdot dy}{ds}$  &  $p = \frac{z \cdot dy}{ds}$ , adeoque  $v = \frac{dz \cdot dy \cdot ds + z \cdot ds \cdot ddy - z \cdot dy \cdot dds}{z \cdot dy \cdot dz}$ ;

quæ formula nonnisi nominibus differt à formulis quas Varignonius dedit in Commentariis Passienfibus, 1701. 1706.

216. Hinc radiorum osculi formula admodum generalis & expedita facile reperitur. Nam invenimus (214)  $r = \frac{z \cdot dz}{dp}$

= (215)  $\frac{z \cdot dz \cdot ds}{dz \cdot dy \cdot ds + z \cdot ds \cdot ddy - z \cdot dy \cdot dds}$  cum in hac formulâ nulla fluxio constans assumpta sit, in alias infinitas transformari potest, sumptis pro arbitrio constantibus. Si centrum S, in infinitum abeat, ut rectæ SP, evadant parallelæ, erit dz dy ds, quantitas infinitè parva respectu z ds ddy & z dy dds; nam cum z finita est dz dy ds, est ejusdem generis cum z ds ddy, ubi igitur z, evadit infinita z ds ddy, fit etiam infinita respectu dz dy ds; unde si in formulâ radii osculatoris modò inventâ deleatur membrum dz dy ds, habebitur r =  $\frac{z \cdot dz}{ds \cdot dz}$

formula generalis radii osculi in curvis quarum ordinatæ SP parallelæ axique perpendiculares sunt, & in quibus dz, sunt elementa abscissarum.

## III

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

$$\frac{QREXPV \text{ quad.}}{AV \text{ quad.}} \text{ æquatur } QT \text{ quad.} \text{ Ducantur hæc æqualia in}$$

Sic fiet  $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$  æquale  $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{OR}$

quadratum distantiae seu altitudinis  $SP$  & cubus chordae  $PV$  con-  
 junctim. *Q. E. I* *Idem*

(1) 217. Triangula ZQR, ZTP, similia sunt ob QR, parallelam TP, per constructionem, & triangula ZTP, VPA, sunt etiam similia ob angulos rectos ZTP, VPA, & æquales VPZ, VAP, quorum communis est mensura dimidius arcus VL, QP; quare RP:QT = ZP:ZT = AV:PV. Est autem RP = QR x RL, per prop. 36. lib. 3. Elem. 218.



# PRINCĪPIA MATHEMATICA. 113

(<sup>m</sup>) Nam per constructionem hujus propositionis vis prior est ad vim posteriorem ut  $RPq \times PT \text{ cub.}$  ad  $SPq \times PV \text{ cub.}$  id est, ut  $SP \times RPq$  ad  $\frac{SP \text{ cub.} \times PV \text{ cub.}}{PT \text{ cub.}}$ , sive (<sup>n</sup>) ob similia triacula  $PSG, TPV$  ad  $SG \text{ cub.}$

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Corol. 3.* Vis, quâ corpus  $P$  in orbe quocunque circum virium centrum  $S$  revolvitur, est ad vim, quâ corpus idem  $P$  in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum  $R$  revolvi potest, ut  $SP \times RPq$ , contentum utique sub distantia corporis à primo virium centro  $S$  & quadrato distantiae ejus à secundo virium centro  $R$ , ad cubum rectae  $SG$ , quæ à primo virium centro  $S$  ad orbis tangentem  $PG$  ducitur, & corporis à secundo virium centro distantiae  $RP$  parallela est. (<sup>o</sup>) Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis  $P$  eadem sunt ac in circulo ejusdem curvaturæ. PRO-

(<sup>n</sup>) 219. Nam per constructionem hujus propos. vis prior est ad vim posteriorem, (hoc est vis circa  $S$ , ad vim circa  $R$ ) ut  $RP^2 \times PT$  ad  $SP^2 \times PV$ . Scilicet in demonstratione hujus propositionis (vid.

*fig. Prop.* (inventum erat  $\frac{QRL \times PV}{AV}$ )  
 $= QT^2$ , & punctis  $P$  &  $Q$  coëuntibus scribatur  $PV$  pro  $RL$ , & uterque terminus multiplicetur per  $SP^2 \times AV$  erit  $QR \times PV \times SP^2 = QT^2 \times SP^2 \times AV$ , est verò  $QT \times SP$  area cujus arcus est  $QP$ , &  $QR$ , est ejus sagitta, itaque sagitta per cubum chordæ, & quadratum distantiae multiplicata, æqualis est quadrato areæ cui respondet, multiplicato per quadratum Diametri. Quod utique verum erit sive agatur de vi ad  $S$ , sive de vi ad  $R$  tendente (vid. *fig. Cor.*) Quod si sumi intelligantur arcus æquali tempore descripti circa utramque vim, sagittæ eorum arcuam expriment rationem earum virium centripetarum; & areæ illis temporibus æqualibus circa utramque vim descriptæ æquales erunt, nam per *Prop. 1.* tempus Periodicum est ad integram superficiem descriptam, ut tempus quodvis ad aream ipsi respondentem, ut ergo eodem tempore Periodico idem circulus circa utramque vim absolvitur, quæriturque area eidem tempori correspondens, illa area eadem

Tom. I.

erit utriusque vis respectu, ideoque productum quadrati areæ per quadratum Diametri idem erit tam respectu vis  $S$ , quam respectu vis  $R$ , ergo sagitta pertinet ad vim  $S$  multiplicata per cubum ejus chordæ  $PV$ , & quadratum ejus distantiae  $SP$  æqualis erit sagittæ pertinenti ad vim  $R$ , multiplicatæ per cubum ejus chordæ  $PT$  & per quadratum ejus distantiae  $RP$ , ea enim facta, quadrato areæ in quadratum Diametri ducto æqualia sunt, ideo Sagittæ illæ, sive vires in  $S$  &  $R$  erunt reciproce ut illæ quantitates quæ eas multiplicant, hoc est Sagitta in  $S$  est ad Sagittam in  $R$  sicut  $RP^2 \times PT$  :  $SP^2 \times PV$ . Q. E. D.

(<sup>n</sup>) 220. Triacula  $PSG, TPV$ , similia sunt, ob angulos  $PSG, SPT$  æquales, quia sunt alterni inter parallelas  $SG, TP$ , & angulos  $VPG, VTP$ , æquales per 32. lib. 3. Elem. unde  $TP : PV = SP : SG = SP \times PV$  &  $SG : TP = \frac{SP^2 \times PV}{PT}$

(<sup>o</sup>) 221. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis  $P$ , eadem sunt ac in circulo orbitam osculante in  $P$ , vis enim illa in  $P$ , est semper eadem ac si corpus in arcu evanescente circuli osculatoris moveretur, cum arcus ille circuli pro arcu orbitæ evanescente usurpari possit.

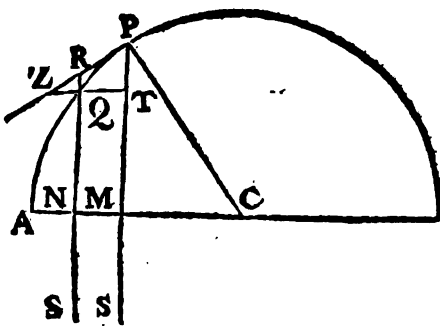
P

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS:

## PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III:

*Moveatur corpus in semicirculo PQA: ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum S, ut lineæ omnes PS, RS ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.*

A semicirculi centro C agatur semidiameter CA parallelas istas perpendiculariter secans in M & N, & jungatur CP. Ob (P) similia triangula CPM, PZT & RZQ est CP q ad PM q ut PR q ad QT q, & ex naturâ circuli PR q æquale est



rectangulo QR × RN + QN, five coeuntibus punctis P & Q

rectangulo QR × 2 PM. Ergo est CP q ad PM quad. ut QR × 2 PM

ad QT quad. ideoque  $\frac{QT \text{ quad.}}{QR} \text{ æquale } \frac{2 PM \text{ cub.}}{CP \text{ quad.}}$ , &

$\frac{QT \text{ quad.} \times SP \text{ quad.}}{QR} \text{ æquale } \frac{2 PM \text{ cub.} \times SP \text{ quad.}}{CP \text{ quad.}}$  Est ergo

(per corollarium 1. & 5. prop. v. 1.) vis centripeta reciprocè ut

$\frac{2 PM \text{ cub.} \times SP \text{ quad.}}{CP \text{ quad.}}$ , hoc est (neglectâ ratione determinatâ

$\frac{2 SP \text{ quad.}}{CP \text{ quad.}}$ ) reciprocè ut PM cub. Q. E. I.

(1) Idem facillè colligitur etiam ex propositione præcedente. *Scha.*

(1) 222. Similia sunt triangula CPM, PZT, anguli enim ad M & T recti æquales sunt, & quoniam anguli ZPT + MPC, & anguli MPC + MCP, recto æquantur; erit etiam MCP = ZPT; & Pl<sup>2</sup> = QR × RN + QN (per Prop. 36. lib. 3. Elem.) Cum autem C sit radius circuli & S sit linea infinita adeoque SM = SP, erunt

CP, SP,  $\frac{2 SP^2}{CP^2}$ , quantitates constantes:

(1) 223. Idem facillè colligitur ex propositione præcedente quâ constat vim centripetam esse reciprocè ut SP<sup>2</sup> × PV. Nam centro virium S in infinitum abeunte, omnes SP sunt æquales adeoque constantes, & propterea vis reciprocè ut PV.

*Scholium.*

(<sup>1</sup>) Et argumento haud multum dissimili corpus invenietur moveri in ellipsi, vel etiam in hyperbolâ vel parabolâ, vi centripetâ, quæ sit reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

DE ME-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

(\*) 224. Ut multa de sectionibus Conicis mox erant dicenda, visum est eas præmittere ex Conicis propositiones quæ sæpius occurrent, ne memoriæ vitio aut fastidio ad alios Autores recurrendi demonstrationum vis Lectores fugiat.

Def. 1<sup>a</sup>. Si Planum quodpiam secet conum, sed per ejus Verticem non transeat, intersectio Coni & istius Plani dicitur *Sectio Conica*.

2<sup>a</sup>. Si ducatur planum per Verticem Coni, parallelum plano secanti, conum ipsum vel secabit, vel tanget, vel totum erit extra eum; Hinc distinguuntur sectionum Conicarum species, dicentur primo casu *Hyperbolæ*, 2<sup>o</sup>. *Parabolæ*, 3<sup>o</sup>. *Ellipses*.

3<sup>a</sup>. Si sint duo Coni similes sibi per Verticem oppositi, illud planum verticale quod unum è Conis secat, alterum etiam secabit, ideo, planum sectionis ipsi Parallelum utrumque etiam Conum secabit, & ex utriusque Coni sectione formabuntur in eo Plano duæ *Hyperbolæ oppositæ*.

4<sup>a</sup>. Si secundum lineas rectas in quibus planum per Verticem Coni ductum secat Coni superficiem, applicentur duo plana Conum tangentia; eorum cum plano Hyperbolarum intersectiones, dicuntur *Hyperbolarum Asymptoti*; nam ut ea plana superficiem Coni jam tetigerunt, nullibi eam superficiem iterum attingent, non ergo attingent Hyperbolam quæ terminatur in superficie Coni & quæ est in plano lineis quas tangunt parallelo.

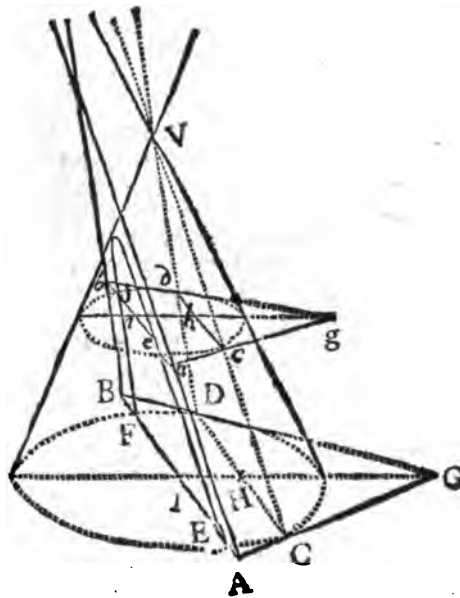
*Lemma I.* Sit linea ab unâ Asymptoto ad alteram ducta, quæ per Hyperbolam secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Et si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Asymptoto ad alteram ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Hyperbolam sectæ.

Si verò lineæ ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ductæ per Asymptotos secetur, partes

ejus lineæ inter Hyperbolam & Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Et si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Asymptotum sectæ (*Apoll. lib. 2. Prop. 8. & 16.*)

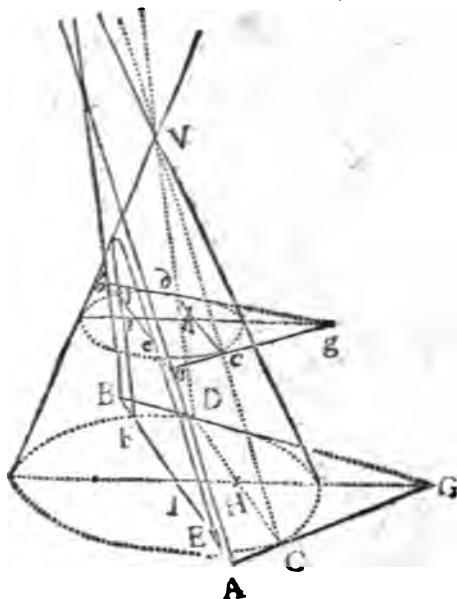


*Demonst.* Primum talis sit linea AB ut planum per eam lineam duci possit basi cono parallelum, cujus sectio cum cono erit circulus CEFD, ducatur planum VCD per verticem Coni VCD plano Hyperbolarum parallelum & secundum lineas VC, VD applicentur plana Conum tangentia, in quibus erunt Hyperbolæ Asymptoti & Tangentes circuli

P 2 C E



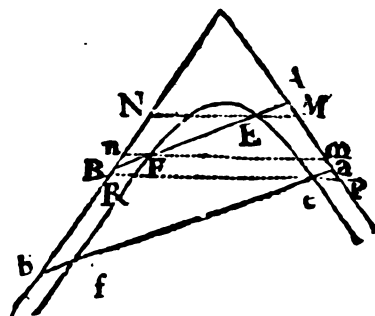
DE MO-  
TU COR-  
PORUM  
LIBER  
PRIMUS.



CEFD in punctis C & D: concurrant illæ Tangentes in G; ex G per centrum circuli ducatur linea G.H.I quæ erit perpendicularis in chordam C.D eamque bifariam secabit, ut etiam ejus Parallelam A.B, & chordam EF (per 3. 3. Elem.) est ergo  $IA = IB$ , &  $IE = IF$  unde  $IA - IE$  five  $AE = IB - IF$  five  $BF$  & (per 36. 3. Elem.)  $CA^2 = AF \times AE = AF \times BF$ .

Sit verò linea a b huic Parallela, five in eadem five in opposita sectione; simili ratiocinio ostenderetur esse  $ae = bf$ ; &  $ca^2 = af \times ae = af \times bf$ . Sed figura ACac est Parallelogramma, est enim tota in plano Tangente Conum, & terminatur per sectiones planorum Parallelorum, nam Cc & Aa sunt sectiones plani Verticalis & plani Hyperbolarum ipsi Paralleli, & CA & ca sunt sectiones planorum basi conii Parallelorum; est ergo  $CA = ca$  &  $CA^2 = ca^2$ , ac per consequens  $AF \times BF = af \times bf$ .

Causa 2da. Quòd si linea A.B utcumque sit ducta inter Asymptotas, & Hyperbolam secet in E & F erit  $AE = BF$ ; nam per E & F ducantur lineæ MEN, mFn, tales ut plana per eas ducta sint basi Conii parallela. Triangula AEM & AFm, BFn & BEN erunt similia propter Parallelas, est ergo  $AE : AF = EM : Fm$

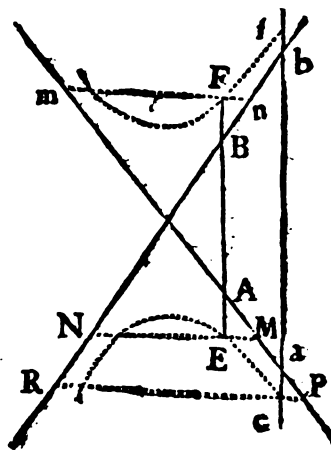


&  $BE : BF = NE : nF$ ; eff. ergo per compositionem rationis...  $AE \times BE : AF \times BF = EM \times NE : Fm \times nF$ , sed per demonstrationem primi casus est  $EM \times NE = Fm \times nF$ , ergo  $AE \times BE = AF \times BF$ , unde (per Prop. 16. 6. Elem.)  $AF : AE = BE : BF$  & dividendo  $AF - AE$  five  $EF : AE = BE - BF$  five  $EF : BF$ , cum ergo sit  $EF : AE = EF : BF$  est  $AE = BF$ .

Ducatur verò linea quavis a b, priori A.B parallela, & per punctum e ducatur linea PeR lineæ MEN parallela, similia erunt Triangula AEM & a eP, BEN & b eR ob parallelas, est ergo  $AE : ae = EM : eP$

&  $BE : be = EN : eR$ , eff. ergo per compositionem rationis...  $AE \times BE : ae \times be = EM \times EN : EP \times eR$ , sed per casum primum est  $EM \times EN = EP \times eR$ , ergo  $AE \times BE = ae \times be$ .

Causa 3us. Si lineæ de quibus agitur,



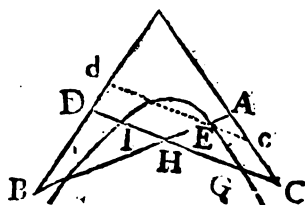
# PRINCIPIA MATHEMATICA.

117

DE MOTU  
CORPORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

ab una Hyperbolâ ad ejus oppositam ducerentur & per Asymptotas secarentur, eadem prorsus foret demonstratio ac in 1<sup>o</sup>. casu, nisi quod in primâ demonstrationis parte, componendo concluderetur, non dividendo.

*Lemma II.* Sint duæ lineæ in Hyperbolarum plano ductæ, quæ in quodam puncto sibi occurrant; facta partium singulæ lineæ sumptarum à puncto concursus usque ad punctum Hyperbolæ, sunt inter se sicut facta partium sumptarum ab Hyperbolâ usque ad utramque Asymptotum.



Lineæ AB, DC sibi mutuo occurrant in H, est  $EH \times FH : GH \times IH = AE \times BE : CG \times DG$ .

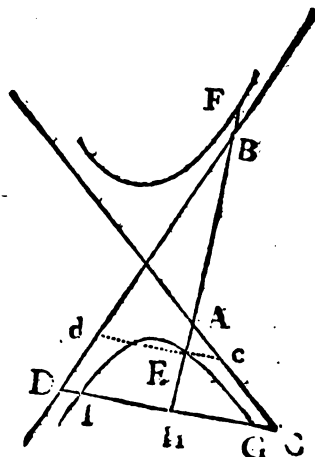
*Demonstr.*... Ducatur per punctum E Hyperbolæ, in quo secatur per lineam AB productam si necesse sit, lineæ c Ed, alteri lineæ datæ CHD Parallela; similia erunt Triangula AHC & AEc, BHD & BED: unde habebuntur hæc proportionēs

AH five AE + EH: AE = HC five CG + GH: c E

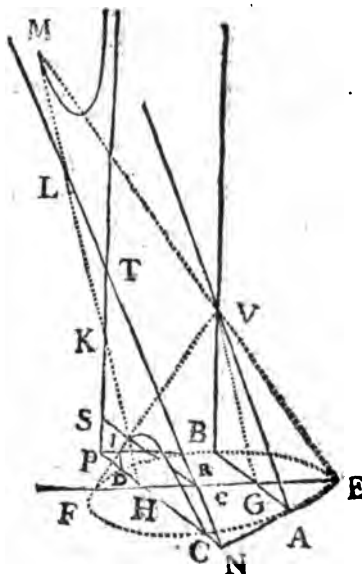
& BH five BF + FH: BE = HD five DI + IH: d E, & per compositionem rationis  $AE \times BF + AE \times FH + EH \times BF$  (five AE per Lem. I.) +  $EH \times FH$ :  $AE \times BE = CG \times DI + CG \times IH + GH \times DI$  (five CG per Lem. I.) +  $GH \times IH$ : c E x d E (five CG x DG per Lem. I.) est verò BF + FH + HE = BE, & DI + IH + HG = DG ergo est  $AE \times BE + EH \times FH$ :  $AE \times BE = DG \times CG + GH \times IH$ : CG x DG. & dividendo:  $EH \times FH$ : AE x BE = GH x IH: CG x DG

ergo alternando  $EH \times FH$ : GH x IH = AE x BE: CG x DG.

Eadem est demonstratio si lineæ sint in eadem Hyperbolâ, siue, una sit in unâ Hyperbolâ altera inter oppositas, siue ambæ inter oppositas ducantur. Ergo facta partium &c.



*Lemma III.* Sint duæ Parallelæ in sectione Conicâ ductæ quæ secantur per lineam quamvis, facta partium uniuscujusque Parallelæ sumptarum à curvâ ad punctum ejus intersectionis, sunt inter se ut facta partium lineæ secantis sumptarum à curvâ ad punctum intersectionis cum Parallelâ.



E' 3

Sine

# 118 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
FORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Sint AB, CD, parallelæ sectæ per lineam EF in punctis G & H, est  $AG \times GB : CH \times HD = EG \times GF : EH \times HF$ .

Sit V, vertex conî, ex eo ducantur VE; VF ad extremitates lineæ EF; ducatur in BA, planum VAB, per verticem conî transiens & in CD planum Hyperbolarum ipsi Parallelum, in plano VBA ducatur VG, & in H, HM ipsi VG parallela quæ jacebit in plano Hyperbolarum: erunt ergo Triangula VGE & MHE, VGF & IHF similia unde habentur hæ proportionēs

$$VG : MH = EG : EH$$

&  $VG : IH = FG : FH$ , & per compositionem rationis

$$VG^2 : MH \times IH = EG \times GF : EH \times FH.$$

Lineæ VE, VF ductæ per verticem conî & punctum in ejus superficie sumptum sunt semper in superficie conî, ergo earum intersectiones I & M cum lineâ HM in plano Hyperbolarum ductâ sunt in ipsâ curvâ Hyperbolicâ cujus Asymptoti sint TN, TP parallelæ lineis VA, VB; per punctum I in quo lineâ HM occurrit Hyperbolæ ducatur SIR lineis DC & AB parallela, similia erunt Triangula VAG & LRI, VBG & KSI lineis enim parallelis terminantur, erit ergo

$$VG : AG = LI : RI$$

&  $VG : GB = KI : SI$  & per compositionem rationis

$$VG^2 : AG \times GB = LI \times KI : RI \times SI (= PD \times DN \text{ per Lem. I.}) \text{ Sed per Lemma II. est}$$

$$LI \times KI : PD \times DN = MH \times IH : CH \times DH \text{ est ergo}$$

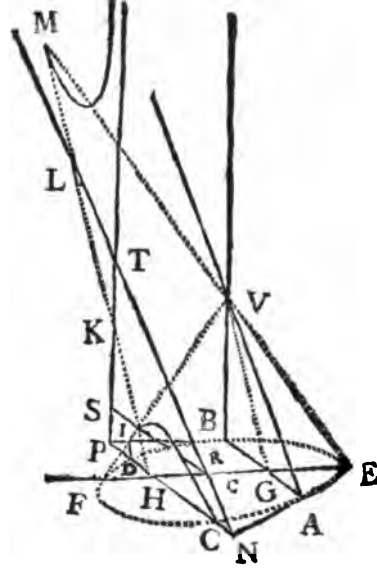
$$VG^2 : AG \times GB = MH \times IH : CH \times DH \text{ & alternando}$$

$$VG^2 : MH \times IH = AG \times GB : CH \times DH.$$

Erat autem  $VG^2 : MH \times IH = EG \times GF : EH \times FH$ , ex primâ demonstrationis parte, est ergo  $AG \times GB : CH \times DH = EG \times GF : EH \times FH$ . Q. E. D.

¶ Caf. 2. Si punctum F infinite distaret à puncto E, lineâ FG æqualis censenda foret lineæ FH, ideoque  $EG \times FG : EH \times FH = EG : EH = AG \times CB : GH \times DH$ , hoc est ipæ partes secantis forent inter se sicut facta partium parallelarum quas secat.

Caf. 3: Si punctum F non foret in eadem sectione in qua est punctum E, sed in oppositâ, eadem foret demonstratio nisi quod pun-



cta M & I, in eadem Hyperbola forent.

Caf. 4. Eadem etiam fiet demonstratio si puncta G & H sint intra extremitates Parallelarum AB, CD, aut intra vertices E & F lineæ secantis, siue sint extra.

Corol. 1. Sumatur medium lineæ secantis puncta E & F sitque c, si intersectio ejus lineæ per Parallelam sit intra vertices, erit factum partium ejus æquale quadrato ejus dimidii dempto quadrato ejus portionis à Centro ad intersectionem sumptæ, v. gr.

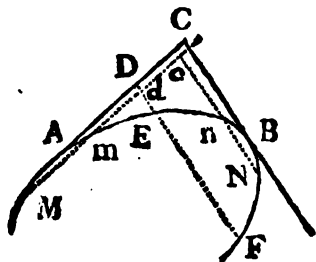
$$\text{erit } EG \times GF = cE^2 - cG^2 \text{ ut liquet per}$$

5. 2. Elem. Si intersectio ejus lineæ sit extra vertices, erit factum ejus partium æquale quadrato portionis ejus à Centro ad intersectionem sumptæ dempto quadrato dimidiæ lineæ, v. gr. foret  $EG \times GF = cG^2 - cE^2$ , ut liquet per 6. 2. Elem.

Corollar. 2. Ex puncto quovis ductæ sint duæ Tangentes ad sectionem Conicam, & ex quodam puncto unius ex illis Tangentibus, ducatur lineâ trans sectionem Conicam alteri Tangenti parallela. Quadratum prioris Tangentis est ad quadratum alterius Tangentis ut quadratum partium

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 119

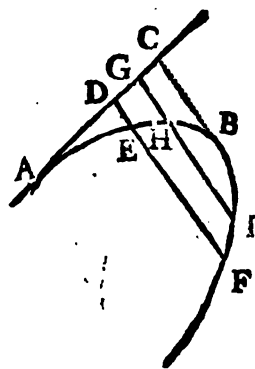
is in primâ Tangente assumptæ ad factum lineæ Parallelæ alteri tangenti per ejus Partem inter Tangentem & curvam comprehensam ( *Apol. lib. 3. Prop. 16.* )



Sint AC, CB Tangentes sectionis Conicæ ABF, ex D ducatur DEF parallela CB, erit  $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$ .

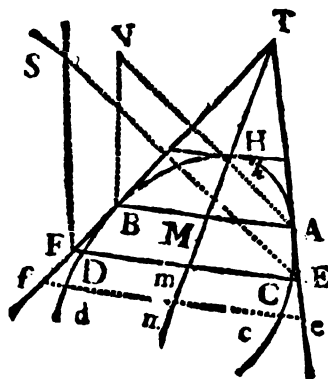
Ducatur Mmc parallela Tangenti AB, & Nnc parallela Tangenti CB, & Mmc lineam DEF secet in d, erit per Lem. sup.  $cn \times cN : dF \times dE = Mc \times mc : Md \times md$ , est enim Mc lineam secans parallelas cN, dF; evanescant arcus Mm, & Nn, coincident lineæ Mmc cum AC & Nnc cum BC, eritque  $cn = cN = CB$ ,  $dF = DF$ ,  $dE = DE$ ,  $Mc = mc = AC$ ,  $Md = md = AD$ , ergo erit  $\overline{CB}^2 : DF \times DE = \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$  & permutando & alternando  $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$ . Q. D. E.

Coroll. 3. Si ex variis punctis Tangentis ducantur lineæ Parallelæ trans sectionem Conicam, Quadrata partium Tangentis sunt inter se ut facta Parallelarum per earum partem inter Tangentem & curvam interce tam. Sit



AC Tangens ex ejus punctis D & G ducantur Parallelæ DEF, GHI, erit  $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$ ,

nam supponatur in B ea Tangens quæ his lineis sit Parallela secetque priorem in C TU COR-  
erit per Corollarium superius  $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE = \overline{AG}^2 : GI \times GH$  LIBER  
ergo alternando,  $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$ . Q. D. E.



Lemma IV. Dicatur sectionis Conicæ Diameter ea linea quæ Parallelas in curva terminatas bifariam dividit: sit ejus Diametri vertex punctum in quo curvæ occurrat; illæ Parallelæ, quas bifecat, ipsi ordinati applicatæ dicantur, & earum alterutra pars dicatur ordinata illius Diametri; portio Diametri ab ejus vertice ad Ordinatam usque, dicatur ejus abscissa: & denique ea Diameter quæ Parallelas bifecando simul est illis perpendicularis, dicatur Axis.

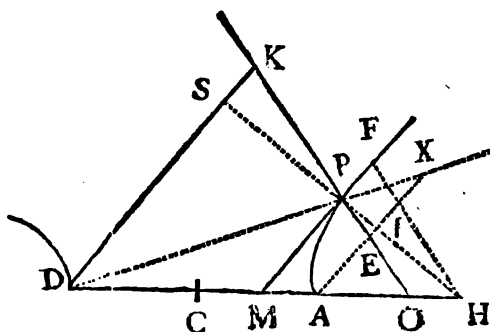
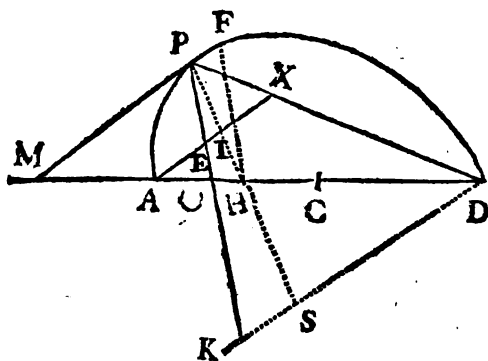
His positis 1°. Linea quæ duas Parallelas bifecabit erit Diameter curvæ: id est cæteras omnes lineas hisce Parallelas etiam bifecabit. ( *Apol. lib. 2. Prop. 28.* )

2°. Linea in Vertice Diametri ducta & Ordinatis Parallela, erit Tangens curvæ in eo Vertice ( *Apol. Lib. 1. Prop. 17.* ) & vice versâ ea linea erit Diameter quæ bifecabit lineam quæ erit Parallela Tangenti per ejus verticem ductæ: ( *Apol. Lib. 2. Prop. 7.* )

Denique; Quadrata ordinatarum erunt inter se ut facta partium quas secant in Diametro.

Demonst. In extremitatibus lineæ AB ducantur Tangentes quæ concurrant in T, per





five  $AE \times DK = AI \times DS$  &  $AE : AI = DS : DK$ , quod absurdum esse in data Hypothesi sic evincitur.

Ex P ad Diametri extremitatem D, ducatur PD, quæ lineam AEI (producta si necesse sit) secet in X; ob parallelas PM, XA est AM: DM=PX: DP & PX: DP=XE: DK, & ob Triangula similia AOE, DOK est AO:DO=AE:DK, & quia per Hypothesim est AM:DM=AO:DO, erit XE:DK=AE:DK ideoque in datâ Hypothesi XE=AE & cum sit XI:XE=DS:DK ob parallelas, erit XI:AE=DS:DK erat verò ex suppositione quod F est in curva, AE:AI=DS:DK, foret ergo XI:AE=AE:AI, & AE<sup>2</sup>=XI×AI. Sed AE<sup>2</sup> quadratum dimidii lineæ AX est

Tom. I.

semper majus Rectangulo ejus partium  $\times A I$  ( per 5. 2. Elem. ), absurdum ergo est ea esse æqualia, quod tamen sequitur supposito punctum  $F$  ad curvam pertinere, ideoque,  $M P$  curvam tangit in  $P$ . Sed ad idem cujuscunque curvæ punctum duas Tangentes rectas duci non posse ex naturâ curvarum liquet, ergo Tangens in  $P$ , ita occurrit Diametro ut sit

**AM: DM=AO, DO. Q. E. D.**

Cor. 1. Si Diameter A D sit infinita, hoc est punctum D ad infinitum removeatur, DM & DO æqualia censenda sunt, cum ergo sit  $DM : AM = DO : AO$  erit  $AM = AO$ ; five distantia puncti concursus Tangentis cum Diametro, ab ejus vertice, æqualis erit abscissæ ab eodem vertice sumptæ (Ap. lib. 1. 35.)

Cor. 2. Si Diameter AP sit terminata, ejulque medium sit C sitque PO ordinata fiatque CM,  $CA = CA : CO$ , erit PM tangens in puncto O; Etenim sumendo summam & differentiam terminorum harum rationum est,

$CM + CA : CA + CO = CM - CA : CA - CO$   
 five in primâ ratione ponendo DC pro CA, est DM : DO = AM : AO aut alternando DM : AM = DO : AO, ergo (per Lemma) M Perit Tangens in P, est ergo semidiameter media proportionalis inter abscissam à centro sumptam, & partem Diametri à centro ad concursum Tangentis comprehensam. (Apol. Lib. 1. 37.)

Cor. 3. In Puncto P Sectionis Conicæ ducatur Tangens, quæ secet Diametrum in M, & ducatur ordinata PO quæ secet Diametrum in O factum partium Diametri A O  $\times$  D O est æquale facto C O  $\times$  O M ex partibus linearum à Centro ad Tangentem sumptarum & per ordinatam in O sectarum. Cum enim sit C M : C A = C A : C O tollendo terminos secundæ rationis à terminis primæ erit M A : A O = C A [ five D C ] : C O, unde componendo erit M O : A O = D O : C O, ideoque A O  $\times$  D O = C O  $\times$  M O : & ( per 5. vel 6. 2. Elem. ) prout O est inter A & D vel ultra, erit C O  $\times$  M O = A C<sup>2</sup> — C O<sup>2</sup> vel C O<sup>2</sup> — A C<sup>2</sup>, unde deducitur M O

$$= \frac{A C^2 - C O^2}{C O} \text{ vel } \frac{C O^2 - A C^2}{C O}.$$

**Q**

De

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*De Hyperbolâ.*

*Theor. I.* Lineæ omnes ab Interfectione Asymptotorum in eorum Angulo ductæ & utrinque productæ, sunt Hyperbolæ utriusque Diametri, & earum portio inter utramque Hyperbolam comprehensa, dicitur Diameter transversa, & bifariam dividitur in Interfectione Asymptotorum quæ ideo centrum Hyperbolarum vocatur. Tangentes verò in utroque vertice ejusdem Diametri ductæ & inter Asymptotos comprehensæ sunt inter se Parallelæ & æquales, & bifariam dividuntur ab ea Diametro dicunturque ejus Diametri conjugatæ. (*Apol. lib. I. Prop. 30. lib. 2. Prop. 3. & 19.*)

*Demonst.* Ductâ enim quomodocumque lineâ  $SCT$  in Angulo Asymptotorum  $ZCY$  per earum interfectionem  $C$ , si crura  $CZ$  &  $CY$  sumantur reciprocè proportionalia sinibus Angulorum adjacentium, ducaturque linea  $ZY$  illa per lineam  $SCT$  bifariam dividetur; nam in Triangulo  $CZY$  est  $CZ : CY = \sin. Y : \sin. Z = \sin. YCo : \sin. ZCo$  (per const.) & alternando,  $\sin. Y : \sin. YCo = \sin. Z : \sin. ZCo$ . Sed in Triangulo  $CoY$  est

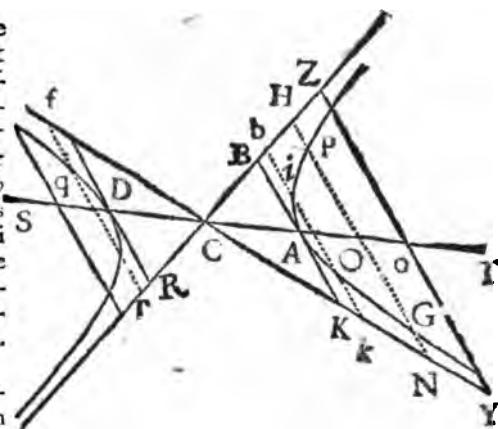
$\sin. Y : \sin. YCo = Co : Yo$ ,  
& in Triangulo  $CMZ$  est

$\sin. Z \sin. ZCo = Co : Zo$ ,  
ergo cum duæ priores rationes sint æquales, est  $Co : Yo = Co : Zo$ , ideoque  $Yo = Zo$ .

Omnis autem linea  $HN$  lineæ  $ZY$  parallela similiter bifariam dividetur in  $O$  per lineam  $ST$ , partes autem ejus inter Hyperbolam & Asymptotum utriusque contentæ sunt æquales, per Lem. I. cum ergo sit semper  $HO = ON$ , &  $HP = GN$  est  $HO - HP = NO - NG$  sive  $OF = OG$ . Ergo linea  $ST$ , lineas omnes lineæ  $ZY$  parallelas, in Hyperbola contentas bifariam secat, est ergo ejus Diameter per Lemma V.

Sint verò  $A$  &  $D$  puncta in quibus linea  $ST$  occurrit Hyperbolis, per ea ducantur  $EAK$ ,  $FDR$  parallelæ lineæ  $ZY$  inter Asymptotos contentæ, ergo bisecantur in  $A$  &  $D$ , cum verò sint parallelæ ordinatis Diametro  $ST$  sunt Tangentes in verticibus  $A$  &  $D$  (per Lemma IV.) & inter se Parallelæ.

Dico præterea eas esse æquales, ducantur enim Parallelæ ipsis proximæ  $b i K$ ,  $f q r$ : erit  $f q \times q r = b i \times K i$  (per Lem. I.) accedentibusque ordinatis ad Tangen-



tes fit tandem  $f q = FD$ ,  $q r = RD$ ;  $b i = BA$ , &  $K i = KA$  est ergo  $FD \times RD = BA \times KA$ , sed est  $FD = DR$  &  $BA = KA$  ergo  $FD^2 = BA^2$  &  $FD = BA = KA$ . Unde tandem cum Triangula  $CAK$  &  $CDF$  sint similia, & fit  $CA : CD = KA : FD$  est etiam  $CA = CD$ .

*Theor. II.* Tertia proportionalis Diametro transversæ & Diametro conjugatæ dicatur Latus Rectum; Est Diameter transversa ad Latus Rectum ut factum Abscissarum ab utroque vertice sumptarum, ad quadratum Ordinatæ; Hinc ista curva *ὑπερβολὰ* sive excedens dicitur, quia quadratum ordinatæ majus est facto lateris Recti per abscissam à proximo vertice (*Apol. lib. I. Prop. 21.* Coincidit verò hæc propositio cum ista, est quadratum Diametri Transversæ ad quad. Diametri conjugatæ ut factum abscissarum ad quadratum ordinatæ.

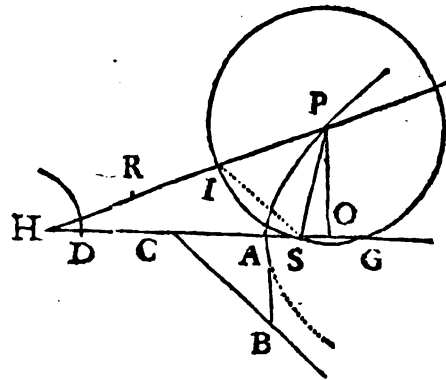
*Demonst.* Sit ut prius Diameter transversa  $DAT$ , conjugata  $BAK$  & ordinata inter Asymptotas contenta  $HPOGN$ : sunt (per Lem. II.) facta partium sumptarum in lineis  $DO$ ,  $HN$  à puncto Hyperbolæ ad utramque Asymptotum, sicut facta partium earundem linearum à puncto concursus  $O$ , usque ad Hyperbolam sumptarum; hoc est  $AC \times AC : GN \times GH = AO \times DO : PO \times GO$ . Sed  $GN \times GH$  æqualis est quadrato semi Tangentis  $BA$ , sive semidiametri conjugatæ; nam (per Lem. I.) est  $GN \times GH = b i \times K i$  (& per præced. dem.  $b i \times K i = BA^2$ ) & est  $PO = GO$  ideo pro-

portio superior huc redit,  $AC^2 : BA^2 = AO \times DO : PO^2$ . Sit verò  $L$  latus rectum, est per ejus definitionem  $2 AC : 2 BA = 2 BA : L$ , ergo est  $2 AC : L = 4 AC^2 : 4 BA^2 = AC^2 : BA^2$  ideoque  $2 AC : L = AO \times DO : PO^2$ .

Hinc deducitur quod  $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2 AC}$   
 $= \frac{DO}{AD} \times L \times AO$ ; ut ergo  $DO$  est semper major quàm  $AD$ , est etiam  $PO^2$  semper major quàm  $L \times AO$ . Q. E. D.

*Theor. III.* Diameter illa quæ Asymptotum Angulum bifariam dividit est perpendicularis suis ordinatis (ut liquet ex Elem.), ideoque est Axis Hyperbolæ & ejus Diameter Conjugata Axis conjugatus: si à Centro feratur utrinque in Axem longitudo Asymptoti à centro ad extremum Axis conjugati sumptæ, puncta notata in Axi dicuntur foci Hyperbolæ, & si à focus ad quodvis Hyperbolæ punctum ducantur lineæ, earum differentia est semper Axi transverso æqualis. Latus Rectum axis dicitur Latus rectum Principale, & tota linea ordinatim Axi applicata in foco est æqualis illi lateri recto Principali, quod erit majus quadruplo distantie verticis à foco, si denique bifariam dividatur Angulus quem faciunt lineæ ab utroque foco ad idem curvæ punctum ductæ, linea eum angulum biseccans, erit Tangens curvæ in eo puncto. (*Apol. lib. 3. 51.*)

*Demonst.* Ducatur quævis linea ex foco  $H$ , sumatur  $HI = DA$ , & ducta  $IS$  ad alterum focum  $S$ , fiat  $ISP = PIS$  erit  $PI = PS$ , ideoque differentia linearum  $HP$ ,  $SP$  erit  $HI = DA$  seu axi transverso, dico hoc posito,  $P$  ad Hyperbolam pertinere. Centro  $P$ , radio  $PS$ , describatur circulus  $ISGN$  habebitur hæc proportio,  $HI : HS = HG : HN$  sumatur dimidium harum linearum manebit proportio, sit autem  $\frac{1}{2} HI = HR$ ,  $\frac{1}{2} HS = CS$ ,  $\frac{1}{2} HG = \frac{1}{2} HS + \frac{1}{2} SG$  & demissa  $PO$  perpendiculari in  $SG$  est  $\frac{1}{2} SG = SO$ , ergo  $\frac{1}{2} HG = CS + SO = CO$ . Denique  $\frac{1}{2} HN = \frac{1}{2} HI + \frac{1}{2} IN = RI + IP = RP$  est ergo  $HR : CS = CO : RP$ : componendo primum habetur  $HR : CS + HR = CO : RP + CO$  & prioris rationis terminos terminis secundæ jungendo



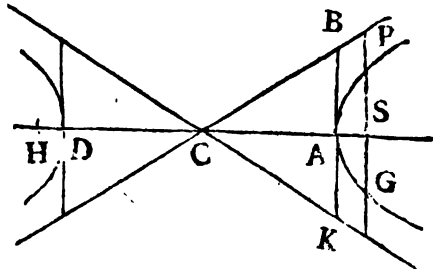
habetur  $HR : CS + HR = CO + HR$ :  $HR + RP + CS + CO$ , siue quia  $HR = AC = DC$ , &  $CS = CH$  est  $AC : CS + AC = DO : HP + HO$ .

At operationibus contrariis in eandem proportionem  $HR : CS = CO : RP$  factis, hoc est, dividendo & postea prioris rationis terminos e terminis secundæ detrahendo, substitutionibus factis erit

$AC : CS - AC = AO : HP - HO$ , multiplicatis ergo terminis utriusque proportionis erit

$AC^2 : CS^2 - AC^2 = AO \times DO : HP^2 - HO^2$  sit autem perpendicularis  $AB$  erecta ab  $A$  usque ad Asymptotam  $CB$ , est  $CB = CS$ , &  $CS^2 - AC^2 = AB^2$ ; est etiam  $HP^2 - HO^2 = PO^2$ , est ergo

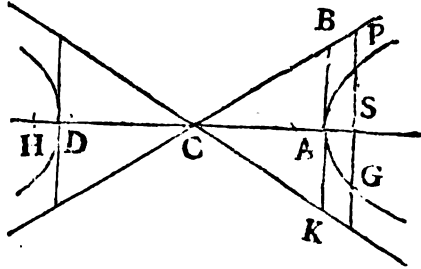
$AC^2 : AB^2 = AO \times DO : PO^2$ , sed est  $AC^2 : AB^2 = DO \times AO$  ad quadratum ordinatæ in  $O$ , (per *Theor. II.*) ergo  $PO$  est ipsa illa ordinata & punctum  $P$  ad Hyperbolam pertinet.



Sit autem  $PS$  ordinata in foco, erit  $AC^2 : AB^2 = AS \times DS : PS^2$  est verò  $DS = CS + AC$  &  $AS = CS - AC$ , ergo  $BS \times AS = CS^2 - AC^2 = AB^2$ , ergo  $AC^2 : AB^2 = AB^2 : PS^2$ , &  $AC : AB = AB : PS$ , & duplicando omnes

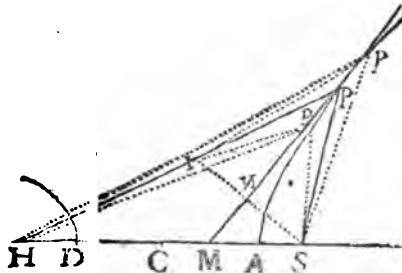


DE MOTU  
CORPORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



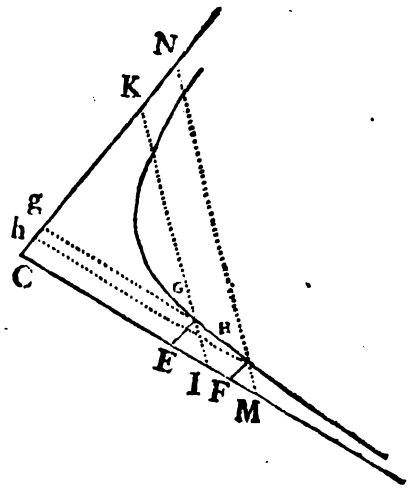
terminos  $2AC : 2AB = 2AB : 2PS$  five  
 $PG$ . Sed est per naturam lateris recti  
 $2AC : 2AB = 2AB : L$ , ergo  $L = PG$  :  
 $\& \frac{1}{2} L = PS$ , sed cum per Theor. II.  
 fit  $PO^2 = \frac{DO}{AB} \times L \times AO$  erit ergo

$PS = \text{five } \frac{1}{4} L = \frac{DS}{AB} \times L \times AS$  &  $\frac{1}{4} L =$   
 $\frac{DS}{AB} \times AS$ , ut itaque  $DS$  est major  $AB$ ,  
 erit  $\frac{1}{4} L$ , major  $AS$ .



Denique. Ducantur à focus lineæ  $HP$ ,  
 $SP$ , lineæ  $PM$  bifariam dividat angulum  
 $P$ , dico eam esse Tangentem Hyperbolæ in  
 $P$ ; hoc est illam non occurrere Hyperbolæ  
 in alio quovis puncto  $p$ ; ex  $HP$  tollatur  $HI$   
 $= DA$ , erit  $PI = PS$  (per hoc Theor.) &  
 ducta  $IS$  erit  $PM$  perpendicularis in medium  
 $N$  lineæ  $IS$ , ex alio quovis puncto  $p$  du-  
 cantur rectæ  $pI$   $pS$  erunt inter se æqua-  
 les, ob æqualia Triangula  $pNI$ ,  $pNS$   
 (per 4. 1. Elem.) sed si  $p$  esset in Hy-  
 perbola, esset  $Hp = HI + pS$  five quia  
 $pI = pS$  esset  $Hp = HI + pI$ , quod ab-  
 surdum (per 20. 1. Elem.)

Theor. IV. Si sumantur pro abscissis  
 portiones quævis Asymptoti ab Hyperbo-



læ centro, & Ordinatz sint Parallelæ al-  
 teri Asymptoto, Ordinatz erunt suis Ab-  
 scissis reciprocè proportionales; Et area  
 inter Asymptotum, Hyperbolam, ordina-  
 tam Vertici axis occurrentem & ordina-  
 tam quamvis comprehensa erit abscissæ hu-  
 jus ordinatz Logarithmus.

Demonst. Sit  $C$  centrum Hyperbolæ,  
 $CE$   $CF$  abscissæ,  $EG$   $FH$  ordinatz  
 Asymptoto  $CN$  parallelæ, dico quod est  
 $CE : CF = FH : EG$ ; Ductis enim per  
 $G$  &  $H$  lineis  $Gg$ ,  $Hh$  parallelis Asymp-  
 toto  $CF$ , &  $IGK$ ,  $MHN$  inter se pa-  
 rallelis trans Hyperbolam, erunt similia  
 Triangula  $IGE$  &  $MHF$ ,  $GKg$  &  $HNh$   
 propter Parallelas, ideoque est

$IG : MH = GE : HF$   
 &  $GK : HN = Gg$  (five  $CE$ ) :  $Hh$  (five  $FC$ )  
 compositis rationibus est

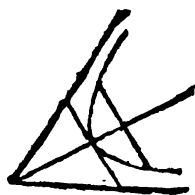
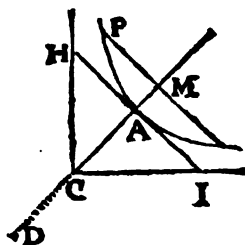
$IG \times GK : MH \times HN = GE \times CE : HF \times$   
 $FC$ . Sed, (per Lem. I.) est  $IG \times GK = MH \times$   
 $HN$ , ergo  $GE \times CE = HF \times CF$  est er-  
 go  $CE : CF = HF : GE$ ,

cum autem Parallelogrammata  $CG$ ,  $CH$ ,  
 sint æquiangula & ea lateribus reciprocis  
 contineri sit demonstratum, sunt æqualia.

Dico denique areas Hyperbolæ esse ab-  
 scissarum Logarithmos; ex centro  $C$  ducatur  
 axis  $CA$ , & ex vertice  $A$  ducantur lineæ  $AR$   
 Ar Asymptotis Parallelæ, ob Angulum  $C$  bi-  
 fariam divitum & parallelas, erit  $CR = AR$   
 sit  $AR = 1$ ; & fingantur duæ ordinatz  
 quæ ita moveantur ut abscissæ unius sint  
 lem-



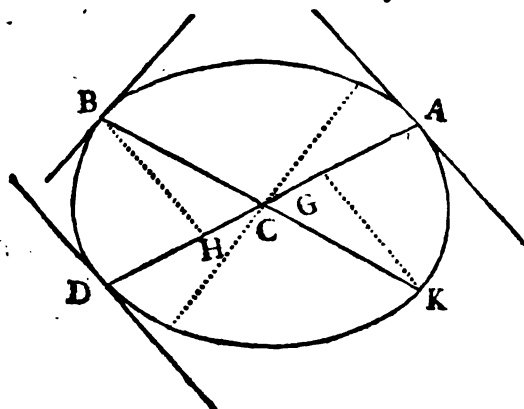
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



Sint denique in duabus Hyperbolis æquales axes transversi, sed diverſi Aſymptoto-  
rum Anguli; diverſa erunt Latera Recta,  
ſumantur ergo æquales abſciſſæ, & quoniam  
Axis eſt ad latus Rectum ſicut factum par-  
tium abſciſſæ ad quadratum ordinatæ, Axis  
verò & factum partium abſciſſæ æqualia  
ſunt utrinque, eadem erit utrinque ratio La-  
teris recti principalis ad quadratum ordi-  
natæ, erunt ergo ordinatæ quæ ad æqua-  
les abſciſſas pertinebunt, ut Radices qua-  
dratæ Laterum rectorum principalium, quæ  
ratio eſt conſtans, ſit ergo utraque abſ-  
ciſſa in poriones infinite parvas & utrin-  
que æquales diviſa ſingula Parallelogramma-  
ta quam minima ſuper æquales abſciſſæ por-  
tiones formata erunt in eadem ratione ac  
ordinatæ, ergo areæ Hyperbolarum, quæ  
ſunt eorum Parallelogrammorum ſummæ, in  
eâdem erunt ratione, nempe ut Radices  
quadratæ laterum Principalium.

De Ellipſi.

*Theor. I.* Omnes Ellipſis Diametri ſefe  
bifariam ſecant in eodem puncto quod dici-  
tur centrum Ellipſis, eaque Diametri ordi-  
nata quæ per centrum tranſit eſt ipla Diami-  
ter, quæ reſpectu Diametri, cujus eſt ordina-  
ta, conjugata dicitur: ( *Apol. I. 1. Prop. 30.* )



*Demonſt.* Si per medium C, Diametri El-  
lipſis AD, ducatur linea quævis BK, & per  
puncta B & K ducantur BH, KG ordinatæ  
Diametro AB, erit per *Lemma V.*

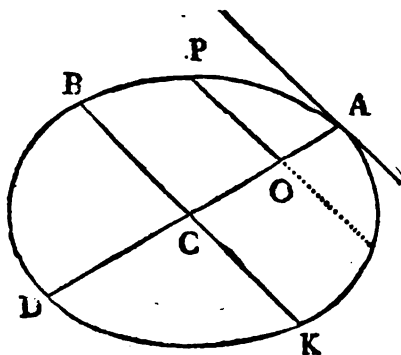
$AG \times GD : AH \times HD = GK^2 : BH^2$  & prop-  
ter Triangula ſimilia GKC, CBH eſt  
 $GK : BH = CG : CH = BC : CK$ , eſt ergo  
 $AG \times GD : AH \times HD = CG^2 : CH^2$ , eſt autem  
( per 5. 2. Elem. )  $AG \times GB = AC^2 - CG^2$   
&  $AH \times HB = AC^2 - CH^2$ , eſt ergo

$AC^2 - CG^2 : AC^2 - CH^2 = CG^2 : CH^2$ .  
& jungendo terminos ſecundæ rationis ter-  
minis prioris, eſt  $AC^2 : AC^2 - CG^2 = CH^2$ ,  
ideo  $CG = CH$ , ac per conſequens  $EC = CK$ .  
Omnes ergo lineæ per punctum C tranſeun-  
tes illic bifariam ſecantur. Sunt autem ſin-  
gulæ Diametri Ellipſis, nam in vertice B du-  
catur Tangens, & per Centrum C linea  
illi parallela, ea dividetur bifariam, cum  
itaque BK biſecet lineam Parallelam Tan-  
genti per ejus verticem ductæ, eſt Diami-  
ter, per *Lemma V.*

Denique ſolæ lineæ per Centrum tranſ-  
eun-

euntes sunt Diametri; fingatur enim Diameter per centrum non transiens, ducatur Tangens in ejus Vertice, & illi Tangenti ducatur Parallela per Centrum C, bifariam dividetur in centro, ergo bifariam non dividetur à Diametro supposita quæ per centrum non transit, ergo male supponitur eam esse Diametrum: Omnes ergo Diametri Ellipsis per centrum transeant, illicque bifecantur.

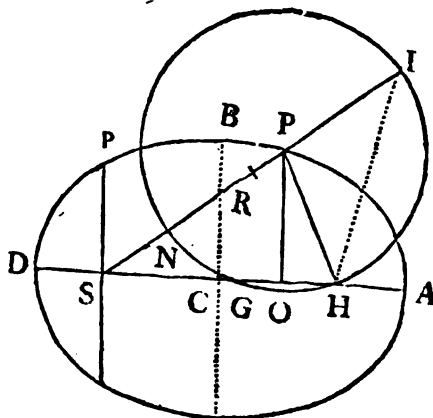
*Theor. II.* Tertia proportionalis Diameter transversæ ejusque conjugatæ dicatur Latus Rectum, erit Diameter transversa ad Latus Rectum, vel quod idem est quadratum diametri transversæ ad quadratum ejus conjugatæ, ut factum abscissarum sumptarum ab utroque Vertice Diametri ad quadratum ordinatæ, inde quadratum Ordinatæ semper minus deprehenditur factò Lateris recti per utramlibet abscissam, undè hæc curva dicitur Ellipsis; (*Apoll. lib. 1. Prop. 21.*)



*Demonst.* Sit Ellipsis Diameter ACD, ejus conjugata BCK est per Lemma IV,  $AC \times CD$  sive  $AC^2 : AO \times DO = BC^2 : PO^2$  & alternando  $AC^2 : BC^2 = AO \times DO : PO^2$ , sed est  $2 AC : 2 CB = 2 CB : L$ , ergo  $4 AC^2 : 4 CB^2 = AC^2 : CB^2 = 2 AC$ ,  $L = AO \times DO : PO^2$ , ergo est  $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2 AC} = \frac{DO}{2 AC} \times L \times AO$  sed ut  $4 DO$  est semper minus quam  $2 AC$ , est  $PO^2$  semper minus factò Lateris recti per alterutram abscissam.

*Theor. III.* Sit AD axis major, à centro feratur utrinque CH, CS, æquales & tales ut quadratum  $CH^2$  sive  $CS^2$  cum quadrato semiaxis conjugati  $CB^2$  sit æquale qua-

drato semiaxis majoris  $CA^2$ , dicanturque puncta H & S, Foci, summa linearum ab utroque foco ad quodvis punctum Ellipseos ductarum erit semper æqualis Axi majori, (*Apol. Lib. 3. Prop. 52.*); & tota linea ordinatim applicata in foco erit æqualis Lateri Recto Principali, quod ergo minus erit quadruplo distantie foci à proximo Vertice.



*Demonst.* Ducatur quævis linea ex foco S, in eà sumatur  $SI = DA$  & ducta IH ad alterum focum, fiat  $IHP = I$  erit  $IP = PH$ , ideoque  $SP + PH = SP + PI = SI = DA$  sive axi majori: quo posito dico punctum P ad Ellipsim pertinere. Centro P radio PH describatur circulus IHGN habebitur hæc Proportio  $SI : SH = SG : SN$ , sumendo dimidium harum linearum manebit proportio; sit autem  $\frac{1}{2} SI = SR$ ;  $\frac{1}{2} SH = CH$ ;  $\frac{1}{2} SG = \frac{1}{2} SH - \frac{1}{2} GH$  & demissa PO perpendiculari in GH est  $\frac{1}{2} GH = HO$  ergo  $\frac{1}{2} SG = CH - HO = CO$ . Denique  $\frac{1}{2} SN = \frac{1}{2} SI - \frac{1}{2} NI = RI - PI = RP$  est ergo

$SR : CH = CO : RP$  & componendo habetur  $SR : SR + CH = CO : CO + RP$ , tum prioris rationis terminos jungendo terminis secundæ, est  $SR, SR + CH = CO + SR : CO + RP + SR + CH$  sive quia  $SR = AC = DC$  &  $CH = CS$ , est  $AC : AC + CH = DO : SP + SO$ . At operationibus contrariis factis in eandem proportionem  $SR : CH = CO : RP$ , hoc est, dividendo & postea prioris rationis terminos

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



vertici respondentium erit æquale quadrato abscissæ à centro sumptæ respondenti Vertici alterius Diametri: Unde quadrata ambarum abscissarum à Centro sumptarum erunt simul æqualia quadrato  $\frac{1}{2}$  Diametri in quam sumuntur, & quadrata ordinarum erunt æqualia quadrato ejus  $\frac{1}{2}$  Diametri conjugatæ. Hinc deducitur summam quadratorum duarum Diametrorum conjugatarum quarumvis esse semper eandem: eas verò Diametros conjugatas esse inter se æquales quarum vertices determinantur per ordinatam erectam in Axem majorem cujus abscissa à centro sumpta sit æqualis radici dimidii quadrati semi Axis majoris.

*Demonst.* ... Sint CP CK Diametri conjugatæ, PO KE ordinatæ ex earum verticibus in Diametrum AD ductæ; PM Tangens Parallela Diametro CK: Triangula POM, KEC erunt similia & PO:KE=MO:CE, vel PO²:KE²=MO²:CE² five quia (per Cor. 3. Lem. V.) est MO

$$= \frac{CA^2 - CO^2}{CO^2} \text{ est } PO^2 : KE^2$$

$$= \frac{CA^2 - CO^2}{CO^2} : CE^2, \text{ sed per Lemma IV.}$$

est PO²:KE²=AO×DO:AE×DE five (per 5. 2. Elem.) = CA²-CO²:CA²-CE² est ergo, CA²-CO²:

$$CA^2 - CE^2 = \frac{CA^2 - CO^2}{CO^2} : CE^2, \text{ dividendo primum \& tertium terminum per } \frac{CA^2 - CO^2}{CO^2} \text{ est } CO^2 : CA^2 - CE^2 = CA^2 - CO^2 : CE^2 \text{ \& addendo terminos secundæ rationis terminis primæ est } CA^2 : CA^2 = CA^2 - CO^2 : CE^2, \text{ ergo } CE^2 = CA^2 - CO^2 = AO \times DO: \text{ Pari modo addendo terminos primæ rationis terminis secundæ erit } CO^2 : CA^2 - CE^2 = CA^2 : CA^2: \text{ ergo } CO^2 = CA^2 - CE^2 = AE \times DE. \text{ Quod erat primum.}$$

ductis ergo quadratis abscissarum CO², CE² summa est æqualis CA²; nam est CE²=CA²-CO² ergo CE²+CO²=CA²-CO²+CO²=CA².

Sit BC diameter conjugata diametri AC, est

$$PO^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times CA^2 - CO^2 \text{ \& } KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2}$$

Tom. I.

$$\times AC^2 - CE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - AC^2 + \frac{BC^2}{AC^2} CO^2, \text{ ergo } PO^2 + KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - CO^2 + CO^2 = BC^2$$

Sit autem Diameter AC axis, ordinatæ erunt perpendiculares, ergo PO²+CO²=PC², & CE²+KE²=CK² (per 47. 1. El.) ergo PO²+CO²+CE²+KE²=PC²+CK², sed PO²+KE²=BC², CO²+CE²=AC² Ergo PC²+CK²=AC²+BC². Quarumvis Diametrorum conjugatarum quadrata æqualem summam facient ac quadrata axium.

Denique si punctum O in axi ita sit sumptum ut sit  $\frac{1}{2} CA^2 = CO^2$  & sit ducta in O ejus ordinata & per ejus verticem P ducatur Diameter ejusque conjugata, quadratum abscissæ quæ respondebit vertici Diametri conjugatæ erit æquale AO×DO five AC²-CO² sed CO²= $\frac{1}{2}$ CA² per hypothesim, ergo hoc quadratum erit etiam æquale  $\frac{1}{2}$ AC², eadem ergo abscissa ac proinde æquales ordinatæ verticibus utriusque Diametri respondebunt, æquales ergo erunt illæ Diametri conjugatæ siquidem sunt Hypothenusæ æqualium abscissarum & Ordinarum.

*Cor. I.* Si à vertice Diametri PC, producat Tangens terminata utrinque in M & Z, ad Diametros conjugatas CA, CB productas, erit semi-Diameter CK priori conjugata media proportionalis inter partes Tangentis PM:PZ: Ductis enim ordinatis PFPO, ob similia Triangula CKE, ZFP, POM, est CK:CE=ZP:FP (five CO) & CK:CE=PM:MO unde compositis rationibus est CK²:CE²=ZP×PM:CO×MO, sed CO×MO=AO×DO (per Cor. 3. Lem. V.) & AO×DO=CE² per præsens Theorema, ergo CK²:CE²=ZP×PM:CE² & CK²=ZP×PM five ZP:CK=CK:PM. Q. E. D.

Et conversâ per se liquet, nempe quod si duæ Diametri occurrant Tangenti ductæ in Vertice alterius Diametri, ita ut hujus  $\frac{1}{2}$  Diameter conjugata sit mediâ proportionalis inter partes tangentis, duæ illæ priores Diametri erunt inter se conjugatæ.

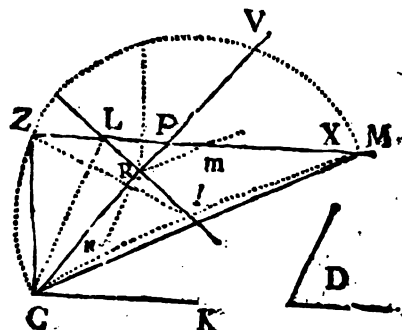
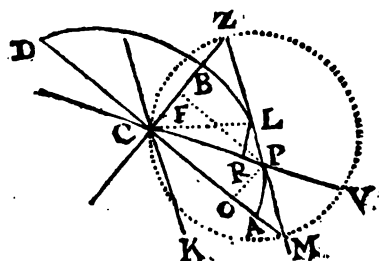
R

Pro-

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS.

*Problema.* Datis tam positione quam magnitudine Ellipseos alicujus non descriptæ duabus Diametris conjugatis invenire positionem & magnitudinem duarum aliarum Diametrorum conjugatarum, quæ faciant inter se angulum quemvis datum.

1. 3. Elem.) secabit verò Tangentem in punctis Z & M, è quibus ductis CZ, CM habetur Diametrorum quæsitæ positio.



*Primus Casus:* Angulus qui datur sit rectus, h. e. Diametri quæsitæ sint Axes conjugati. Sint verò semi-Diametri datæ CP CK, per verticem P unius ducatur linea alteri CK parallela, quæ ideo erit Ellipsis Tangens in eo puncto. (per Lem. IV.) producat. CP in V ita ut sit CP:CK = CK:PV, in medium R lineæ CV erigatur perpendicularis tangentem secans in L, & ex L velut Centro radio LC qui æqualis est LV, describatur circulus transiens per puncta C & V, & Tangentem secans in punctis Z & M, dico lineas ZCM esse in axium positione.

*Demonst.* Angulus enim ZCM est rectus quia est in semi-circulo per constructionem, præterea quia chordæ CV ZM sese secant in P est CP × PV = ZP × PM (per 35. 3. Elem.) sed CP × PV = CK² per constructionem, ergo CK² = ZP × PM ideoque, per Corollarium præcedentis conversam, lineæ CZ, CM, cadunt secundum Diametros conjugatas.

*Sec. Casus.* Si angulus datus D rectus non sit, centrum circuli describendi non erit in L sed in alio puncto I ejusdem lineæ RL in medio R lineæ CV perpendicularis: sic verò invenitur: ducatur ex R perpendicularis in Tangentem fiatque cum eâ angulus æqualis dato, & linea eum formans secet Tangentem in m, ducatur LC, & per R linea RN ipsi Parallela, ex C ut centro, radioque æquali Rm secetur RN in N, ductaque CN quæ secet LR in I erit I centrum circuli ex quo si radio IC circulus describatur, is transibit per C & etiam per V (per const. &

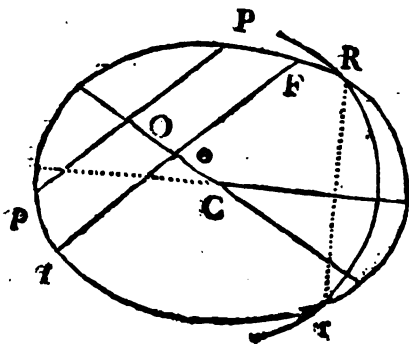
*Demonst.* Evidens est, sicut in priore hujus demonstrationis parte, lineas CZ CM, cadere secundum Diametros conjugatas, quæstio est utrum faciant in C angulum datum, ex centro I ducatur linea parallela lineæ Rm, dico illam occurrere Tangenti in puncto M, hoc est illam fore æqualem radio IM sive IC, occurrat enim Tangenti in X erit ob Parallelas LR:Rm = LI:IX; sed propter Parallelas RN & LC triangula NIR CIL, sunt similia, estque LR:IN = LI:IC, & sumptis vel differentiis vel summis terminorum utriusque rationis est LR:GN = LI:IC est verò per constructionem CN = Rm ergo LR:Rm = LI:IC ergo LI:IX = LI:LC, scilicet est IX = IC, hoc est X cadit in M; radius ergo IM cum sit Parallelus lineæ Rm, faciet cum perpendiculari quæ in lineam ZM duceretur eundem angulum quem format linea Rm cum perpendiculari in eadem lineam ductâ, angulum nempe quæsitum: & angulus ZIM ejus erit duplum; sed angulus ZCM est anguli ZIM dimidium, ergo est æqualis angulo quæsito.

Determinatur autem Diametrorum magnitudo, ductis ex P in utramq. Diametrum ordinatis PO, PF lineis CZ, CM, Parallelis; ½ Diametri enim erunt mediæ proportionales inter abscissas à centro, & lineas à centro ad Tangentem sumptas, hoc est, erit CO:CA = CA:CM; & CF:CB = CB:CZ; undè cum cognoscantur CO & CM, CF & CZ determinantur CA & CB.

*Cor. I.* Datis axibus, foci inveniuntur si ex

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 131

ex vertice axis minoris, ut centro, cum radio æquali semi axi majori ipse major axis secetur, & datis focus & axi majori puncta quotlibet ad Ellipsim pertinentia inveniri possunt, si ab uno foco ducatur ut libet linea æqualis axi majori & ab ejus extremitate ducatur linea ad alterum focum, fiat in hoc foco super hanc lineam angulus æqualis angulo qui sit inter lineas à focus ductas, secabitur prima linea in puncto ad Ellipsim pertinente.



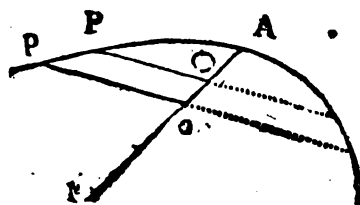
Cor. II. Si Ellipsis sit data, sic inveniuntur centrum & Axes: ducantur ut lubet duæ Parallelæ Pp, Ff, per earum medium O: o, ducatur linea, erit Diameter, ejus medium C erit Centrum ex quo describatur circulus qui secet curvam in duobus punctis Rr ducatur per centrum linea perpendicularis in lineam Rr quæ eam bifariam dividet (per 3. 3. Elem.) erit ergo Axis, alter axis habetur erigendo lineam huic perpendicularem in Centro ad curvam usque.

## IX. De Parabola.

I. Theor. Omnes Diametri Parabolæ sunt infinitæ & inter se Parallelæ: quadrata ordinarum sunt inter se ut Abscissæ Diametrorum, & cum tertia proportionalis abscessæ & ordinatæ dicatur Latus Rectum, factum lateris Recti per abscissam est æquale quadrato ordinatæ, hincque derivatur nomen hujus curvæ. (Apol. lib. 1. Prop. 10.)

Dem. Ducatur in basi conic chorda parallela plano Parabolæ, & infinitè parva, per verticem conic & eam etiam ducatur Planum & aliud illi parallelum per unam è lineis Pa-

rabolæ in hoc plano formabitur Hyperbola, De Mo- sed quam proxima Parabolæ, & cujus centrum TU COR- tanto magis à Vertice conic removeretur quo PORUM. minor est chorda per quam transit planum LIBER chorda, centrum ejus Hyperbolæ in infinitum PRIMUM. tum abibit, & ut Planum verticale fiet tangens cono, coincidet hæc Hyperbola cum Parabolâ, sed omnes ejus Diametri à puncto infinitè remoto divergentes erunt Parallelæ & infinitæ, tales ergo etiam erunt Diametri Parabolæ. Præterea ex casu 2<sup>do</sup>. Lem. III. constat, quod si secans infinita plures lineas Parallelas in Sectione Conicâ secet, abscissæ erunt inter se ut facta partium linearum Parallelarum, sed hæc bifariam dividuntur à Diametro, sunt ergo Diametri abscissæ sicut quadrata ordinarum.



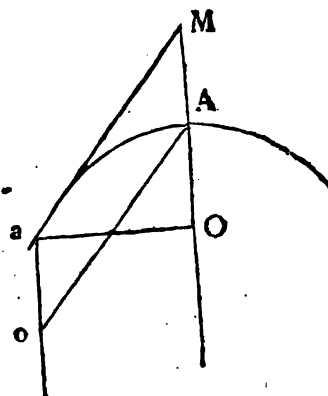
Fiat AO, OP = OP: L erit OP<sup>2</sup> = AO x L; esto verò quævis alia abscissa Ao & ordinata op erit AO: Ao = OP<sup>2</sup>: op<sup>2</sup>, & multiplicando primam rationem per L erit L x AO: L x Ao = OP<sup>2</sup>: op<sup>2</sup>, sed per Hypothesim AO x L = OP<sup>2</sup> ergo etiam L x Ao = op<sup>2</sup> hoc est factum Lateris recti per quævis abscissam æquale est quadrato ordinatæ ipsi respondentis.

Cor. I. Si in Diametrum productam sumatur à Vertice longitudo æqualis lateri Recto, & ab ejus extremo ad extremum abscissæ describatur semi-circulus, & in vertice diametri Parabolæ erigatur Perpendicularis ad circumulum atque, erit hæc perpendicularis æqualis ordinatæ ad eam abscissam pertinenti.

Cor. II. Si in Diametro quævis sumatur à vertice quarta pars ejus lateris recti, ordinatim applicata illi puncto erit æqualis lateri recto. Sit enim Ao =  $\frac{1}{4}$  L est  $\frac{1}{4}$  LL = op<sup>2</sup>: ergo LL = 4 op<sup>2</sup> & L = 2 op. huius totum ordinatim applicatæ in o.

R 2 • Cor.



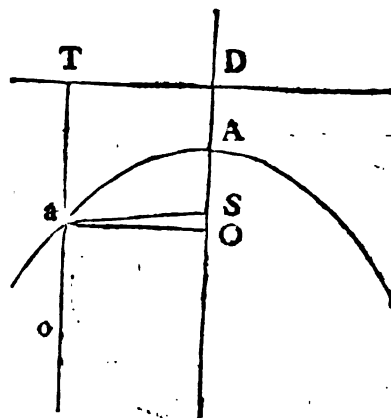


Cor. III. Latus Rectum Diametri cuiusvis est æquale Lateri recto axis & quadruplo abscissæ axis determinatæ per ordinatam à vertice Diametri in axem ductam. Ducatur ex vertice a Diametri tangens a M quæ axi occurrat in M & a O ordinata axi, per Corollarium Lemmatis V. distantia verticis axis A ad M est æqualis distantie ejusdem verticis ab O, ergo  $MO = \frac{1}{2}AO$ , & (per 47. 1. Elem.) est  $M^2 = MO^2$  (five  $4AO^2$ )  $+ aO^2$  (five  $L \times AO$ )  $= 4AO + L \times AO$ ; à vertice A axis ducatur ordinata Ao ad Diametrum propositam, evidens est ob parallelas a o, AO, & Tangentem ordinatæ parallelam, esse  $ao = AM$  five  $AO$  &  $oA = aM$ ; sit verò l latus Rectum Diametri a o, erit  $oA^2$ , five  $aM^2 = l \times ao = l \times AO$  sed erat  $aM^2 = 4AO + L \times AO$  ergo  $l \times AO = 4AO + L \times AO$ , unde  $l = L + 4AO$ . Q. E. D.

Theor. II. Si in axe sumatur à vertice quarta pars ejus lateris recti, id punctum vocatur Parabolæ focus, si verò ultra verticem eadem feratur longitudo & per punctum in quo cadit ducatur linea axi perpendicularis, dicetur Directrix Parabolæ: Si autem producat quævis Diameter ad Directricem, portio ejus inter verticem & Directricem comprehensa est quarta pars lateris Recti ejus Diametri, & est æqualis distantie ejus verticis à foco.

Demonst. Ut enim Diameter & axis sunt paralleli, ducta perpendiculari a T à vertice diametri ad directricem erit  $T = OD =$

$DA + AO$ , est verò DA, quarta pars lateris recti principalis & AO abscissa axis quæ respondet ordinatæ a O à vertice Diametri ductæ, est verò (per Corol. 2. Theor. præced.) latus rectum diametri æquale quadruplo lateris recti & quadruplo AO, hoc est  $= 4DA + 4AO$  ergo  $aT = DA + AO$  est quarta pars lateris Recti Diametri a o.

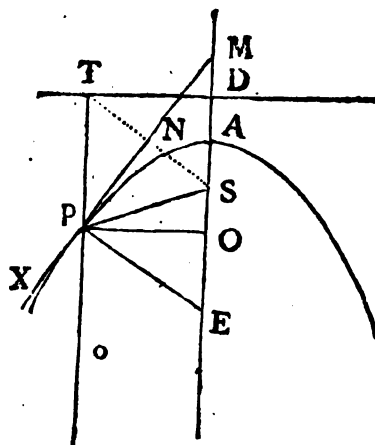
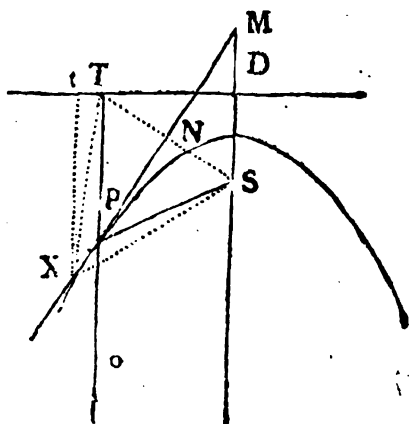


Secundò, E foco Parabolæ S, ad verticem Diametri ducatur Sa, sique ducta a O ordinata axi, (per 47. 1. Elem.) est  $Sa^2 = SO^2 + aO^2$  &  $aO^2 = 4DA \times AO$ : ergo  $Sa^2 = SO^2 + 4DA \times AO$ , sed est  $DO^2$  (per 8. 1. El.)  $= SO^2 + 4DA \times AO$ , ergo  $DO^2 = Sa^2$  &  $Sa = DO = aT$ .

Theor. III. Si à puncto Parabolæ ducatur perpendicularis ad Directricem, & linea ad focum, bifariamque dividatur Angulus quem faciunt, linea eum dividens erit Tangens in eo puncto, quæ si producatur donec secet axem, portio axis à foco ad occursum Tangentis contenta erit æqualis lineæ à foco ad punctum Parabolæ ductæ: Angulus Diametri cum Tangente erit æqualis angulo lineæ à foco ductæ cum eâ Tangente, ideo ea quæ secundum Diametros ad Parabolam adpellunt ad focum reflectentur, & Angulus Diametri cum lineâ à foco ductâ bifariam dividitur per perpendicularem ad curvam: Si ea perpendicularis secet axem, pars axis inter eam & ordinatam axi ex Vertice Diametri ductam, est æqualis dimidio lateris recti principalis, & pars axis inter eam & Tangentem comprehensa, est dimidium lateris Recti Diametri, ipsa verò per-

perpendicularis est media proportionalis inter ea semilatera recta.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



*Demonst.* Sit TD directrix, à puncto P linea PT perpendicularis in Directricem ducatur, ducatur etiam ad focum linea PS & denique ducatur linea PN bifariam dividens angulum SPT; illa linea perpendiculariter & bifariam dividet lineam ST à foco ad punctum T ductam. Ex quovis puncto X lineæ PN ducantur lineæ XT, XS, erunt inter se æquales (*per 4. 1. Elem.*), erit verò XT directrici obliqua ideoque perpendicularis ab X in Directricem demissa erit brevior quam XT ac per consequens brevior quam XS, ergo id punctum X vicinius erit Directrici quam foco, erit ergo extra Parabolam, ideoque linea PN erit Tangens, cum in unico puncto P Parabolæ occurrat.

Anguli autem TPN, NMS sunt æquales ob Parallelas TP, MS, & per const. TPN = NPS, ergo NMS = NPS, est ergo Triangulum MSP Isosceles, & MS = SP.

Anguli autem XPo, TPN, per verticem sunt oppositi, ergo sunt æquales, sed TPN = NPS per const. ergo XPo = NPS.

Dividatur bifariam angulus SPo per lineam PE ita ut sit oPE = EPS; erit XPo + oPE = NPS + EPS hi qua-

tuor valent duos rectos, ergo XPo + oPE valent rectum & est PE perpendicularis in Tangentem.

Est ergo in Triangulo Rectangulo MPE (ducta perpendiculari PO) MO:PO = PC:MO, est verò PO = LXAO &

$$MO = 2AO \text{ ergo } OE = \frac{L \times AO}{2AO} = \frac{L}{2}$$

Ergo etiam EM est æqualis dimidio lateris Recti Diametri Po, est enim ejus Latus Rectum æquale lateri Recto principali & quadruplo abscissæ AO, est verò OE dimidium lateris Recti Principalis & MO = 2AO, sive dimidium quadrupli AO, ergo EM =  $\frac{1}{2}l$ .

Est etiam ob Triangulum Rectangulum MPE, EM:PE = PE:OE; ergo est PE hoc est perpendicularis in curvam, media proportionalis inter semilatus rectum Diametri & semilatus rectum Axis.

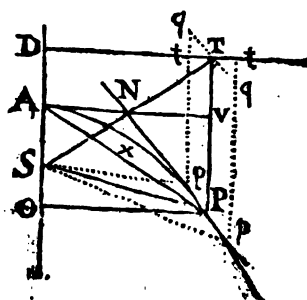
*Theor. IV.* Superficies Parabolica inter curvam, abscissam Axis & ejus ordinatam comprehensa, est ad factum abscissæ per Ordinatum ut duo ad tres, segmentum verò Parabolicum inter curvam & chordam à Vertice ductam terminatum, est ejusdem facti sexta pars.

# 134 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Demonst.* Ex foco S ducatur SP ad quodvis Parabolæ punctum P & ex P ducatur PT ad directricem perpendicularis, ducatur Tangens in puncto P, & in ea sumantur puncta p, p puncto P proxima & utrinque à puncto P æqualiter distita, ab iis ducantur ad focum lineæ Sp Sp, & pq, pq, lineæ PT parallelæ & æquales; ducaturque qTq, habebitur Parallelogrammum pqqp, cujus basis pp est eadem cum basi Trianguli Spp; si verò ducatur ST, quam Tangens PN, bifariam & perpendiculariter dividit in N, erit SN altitudo Trianguli Spp, & NT = SN, altitudo Parallelogrammi pqqp, cum ergo bases & altitudines sint æquales, (per 41. 1. Elem.) erit Parallelogramma pqqp duplum Trianguli Spp, sed est pqqp æquale Trapezio tppp, cum ergo tota superficies DAXPT talibus Trapeziiis tppp constet, & superficies ASPX, talibus Triangulis Spp, erit superficies DAXPT dupla superficiei ASPX.

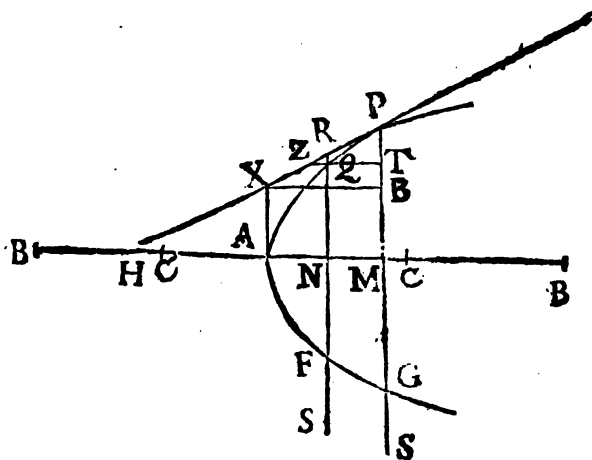
Si verò ducatur AV Tangens in A & chorda AP, erit Parallelogrammum DAVT, duplum Trianguli ASP, bases enim AD, AS sunt æquales, altitudo verò



Trianguli est PQ, parallelogrammi AV & PO = AV: si ergo DAVT ex DAXPT detrahatur, & ASP ex ASPX, residuum primæ figuræ AXPV erit duplum segmenti APX in altera residui, hæc verò simul sumpta faciunt Triangulum AVP, vel AOP, quod est ergo triplum segmenti APX, & tota figura AOPV ejus sextuplum, & area Parabolica AOPX, ejus quadruplum, est ergo area Parabolica ad Parallelogrammum AOPV ut 4. ad 6. five ut 2. ad 3. Q. E. D.

HIS verò circa Conicas Sectiones ad mentem revocatis, sine quibus sequentia intelligi nequeunt, præhabetur, *viam centripetam quâ corpus tendens ad punctum remotissimum Sectionem Conicam describit, esse reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium tendentis*; Corpus P moveatur in Sectione conicâ PAF, & vis centripeta agat juxta directionem parallelarum PS, RS, axi AB applicatarum. Linea PH, Sectionem tangat in P, sintque ZT, XB, axi parallelæ, & XA ipsa Tangens in A, & ob similia triangula XPB, ZTP, ZQR, erit.

PX : BX (scu AM) = PR : QT & PX : AM = PR : QT, & (per Prop. 16. lib. 3. Conic. Appoll. quæ est Cer. 2. Lem. III. de Conicis) PR : QR x FR = PX : AX, adeoque PR =  $\frac{PX \times QR \times FR}{AX^2}$ , ergò



$$PX^2 : AM^2 = \frac{PX^2 \times QR \times FR}{AX^2} : QT^2;$$

$$\& AX^2 : AM^2 = QR \times FR : QT^2; \text{ unde}$$

$$\frac{QT^2}{QR} = \frac{AM^2 \times FR}{AX^2} = \frac{AM^2 \times 2 PM}{AX^2} \text{ ubi}$$

par-

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 135

puncta P, Q, coeunt, &  $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} =$   
 $\frac{AM^2 \times 2PM \times SP^2}{AX^2}$ . Est ergo (per co-

roll. I. & V. prop. VI<sup>e</sup>.) in omnibus sectionibus conicis vis centripeta reciproce  
 ut  $\frac{AM^2 \times PM \times 2SP^2}{AX^2}$ , hoc est, dele-

to  $2SP^2$ , constante, reciproce ut  $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2}$ .

Porrò ob similitudinem triangulorum HAX, HMP, est HM:PM=HA:AX= $\frac{PM \times HA}{HM}$

&  $AX^2 = \frac{PM^2 \times HA^2}{HM^2}$  &  $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2} =$

$\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$ , vis igitur est etiam in om-

ni sectione conicâ reciproce ut  $\frac{AM^2 \times HM}{PM \times HA^2}$ .

In Parabolâ (per prop. 35. lib. 1. Conic. Appoll. five Cor. 1. Lem. V. de Conicis) HA=AM, & HM=2AM, & (per prop. 20. lib. 1. Conic. Appoll. quæ est Theor. I. de Parabola) AM, adeoque & HM est semper ut PM<sup>2</sup>. Ergò vis centripeta

in parabolâ erit reciproce ut  $\frac{4AM^4}{PM \times AM^2}$

five ut  $\frac{AM^2}{PM}$ , hoc est, ut  $\frac{PM^4}{PM} = PM^3$ ;

hoc est, reciproce ut cubus ordinatæ PM.

In Ellipfi & Hyperbolâ, si latus rectum axis AB, dicatur L, erit (ex prop. 21. lib. 1. Conic. Appoll. five Theor. II. de Ellip.) PM<sup>2</sup>:AM×MB=L:AB

ac proinde AM= $\frac{PM^2 \times AB}{L \times MB}$ , & AM<sup>2</sup>

= $\frac{PM^4 \times AB^2}{L^2 \times MB^2}$ , &  $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2} =$

$\frac{PM^3 \times AB^2 \times HM^2}{L^2 \times MB^2 \times HA^2}$ , undè deletâ ra-

tione constanti  $\frac{AB^2}{L^2}$ , erit vis centripeta re-

ciproce ut  $\frac{PM^3 \times HM}{MB^2 \times HA^2}$ ; verùm (per prop.

37. lib. 1. Conic. Appoll. sup. Cor. 2. Lem. V.) posito centro sectionis C, est CM:CA=CA:CH, adeoque dividendo vel componendo CM:AM=CA:HA, ac proinde addendo vel detrahendo terminos secundæ rationis è terminis prioris MB:HM=CA:HA

&  $\frac{HM}{MB \times HA} = \frac{1}{CA}$  &  $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2} = \frac{1}{CA^2}$

quæ est quantitas constans. Erit igitur etiam in hyperbolâ & Ellipfi adeoque in omni sectione conicâ vis centripeta reciproce ut PM<sup>3</sup>; seu reciproce ut cubus ordinatæ PM; deletâ nimirum, in expressione vis centripetæ suprâ inventâ, quantitate  $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2}$ , constante.

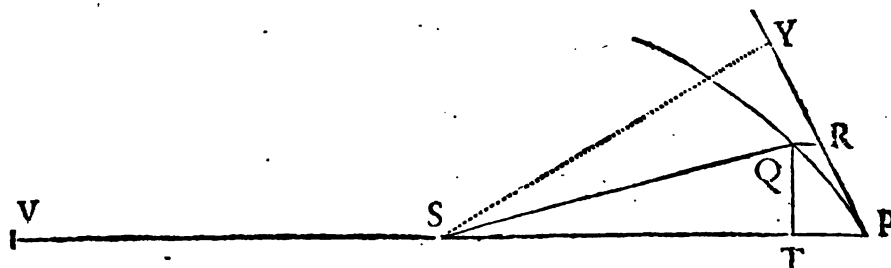
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Gyretur corpus in spirali P Q S secante radios omnes SP, SQ, &c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.*

(f) Detur angulus indefinite parvus  $PSQ$ , & ob datos om-



nes angulos dabitur specie figura  $SPRQT$ . Ergo datur ratio  $\frac{QT}{QR}$ , estque  $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$  ut  $QT$ , hoc est (ob datam specie figuram illam) ut  $SP$ . Mutetur jam utcumque angulus  $PSQ$ , & recta  $QR$  angulum contactus  $QPR$  subtendens mutabitur (*per lemma xi.*) in duplicatâ ratione ipsius  $PR$  vel  $QT$ . Ergo manebit  $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$  eadem quæ prius, hoc est ut  $SP$ . Quare  $\frac{QT \times SP}{QR}$  est ut  $SP \text{ cub.}$  ideoque (per corol. 1. & 5. prop. vi.) vis centripeta est reciprocè ut cubus distantiae  $SP$ . *Q. E. I.*

(<sup>c</sup>) 225. Ob omnes angulos datos, dabitur specie figurā SPQR T, & ipsius latera omnia erunt inter se in datā seu constanti ratione, ergo datur ratio  $\frac{QT}{QR}$ , estque proinde  $\frac{QT}{QR} \times QT$ , ut QT hoc est, ob datam rationem QT, ad SP, erit  $\frac{QT^2}{QR}$ , ut SP, mutetur jam utcumque angulus PSQ, & manebit  $\frac{QT^2}{QR}$ , ut SP. Nam QR, ubi angulus PSR constans est, dicatur a, & QT dicatur b; ubi verò angulus PSR utcumque mutatur, QR di-

catur  $x$ , &  $QT$  dicatur  $y$ , & erit per  
 Lem XI. a:  $x = b^2 : y^2$ , adeoque  $\frac{b^2}{a} = \frac{y^2}{x}$   
 hoc est  $\frac{y^2}{x}$  seu  $\frac{QT^2}{QR}$  eadem manet quæ  
 prius, nimirum ut  $SP$ . Quoniam autem  
 evanescente angulo  $PSR$ , five coeuntibus  
 punctis  $Q$ ,  $P$ , recta  $SR$ , rectæ  $SP$  pa-  
 rallela evadit, erit per coroll. 1. & v.  
 prop. VI<sup>æ</sup>. vis centripeta reciprocè ut  
 $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$ , ac proinde substituendo  
 $SP$ , loco  $\frac{QT^2}{QR}$ , vis centripeta erit re-  
 ciprocè ut  $SP^2$ .

*Idem aliter.*

(<sup>t</sup>) Perpendicularum SY in tangentem demissum, & circuli spiralem concentricè secantis chorda PV sunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque SP cub. est ut SYq x PV, hoc est (per corol. 3. & 5. prop. vi.) reciprochè ut vis centripeta.

LEMMA XII.

*Parallelogramma omnia circa datæ ellipseos vel hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta esse inter se æqualia.*  
Constat ex conicis. (y)

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

*Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos. (z)*

(<sup>t</sup>) 226. Sit circuli spiralem osculantis in P chorda per centrum virium S ducta PV, demissumque in tangentem perpendicularum SY, & ob angulum SYP, rectum, & SPY, datum, dabitur specie triangulum SPY. Ergò datur ratio SY ad SP, & in virium centripetarum formulis SP scribi potest pro SY. Præterea datur ratio PV ad SP, nam (210) SY x QP = SP x QT, adeoque QP =  $\frac{SP \times QT}{SY}$ ;

undè ob rationem  $\frac{SP}{SY}$  datam, QP scribi potest pro QT. Verùm (211) PV =  $\frac{QP^2}{QR}$ , ergò PV, est ut  $\frac{QT^2}{QR}$ . Cùm

igitur ex demonstratis in Prop. IX.  $\frac{QT^2}{QR}$ , sit ut SP, erit etiam PV, ut SP, & propterea SP, loco PV, substitui potest in formulis.

227. Scholion. Propositio IX. facile demonstratur etiam per formulam *Hermani* (214),  $v = dp : p : dz$ ; est enim in hoc casu SP = z, SY = p; & si ratio  $\frac{SY}{SP}$  da-

ta dicatur  $\frac{a}{b}$ , erit  $\frac{a}{b} = \frac{p}{z}$  ergo  $az = bp$ ;

Tom. I.

& (160)  $adz = bdp$ , &  $\frac{dp}{dz} = \frac{a}{b}$ ;

undè  $v = \frac{a}{bp}$ ; hoc est, ob datam  $\frac{a}{b}$

vis centripeta v, est directè ut  $\frac{1}{p}$ , hoc

est reciprochè ut p, aut quia  $p = \frac{za}{b}$ ,

v erit ut  $\frac{1}{z}$  directè, reciprochè autem ut z, deletis nimirum constantibus.

(y) Demonstratio hujus Lemmatis inferius tradetur ubi nempe NEWTONUS eo Lemmate ad solutionem proximi Problemmatis utetur.

(z) 228. Gyretur corpus in Hyperbolâ, invenietur Lex vis centralis spectantis centrum Hyperbolæ simili modo, nisi quod vis illa ejus centri respectu sit centrifuga, quoniam centrum Hyperbolæ non est intra Hyperbolam constitutum, sed Hyperbola versus illud convexitatem obvertit; Legatur, si lubet, utraque solutio hujus Problemmatis & ad figuram infra positam in quâ Hyperbola descripta est referatur, liquebit verè dici de Hyperbolâ ea quæ NEWTONUS de Ellipsi statuit.

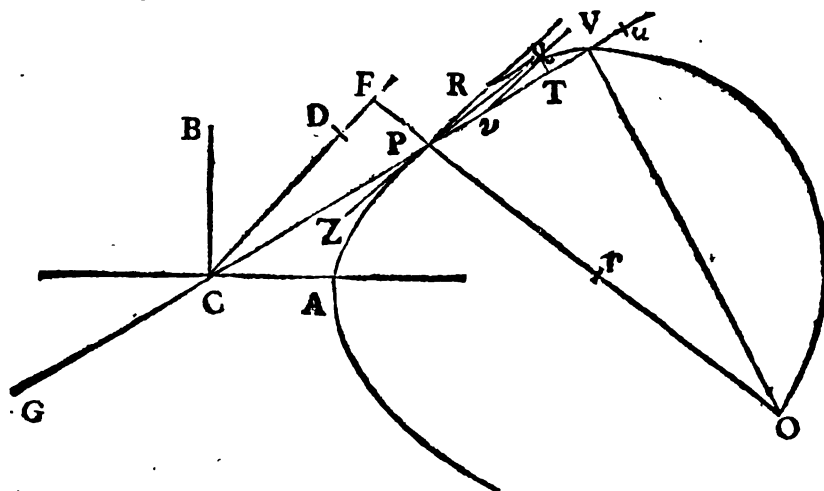
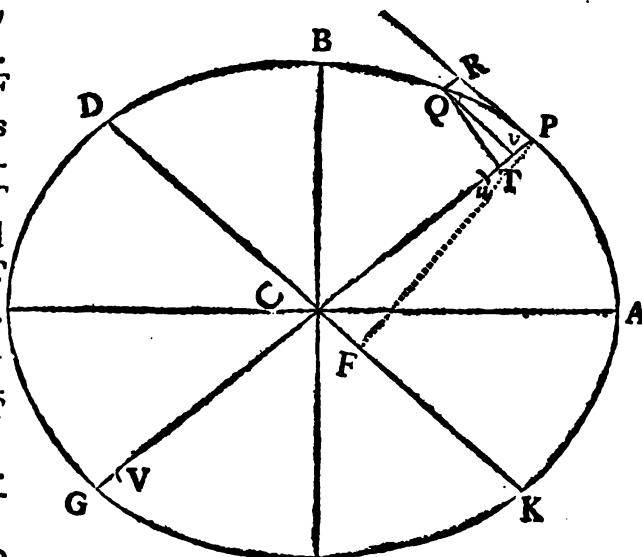
S

Ex

# 138 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Sunto  $CA, CB$  semiaxes ellipseos;  $GP, DK$  diametri aliæ con-  
jugatæ;  $PF, QT$  perpendiculara ad diametros;  $Qv$  ordinatim  
applicata ad diametrum  $GP$ ; & si compleatur parallelogram-  
mum  $QvPR$ , erit ((<sup>a</sup>) ex conicis) rectangulum  $PvG$  ad  
 $Qv$  quad. ut  $PC$  quad. ad  $CD$  quad. & (ob similia triangu-  
la  $QvT, PCF$ )  $Qv$   
quad. est ad  $QT$  quad.  
ut  $PC$  quad. ad  $PF$   
quad. & conjunctis  
rationibus, rectan-  
gulum  $PvG$  ad  $QT$   
quad. ut  $PC$  quad. ad  
 $CD$  quad. &  $PC$   
quad. ad  $PF$  quad.  
id est,  $vG$  ad  
 $\frac{QT \text{ quad.}}{Pv}$  ut  $PC$   
quad. ad  $\frac{CDq \times PFq.}{PCq.}$   
Scribe  $QR$  pro  
 $Pv$ , & (per lemma XII. (<sup>b</sup>))  $BC \times CA$  pro  $CD \times PF$



(<sup>a</sup>) Ex Conicis, per 21. 1. lib. Apoll.  
Vide sup. Lemna IV. de Conicis.

(<sup>b</sup>) 229. Parallelogramma omnia circa  
data Ellipseos vel Hyperbolæ Diametros quas-  
vis.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 139

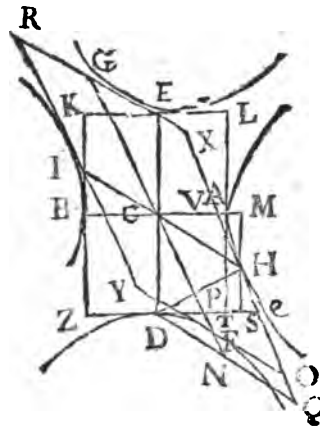
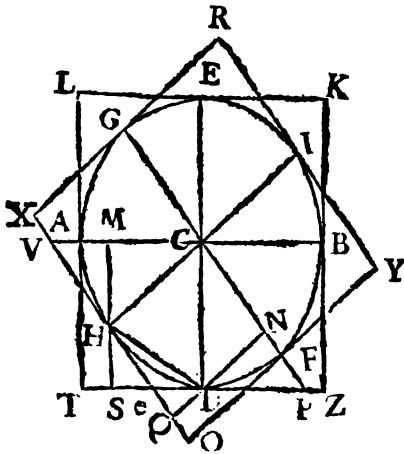
nec non (punctis  $P$  &  $Q$  coeuntibus)  $2PC$  pro  $vG$ , & ductis extremis & mediis in se mutuo fiet  $\frac{QT \text{ quad.} \times PCq}{QR}$  æquale  $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$ . Est ergo (per corol. 5. prop. VI.) vis centripeta

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.

reciprocè ut  $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$ ; id est (ob datum  $2BCq \times CAq$ ) reciprocè ut  $\frac{1}{PC}$ ; hoc est, directè ut distantia  $PC$ . Q.E.I.

## Idem aliter.

In rectâ  $PG$  ab alterâ parte puncti  $T$  sumatur punctum  $u$  ut  $Tu$  sit æqualis ipsi  $Tv$ ; deinde cape  $uV$ , quæ sit ad  $vG$  ut est



vis conjugatas descripta sunt inter se æqualia.

Dem..... Sinto Ellipticos & hyperbolæ axes  $ED$ ,  $AB$ , &  $GF$ ,  $HI$ , diametri conjugatæ, ductisque per axium & diametrorum extrema tangentibus, describantur rectangulum  $LKZT$ , & parallelogrammum  $XR YO$ ; jungatur  $DH$ , &  $DN$  ordinatim applicetur ad diametrum  $GF$ , erit (per prop. 37. lib. 1. Conic. Appoll. sup. Cor. 2. Lem. V. de Conicis)  $PC$  ad  $CF$ , (hoc est, parallelogrammum  $PCVe$ , ad parallelogrammum æquè altum  $CHOF$ ) sicut  $CF$ , ad  $CN$ ; hoc est, sicut idem parallelogrammum  $CHOF$ , ad parallelogrammum  $CHQN$ ; & similiter  $VC$ , erit ad  $CA$ , (hoc est, parallelogrammum  $PCVe$ , ad æquè altum,

$CATD$ ) sicut  $CA$  ad  $CM$ , hoc est, sicut idem  $CATD$ , ad rectangulum  $CMSD$ , seu ad prædictum parallelogrammum  $CHQN$ ; nam rectangulum  $CMSD$ , duplum est trianguli  $CHD$ , ejusdem basis  $CD$  ejusdemque altitudinis  $MC$ , & parallelogrammum  $CHQN$  est etiam ejusdem trianguli duplum, cum sit utriusque basis communis  $HC$  & eadem altitudo ob parallelas  $HC$ ,  $QN$ ; ac proinde  $CMSD = CHQN$ . Cum igitur sit  $PCVe : CHOF = CHOF : CHQN$ , &  $PCVe : CATD = CATD : CHQN$ , necesse est ut sit  $CATD = CHOF$ , quare rectangulum  $LKZT$ , quadruplum rectanguli  $CATD$ , æquale est parallelogrammo  $XR YO$ , etiam quadruplo parallelogrammi  $CHOF$ . Q.E.D.



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*DC quad. ad PC qu.*

Et quoniam ex co-

nicis est *Ququad.* ad

*Pv G ut DC quad.*

ad  $PC$  quad. erit  $Qv$

quad. æquale  $Pv \times$   
 $vK$  Adde restang.

*uv*. Adde rectangu-  
lum *u P*  $\frac{1}{2}$  utrinque.

& prodibit quadra-

tum chordæ arcûs(c)

$PQ$  æquale rectan-

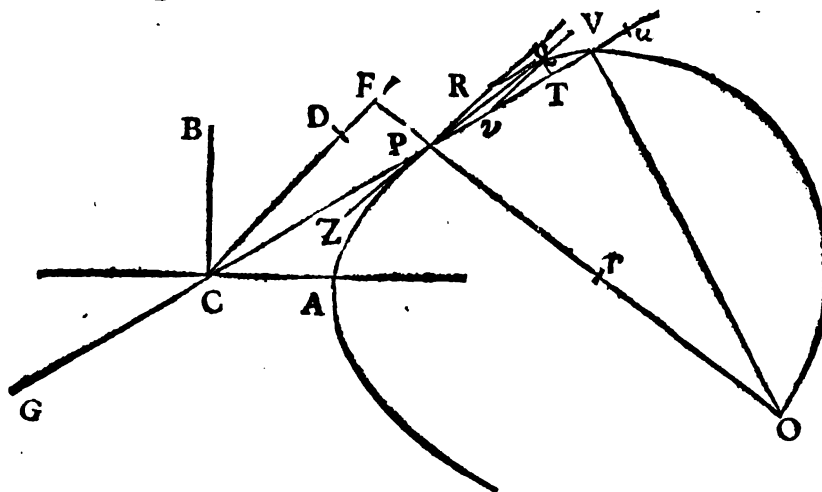
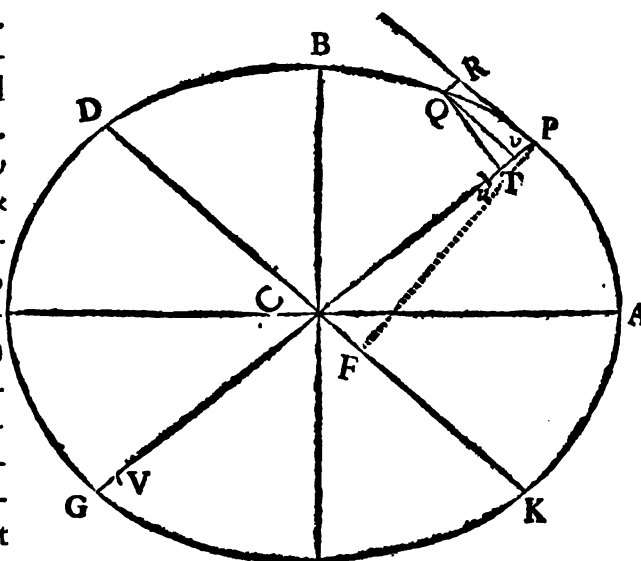
guľo  $\check{V}Pv$ ; (d) ideo-

que circulus, qui tan-

git sectionem coni-

cam in P & transit

per punctum  $Q$ , tran-



(c) *Adde Reflangulum u P v utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs PQ, æquale reflangulo VP × Pv. Nam (per construct.)* est quadratum chordæ arcûs  $PQ = QT^2 + PT^2$ , sed est  $QT^2 = Qv^2 - Tv^2$  five quia  $Tv = Tu$  est  $QT^2 = Qv^2 - Tu^2$ , ideo quadratum chordæ arcûs  $PQ = Qv^2 - Tu^2 + PT^2$ , est verò  $PT^2 - Tu^2 = PT + Tu \times PT - Tu$  five  $PT - Tv = Pu \times Pv$ , ergo quadratum chordæ arcûs  $PQ = Qv^2 + Pv \times Pu$ .

Quod si Rectangulo  $Pv \times v$  addas idem  
rectangulum  $Pv \times Pu$ , est  $Pv \times Vu + Pv$   
 $\times u = Pv \times Vp$ , erat verò  $Qv^2 = Pv$   
 $\times v$ , ergo  $Qv^2 + Pv \times Pu$  five quadra-  
rum chordæ  $VP$ , five  $VPv$ .

(d) Ideoque circulus qui tangit sectionem in P, & transit per punctum Q, transibit etiam per punctum V; nam ductis circuli illius chordis QP, QY, angulus

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 141

fit etiam per punctum  $V$ . Coeant puncta  $P$  &  $Q$ , & ratio  $uV$  ad  $vG$ , quæ eadem est cum ratione  $DCq$  ad  $PCq$ , fiet ratio  $PV$  ad  $PG$  seu  $PV$  ad  $2PC$ ; ideoque  $PV$  æqualis erit  $\frac{2 DCq}{PC}$

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Proinde vis, quâ corpus  $P$  in ellipsi revolvitur, erit reciprocè ut  $\frac{2 DCq}{PC}$  in  $PFq$  (per corol. 3. prop. vi.) hoc est (ob datum

$2 DCq$  in  $PFq$ ) directè ut  $PC$ . *Q. E. I.*

*Corol. 1.* Est igitur vis ut distantia corporis à centro ellipseos: (c) & vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in el-

lus  $PQV = QPR$ , (ob parallelas  $Qv$ ,  $PR$ )  
 $= QYP$  (per 32. 3. Elem.) ac proinde duo  
triangula  $PQV$ ,  $PYQ$ , quæ communem  
habent angulum,  $QPY$ , & æquales  $PQV$ ,  
 $PYQ$ , similia sunt, &  $Pv:QP = QP:$

$PY$ . Undè  $PY = \frac{QP^2}{Pv}$ ; quare cum

fit  $Pv \times PV = QP^2$ , ideoque  $PV = \frac{QP^2}{Pv}$

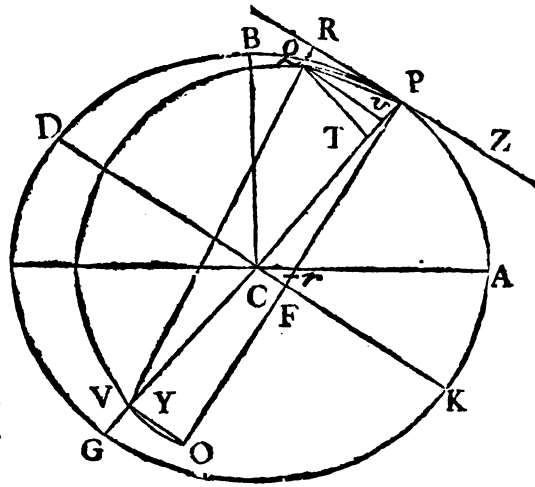
erit  $PV = PY$ .

230. Coroll. 1. . . . Ducantur circuli sectionem conicam osculantis diameter  $PO$ , & chorda  $VO$ , & ob similitudinem triangulorum  $PFC$ ,  $PVO$ , erit  $PF:PC = PV:PO = \frac{PC \times PV}{PF}$ , sed per secundam demonstrationem Newtonianam  $PV = \frac{2 DC^2}{PC}$ , ergò  $PO = \frac{2 DC^2}{PF}$ , ac pro-

inde radius osculi  $Pr = \frac{1}{2} PO = \frac{DC^2}{PF}$ , &  $PF:DC = DC:Pr$ . Quare datis diametris conjugatis eorumque angulo  $PCD$ , facile invenitur radius circuli sectionem conicam osculantis in diametri cujusvis extremo.

231. Coroll. 2. . . . Datis radio osculi  $Pr$ , semidiametro sectionis conicæ  $PC$ , & positione tangentis  $PR$ , seu angulo  $PCD$ , diametrorum conjugatarum, datur altera semidiameter conjugata  $DC$ , & describi potest sectio. His enim quæ diximus datis, datur quoque perpendicularis  $PF$ , ac proinde  $DC$ , media proportionalis inter  $Pr$ , &  $PF$ , (230) datas. Datis utem diametris conjugatis earumque angulo, sectio conica describi potest; ut notum est ex Sectionum Conicarum elementis.

232. Coroll. 3. Hinc etiam problema  $V$ . aliter solvitur. Cum enim sit vis centralis (212) ut  $\frac{CP}{Pr \times PF}$ , sitque  $PF = \frac{BC \times CA}{CD}$ , (per Lem. XII.) &  $Pr = \frac{DC^2}{PF}$  (230). His valoribus in formulâ  $\frac{CP}{Pr \times PF}$ , substitutis, ea fit  $\frac{CP}{BC^2 \times CA^2}$  hoc est, ob constantem quantitatem  $BC^2 \times CA^2$ , vis est directè ut  $PC$ . (c) Est vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in Centro Virium &c., ut hæc convertâ demonstretur sequentia sunt præmittenda.



232. Coroll. 3. Hinc etiam problema  $V$ . aliter solvitur. Cum enim sit vis centralis (212) ut  $\frac{CP}{Pr \times PF}$ , sitque  $PF =$

$\frac{BC \times CA}{CD}$ , (per Lem. XII.) &  $Pr = \frac{DC^2}{PF}$  (230). His valoribus in formulâ  $\frac{CP}{Pr \times PF}$ , substitutis, ea fit  $\frac{CP}{BC^2 \times CA^2}$

hoc est, ob constantem quantitatem  $BC^2 \times CA^2$ , vis est directè ut  $PC$ .

(c) Est vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in Centro Virium &c., ut hæc convertâ demonstretur sequentia sunt præmittenda.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

ipſiſ centrum habente in centro virium , aut forte in circulo,  
in quem utique ellipſis migrare poteſt,

233. *Lemma I.* Ducatur in puncto con-  
tactus perpendicularis in Tangentem, ad a-  
xem terminatam, & à Centro ducatur ipſi Pa-  
rallela ad Tangentem uſque, harum linea-  
rum factum erit æquale quadrato ſemi-Axis.

Ex P ducatur perpendicularis in Tangen-  
tem PK, ducatur ordinata PO perpendiculari-  
ris in axem, & in C, ducatur CQ, Parallela,  
P, & CV, parallela PO, triangula POK  
CQV, erunt ſimilia, ergo erit PO:PK  
=CQ:CV, ergo PK×CQ=PO×CV.  
ſimilia etiam ſunt Triangula CMV, OMP,  
erit ergo CM:MO=CV:PO; ſed (per Cor.

2. Lem. V. de Conicis) eſt  $CM = \frac{CA^2}{CO}$

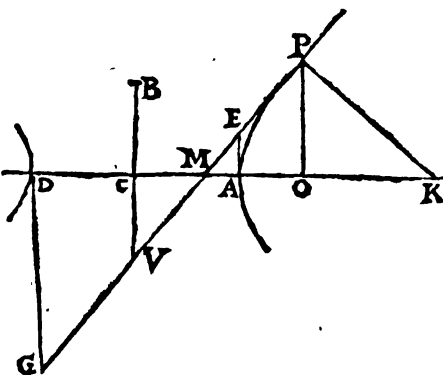
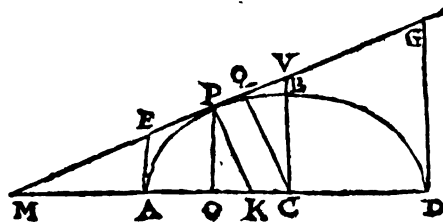
& (per Cor. 3. ejuſdem Lem.) MO =  
 $\frac{AO \times DO}{CO}$  & (per Theor. I I. tam de

Hyp. quàm de Ellip.) eſt  $CA^2 : AO \times DO$   
=  $CB^2 : PO^2$  ergo eſt CM:MO  
=  $\frac{CA^2}{CO} : \frac{AO \times DO}{CO} = CA^2 : AO \times DO$

=  $CB^2 : PO^2 = CV:PO$ , ideoque  
 $CB^2 \times PO = PO^2 \times CV$  utrumque ve-  
ro dividendo per PO eſt  $CB^2 = PO \times$   
CV, erat verò PK×CQ=PO×CV.  
Ergo PK×CQ=CB<sup>2</sup>. Q. E. D.

234. *Lemma II.* Sit PM, Sectionis Co-  
nicæ Tangens, CA axis, CB ejus conju-  
gatus, in utroque axeos primæ Vertice eri-  
gantur perpendiculares AE, DG, ad Tan-  
gentem uſque, factum earum AE×DG,  
erit æquale quadrato ſemi-Axis.

*Demonſt.*... Ducta PO ordinata ad axem  
& CV ad Tangentem uſque ipſi Parallela,  
erit (per Cor. 2. Lem. V. De Conicis) CO:  
CA=CA:CM. Dividendo verò, eſt CA  
—CO vel CO—CA, ſive AO ad CA  
ſive CD, ſicut CM—CA vel CA—CM, ſi-  
ve MA ad CM, hoc eſt AO:CD=MA:  
MC, jungendo terminos primæ rationis ter-  
minis ſecundæ hæc non mutatur, eſtque MA:  
MC=MA+AO (ſive MO): MC+DC, (ſi-  
ve MD) hoc eſt alternando MA:MO=MC:  
MD ſed ob parallelas eſt MA:MO=AE:PO  
& MC:MD=CV:DG ergo eſt AE:PO=  
CV:DG & eſt AE×DG=PO×CV ſed per  
Lemma præcedens eſt PO×CV=CB<sup>2</sup>.  
Ergo eſt AE×DG=CB<sup>2</sup>. Q. E. D.

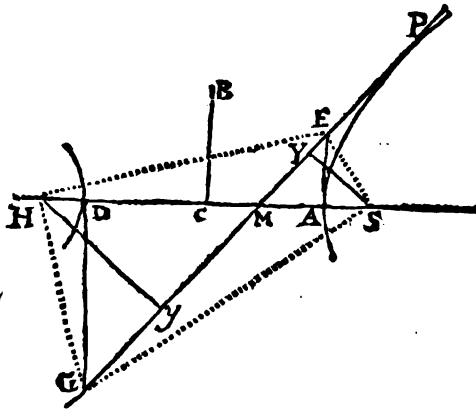
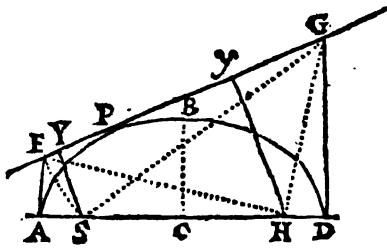


235. *Lemma III.* Ducantur à focis perpen-  
diculares in Tangentem Sectionis Conicæ, ea-  
rum factum erit æquale quadrato ſemi-Axis.

*Demonſt.*... Sint illæ perpendiculares  
SY, Hy, ducantur in utroque vertice axeos  
tranſverſæ lineæ AE, DG, perpendiculares  
axi uſque ad Tangentem, & ducantur à focis  
S & H, ad earum extremitates lineæ SE  
SG & HG HE.

Triangula EAS, SDG, EHG, GHy ſimi-  
lia inter ſe, ut & Triangula GDH, HAE;  
GSE, ESY: Primò, ſimilia ſunt Triangula  
EAS, SDG quia latera EA & AS, SD &  
DG circa angulos rectos A & D poſita pro-  
portionalia ſunt, nam (per Lemma præced.)  
eſt EA×DG=CB<sup>2</sup>, & per naturam focorum  
(& per 5. vel 6. 2. Elem.) eſt AS×SD=  
CB<sup>2</sup> ergo eſt EA×DG=AS×SD ideoque  
EA:AS=SD:DG; Eadem ratione proba-  
tur Triangula GDH, HAE eſſe ſimilia, ob  
latera proportionalia GD & TH, HA & AE  
circa angulos rectos A & D poſita, eſt  
enim ut prius EA×DG=CB<sup>2</sup>=DH×  
HA ideoque DG:DH=HA:EA.

Secundò Triangula SDG, EHG ſunt  
ſimilia, latera enim GH & HE, GD &  
DS

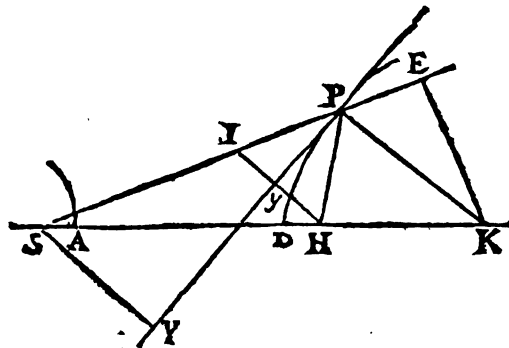
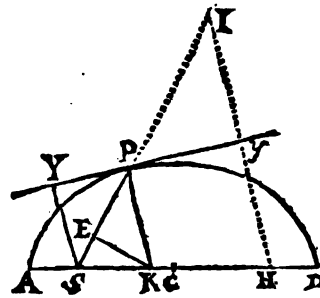


DS circa angulos SDG & EHG posita sunt proportionalia, nam ob triangula similia GDH, HAE, est  $GH:HE=GD:HA$ , sed  $HA=DS$ , ergo est  $GH:HE=GD:DS$ ; Præterea anguli SDG & EHG sunt ambo recti, SDG quidem per constructionem, angulus verò EHG est in Ellipsi complementum ad duos rectos angularum GHD & EHA, in Hyperbolâ eorum summa, cum autem illi duo anguli GHD & EHA pertineant ad Triangula Rectangula similia, simul sumpti faciunt Rectum, eorumque complementum ad duos rectos est recto æquale, ergo Angulus EHG est rectus; Eodem modo probatur Triangula HAE, GSE esse similia, ob latera proportionalia SE & GS, AE & HA, circa angulos HAE & GSE rectos posita; nam ob Triangula similia EAS, SDG est  $ES:GS=AE:DS$  five HA; & HAE est rectus per constructionem & GSE in Ellipsi est complementum ad duos rectos angularum GSD & EAS, & in Hyperbola eorum summa, illi verò Anguli pertinent ad Triangula Rectangula similia &c.

Tertio EGH est simile HGy (per 8. 6. El.) & eadem ratione est GSE simile ESY.  
Ex quibus liquet Triangula EAS,

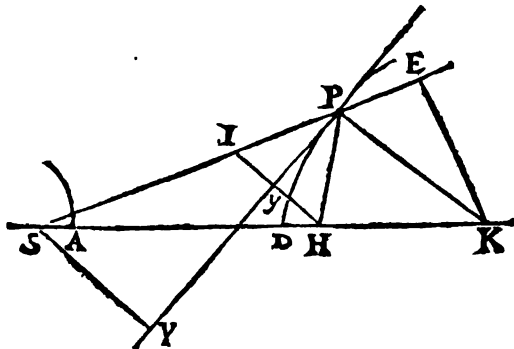
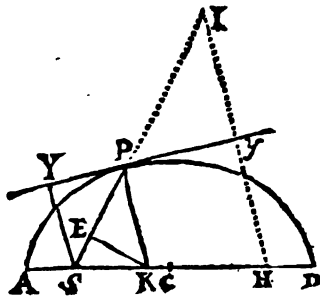
GHy esse similia ut & Triangula GSE, ESY; ex similitudine Triangulorum EAS, GHy est  $ES:GH=EA:Hy$ , & ex similitudine Triangulorum GDH & ESY est  $ES:GH=SY:GD$  ergo est  $EA:Hy=SY:GD$  &  $EA \times GD=Hy \times SY$  sed  $EA \times GD=CB^2$  per Lemma præcedens, ergo etiam  $Hy \times SY=CB^2$ . Q. E. D.

236. Lem. IV. Ducatur à foco S linea SP ad punctum contactûs & ex puncto P contactus ducatur perpendicularis in Tangentem quæ secet axem in K, & ex puncto K ducatur in lineam SP perpendicularis KE, pars PE lineæ PS erit æqualis semilateri recto.



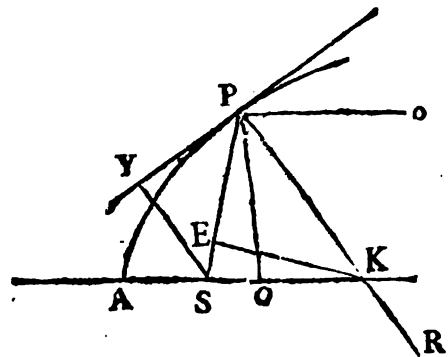
237. Producatur vel secetur SP in I ut sit  $SI=A D$  five Axi, ducaturque ex altero foco linea HI quæ dividitur bifariam & perpendiculariter per Tangentem in y (per Theor. III. de Hyp. & IV. de Ellip.) ergo  $HI=2Hy$  & est HI parallela PK, ergo Triangula PSK ISH sunt similia, estque  $PS:PK=SI:IH$  five  $2Hy$ , sed ob Parallelas SY, PK, & angulos rectos Y & E similia sunt Triangula PSY, PKE, ergo est  $PS:PK=SY:PE$ , est ideo  $SI:2Hy=SY:PE$  &  $PE=2Hy$ .

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



$$\begin{aligned}
 &= \frac{2Hy \times SY}{SI} \text{ sed } Hy \times SY = CB^2 \& SI \\
 &= 2AC, \text{ ergo } PE = \frac{2CB^2}{2AC} \& 2PE = \frac{4CB^2}{2AC} \\
 &\text{sed Latus Rectum } L \text{ est } \frac{4CB^2}{2AC}, \text{ ergo } 2PE \\
 &= L, \text{ five } PE \text{ est dimidium lateris Recti.} \\
 &237. 1. Coroll. Ex eo quod est PS : PK \\
 &= SY : PE \text{ five } \frac{1}{2} L, \text{ est } SY = \frac{L \times PS}{2PK} \& PK \\
 &= \frac{L \times PS}{2SY}.
 \end{aligned}$$

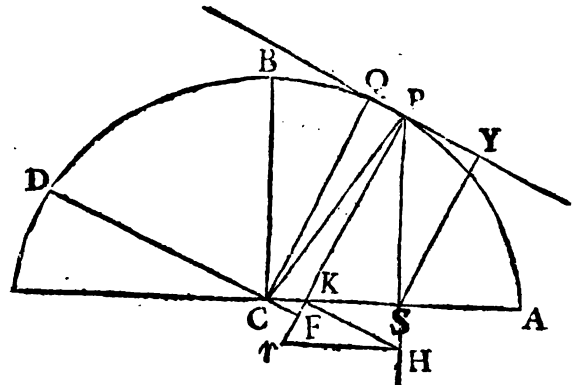
238. 1. Cor. Hoc Lemma cum suo Corollario de Parabola etiam verum est, sed aliter demonstratur, ducta ordinata POT Triangula PKO, PKE sunt æqualia, propter Angulos rectos in O & E; latus PK commune, & angulum PKO angulo KPE æqualem, ducto enim Diametro Po, erit OPK æqualis PKO ob Parallelas AK & Po sed oPK est etiam æqualis angulo KPE quia perpendicularis dividit bifariam angulum SPo (per Theor. III. de Parab.) ergo angulus PKO = KPE, & (per 26. 1. Elem.) Triangulum PKO est æquale Triangulo PKE ideoque PE = KO,



sed KO est æqualis semilateri recto (per Theor. III. de parab.) ergo & PE.

239. Lemma V. In omni sectione conicâ cujus focus S, PY, tangens in P, SY & PK, tangenti perpendiculares, L, latus rectum, est radius osculi  $Pr = \frac{4PK^2}{L^2}$

$$= \frac{L \times SP}{2SY} \dots$$



Dem. : : : Sit APB ellipsis cujus semiaxes AC, BC, semidiametri conjugatæ PC, DC, ac proinde DF, tangenti PY parallela, atque adeo PF, QC, tangenti perpendiculares æquales sunt. Est (per Lem. XII. Newt.)  $CD : BC = AC : PF$ , &  $CD^2 : BC^2 =$

$$AC^2 : PF^2, \text{ ideoque est } CD^2 = \frac{BC^2 \times AC^2}{PF^2}$$

Et quia  $BC^2 = CQ \times PK$  five  $PF \times PK$

$$(233.) \text{ est } CD^2 = \frac{PF \times PK}{PF^2} \times AC^2 =$$

$$\frac{PK \times AC^2}{PF}; \text{ sed est } Pr = \frac{CD^2}{PF} (230.)$$

ergo

ergo est  $P r = \frac{P K \times A C^2}{P F^2}$ ; est autem  
 $A C : B C = B C : \frac{1}{2} L$ , ergo  $B C^2 = \frac{1}{2} L \times$   
 $A C$ , ideoque  $P F \times P K = \frac{1}{2} L \times A C$ ,  
 ergo  $P F = \frac{L \times A C}{2 P K}$  &  $P F^2 = \frac{L^2 \times A C^2}{4 P K^2}$   
 idque substituat in valore  $P r$  mox re-  
 perto erit  $P r = \frac{4 P K^3}{L^2}$ , & quia  $P K =$   
 $\frac{L \times S P}{2 S Y}$  (237.) erit  $\frac{4 P K^3}{L^2} = \frac{L \times S P^3}{2 S Y}$   
 $= P r$ . Q. e. 1<sup>ma</sup>.

Idem eodem prorsus modo demonstra-  
 tur in hyperbolâ. Q. e. 2<sup>a</sup>.

In Ellipsi crescente focorum distantia  
 manet  $P r = \frac{4 P K^3}{L^2} = \frac{L \times S P^3}{2 S Y}$ , adeoque

idem etiam verum est cum focorum distan-  
 tia infinita evadit, seu cum Ellipsis in Pa-  
 rabolam mutatur. Q. e. 3<sup>a</sup>.

240. Coroll. 1... Ex his facillima ori-  
 tur constructio pro determinando radio  
 curvaturæ in quavis sectione conicâ. Ex K,  
 enim super PK, erigatur perpendicularis  
 KH, cum PS concurrens in H, ex H  
 erigatur super PH perpendicularis Hr,  
 erit Pr, radius curvaturæ. Nam ob an-  
 gulos rectos PKH, PHr, & lineas PK,  
 SY, parallelas est SP:SY=Pr:PH=  
 PH:PK, atque inde SY<sup>2</sup>:SP<sup>2</sup>=PK:Pr;  
 adeoque  $P r = \frac{P K \times S P^2}{S Y^2}$  sed SY=

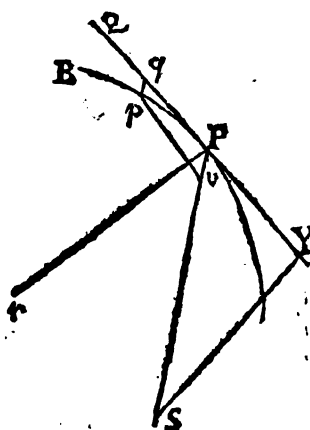
$\frac{L \times S P}{2 P K}$  (237), ergo  $P r = \frac{4 P K^3}{L^2}$ , ac  
 proinde Pr est radius osculi (239.).

241. Coroll. 2.... Quoniam in ver-  
 ticibus sectionum conicarum principalibus  
 SP=SY, erit ibi  $P r = \frac{L \times S P^3}{2 S Y} = \frac{L}{2}$ ,  
 seu radius osculi æqualis dimidio lateris  
 recti principalis.

242. Theor. Datis in puncto P, vis cen-  
 tripetæ quâ corpus curvam PpB describit  
 quantitate absolutâ, vis illius directione PS,  
 velocitate corporis, & positione tangentis  
 PQ, datur curvæ PpB curvatura in P,  
 seu radius osculi Pr.

Dem... Sit curvæ PpB, & circuli oscu-  
 latoris arcus infinitesimus Pp, & quoniam  
 velocitas corporis P revolvantis finita sup-  
 ponitur, vis centripeta constans est, & il-  
 lius directio sibi parallela per arcum Pp,

Tom. I.



adedque arcus ille est portio parabolæ cu-  
 jus tangens PQ, & diameter PS (ex notâ  
 40â.) Quoniam autem vis centripetæ quan-  
 titas absoluta in P, data est, datumque proin-  
 de spatium quod corpus vi illâ constante,  
 dato tempore percurreret, & præterea cor-  
 poris P velocitas, ac tangentis PQ po-  
 sitio data sunt, data est ratio qp five Pv  
 ad Pq five pv, data ergo est parabola  
 quam corpus P describeret, si vis centri-  
 petæ eadem maneret & directionem habe-  
 ret lineæ PS perpetuò parallelam. Cum  
 igitur datus sit radius circuli parabolam da-  
 tam in dato puncto osculantis (239.) da-  
 tur Pr, radius osculi in puncto P. Q. e. d.

243. Coroll. Hinc datis in puncto P,  
 curvaturâ seu radio osculi Pr, positione tan-  
 gentis PQ, velocitate corporis, & vis cen-  
 tripetæ directione PS, datur vis illius quan-  
 titas absoluta in P; nam propter datas posi-  
 tionem Tangentis, & vis directionem, datur  
 ratio SP ad SY & SP: ad SY, five  $\frac{S P^3}{S Y^3}$  &

propter datum  $P r = \frac{L \times S P^3}{2 S Y}$  datur  $\frac{L}{2}$  five

L Latus rectum principale Parabolæ cujus  
 arcus Pp est portio, PS Diameter & PQ  
 Tangens unde datur tota Parabola & Latus  
 rectum Diametri PS; Denique cum data sit  
 velocitas corporis in P datur lineola Pq,  
 vel pv dato tempore descripta, datur ergo  
 abscissa Pv five qp quæ est vis centripetæ  
 quantitas absoluta.

Datis verò in P, vis centripetæ quantitate  
 absolutâ, vis illius directione PS, positione  
 tangentis PQ, radio osculi Pr, five datâ  
 curvaturâ, datur velocitas corporis in P;

T

&c





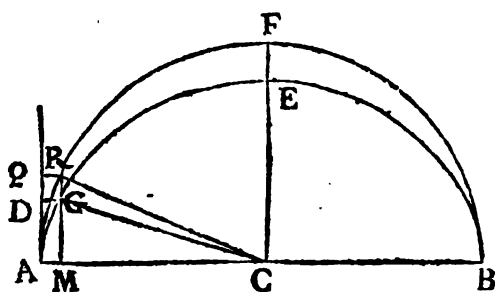




*Scholium.*

DE MOTU  
CORPORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

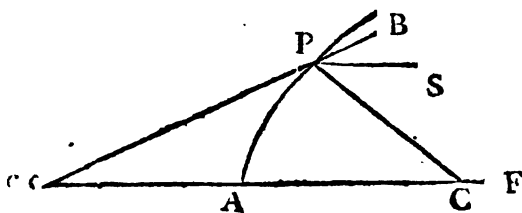
Si ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; & vis ad centrum infinitè distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est theorema *Galilei*. (\*) Et si conic sectio parabolica (inclinazione plani ad conum sectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus



milis Ellipsi A, & axem unum communem habens cum Ellipsi B, tempora periodica in Ellipsis similibus A & C, sunt æqualia (per corol. 3. & 8. prop. IV. Newt.) & tempora periodica in ellipsis C, & B, axem alterum communem habentibus sunt etiã æqualia (253.) tempora igitur periodica in Ellipsis quibuscvis A & B sunt æqualia Q. e. D.

253. Si corpora duo Ellipses AEB; AFB, quarum est axis communis AB, describant, viribus ad centrum Ellipsium C tendentibus, tempora periodica erunt æqualia.... Dem.... Sint arcus AR, AG, infinitesimi eodem tempore descripti, AQ tangens ad verticem A, QR, DG, axi AB, parallelæ, & quoniam vires centrales sunt ut QR, DG (prop. VI.) & ob communem distantiam à centro AC, æquales sunt vires, seu eadem vis (prop. X.) erit  $QR = DG$ , sectores verò ACG, ACR, sunt ut GM, RM, seu EC, FC, (251), & areæ Ellipsium AEB, AFB, sunt etiã ut EC, FC, (247. 248.) quare cum tempora periodica in illis Ellipsis sint ut areæ AEB AFB directè & sectores ACG, ACR, inversè (252.) erunt eadem ut EC ad FC directè, & EC ad FC inversè, hoc est, ut  $EC \times FC$  ad  $FC \times EC$ , ac proinde in ratione æqualitatis. Q. e. D.

254. His positis facilè demonstratur æqualia esse revolutionum in Ellipsis universis circum centrum idem satiarum periodica tempora. Nam duæ quævis ellipses circa idem centrum descriptæ dicantur A, & B, describatur tertia Ellipsis C, si



(\*) 255. Et si conic sectio parabolica (inclinazione plani ad conum sectum mutata), vertatur in hyperbolam movebitur corpus in hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ. Cùm enim Ellipsis centrum C, à vertice A, in plagam F abit, vis centripetæ directio est per lineas PC, PF, à puncto P, ad centrum, & ubi infinita evadit distantia PC, atque PS, ad centrum ducta axi parallela fit, Ellipsi in parabolam mutata, directio est à puncto P, ad S, secundum lineam PS; mutata in Hyperbolam parabolâ, & centro ad alteram verticis A partem translato in c, vis centralis directio est secundum lineam PB, à P ad B, hoc est, à centro C, ad Pc, adeoque in centrifugam versâ (228.)

# 150 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ. Et quemadmodum in circulo vel ellipsi si vires tendunt ad centrum figuræ in abscissâ positum, hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quâcunque datâ, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinarum ad abscissam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum à centro, si modo tempora periodica maneant æqualia; (f) sic etiam in figuris universis si ordinatæ augeantur vel diminuuntur in ratione quâcunque datâ, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore pe-

256. Ex quibus sequitur hæc generalis Lex; Si corpus revolvatur in sectione conicâ, & vis centralis tendat ad sectionis centrum, aut à centro, vis illa erit directè ut distantia à centro, & contrâ si vis fuerit ut distantia à centro, corpus movetur in sectione conicâ. (245. 246.)

(f) 257. In figuris universis, si ordinatæ augeantur vel diminuuntur in ratione datâ vel angulus ordinationis mutetur, manente tempore Periodico, vires augentur vel minuuntur in ratione distantiarum à Centro. Hujus veritas sequentium Lemmatum ope patebit.

*Lemma.* In figurâ quâvis A Q D, cujus diameter A D, ad hanc diametrum ordinatæ Q E, N G, augeantur vel minuuntur in ratione datâ Q E, ad P E, vel ad angulum quemvis datum P E D, inclinentur, novaque describatur curva A P D, per novarum ordinarum extrema transiens, sitque centrum virium C, in diametro positum utrique curvæ commune, rectæ P H, Q h, quæ curvas in punctis correspondentibus Q, P, tangunt, ad idem diametri punctum H convergunt.... *Dem...* Ductis rectis P t, Q v, diametro A D parallelis, erit Q v = G E, = P t, & (per hypothesim) n v : m t = E Q : E P, unde & alternando n v : E Q = m t : E P, & coeuntibus punctis n & Q, m & P, erit propter similitudinem triangulorum n v Q & Q E h m t P & P E H

$$n v : E Q = Q v (G E) : E h$$

$$m t : E P = P t (G E) : E H$$

Cum ergo sit n v : E Q = m t : E P, erit G E : E h = G E : E H, ideoque E H = E h,

ac proinde tangentes ad idem diametri punctum H convergunt. Q. e. D.

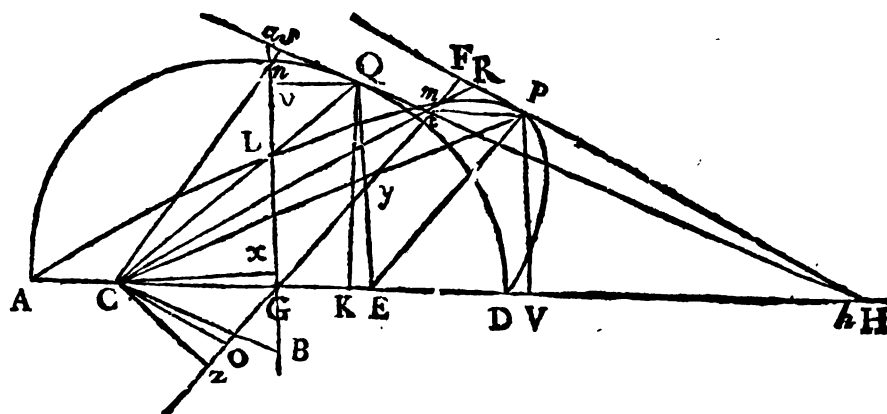
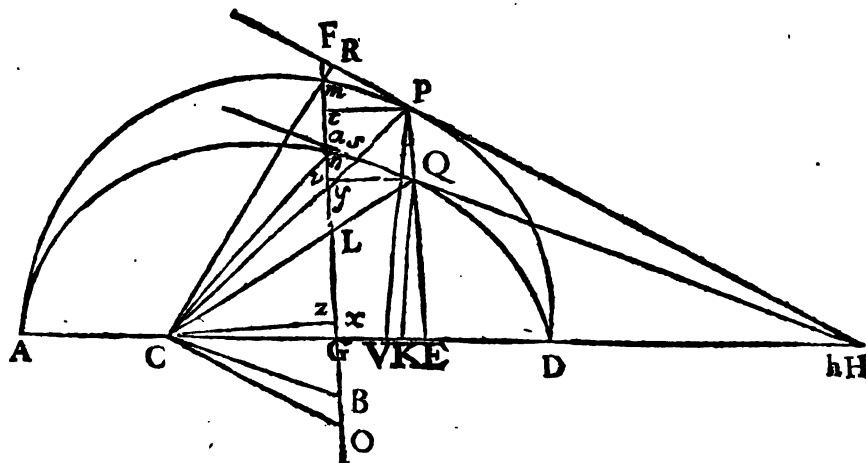
258. *Lemma.* Iisdem manentibus sector evanescens, C Q n, est ad sectorem C P m, in alterâ curvâ correspondentem ut area A Q D, ad aream A P D... *Dem...* ob parallelas G m & E P, G n, & E Q, est G y : C G = E P : C E & C G : G L = C E : E Q unde ex æquo G y : G L = E P : E Q = G m : G n (per const.) & hinc G m — G y : G n — G L = y m : L n = G m : G n = E P : Q E. Ex puncto C, demittantur in G m, & G n, perpendiculares C z, C x; & ex punctis P & Q, in diametrum A D, perpendiculares P V, Q K, & erit triangulum C y m : triang. C L n = y m x C z : L n x C x = G m x C z : G n x C x. Verum ob similia triangula C z G, & P V E, C x G & Q K E, est C z : C G = P V : P E, & C G : C x = Q E : Q K : atque adeò per compositionem rationum C z : C x = P V x Q E : Q K x P E = P V x G n : Q K x G m (per const.) cum ergo sit triangulum C y m : triang. C L n = G m x C z : G n x C x = G m x P V x G n : G n x Q K x G m = P V : Q K, & P V sit ad Q K, ut parallelogrammum G E P m, ad parallelogrammum G E Q n, hoc est, (per Lem. IV.) & per construct. ut area A P D, ad aream A Q D; ergò triangula C y m, C L n, sunt in ratione arearum A P D, A Q D; at punctis m & P, n & Q coeuntibus, sector C P m, æquatur triangulo C y m, & sector C Q n triangulo C L n; sunt igitur sectores illi evanescentes ut areæ A P D, A Q D, directè. Q. e. d.

259. *Theor.* Iisdem manentibus, si tempora

## PRINCIPIA MATHEMATICA. 151

periodico; vires ad centrum quodcunque in abscissâ positum De Mo-  
tendentes in singulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ra- TU COR-  
tione distantiarum à centro. PORUM.

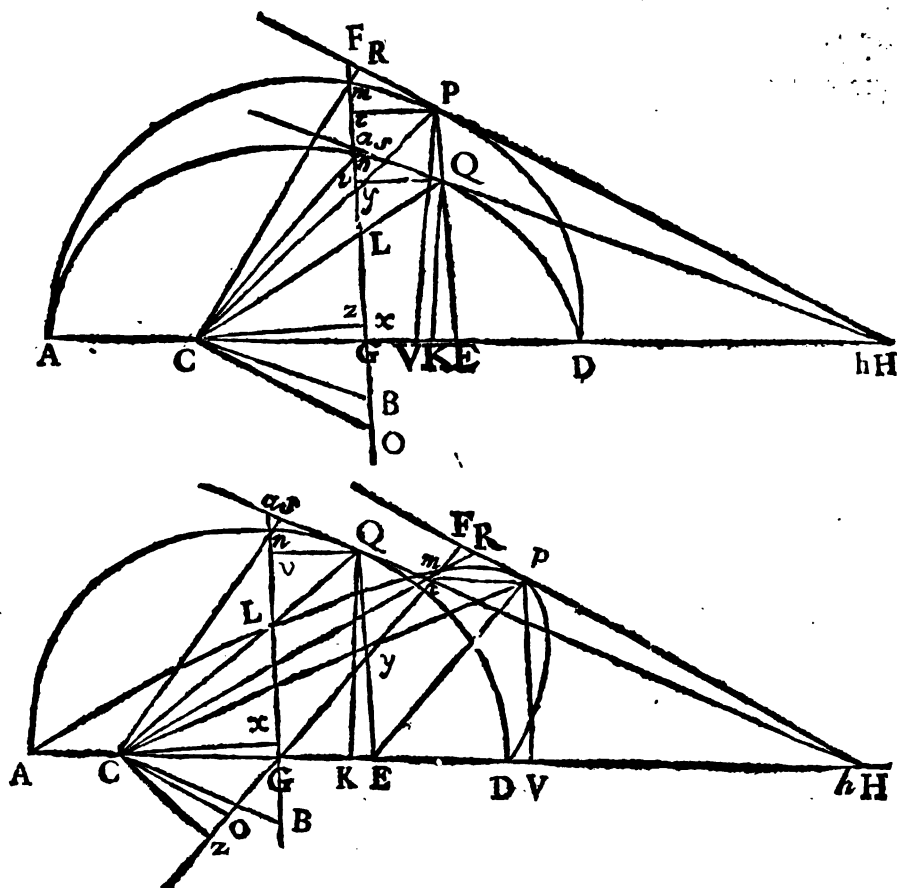
S E C- LIBER  
PRIMUS.



pora periodica in curvis  $APD$ ,  $AQD$  fuerint æqualia, vires centripetæ in punctis correspondentibus  $P$  &  $Q$  erunt inter se ut distantie à centro  $CP$ ,  $CQ$ .

*Demonst.* Figura A Q D rectis ex cen-

tro C ductis in sectores innumeros inter se æquales, ut C Q n, & figura A P d, in totidem sectores correspondentes, ac pròinde etiam inter se æquales (258), ut C P m divisæ intelligantur; & ob eundem



fectorum in utraq̃ue figurâ numerum, æqua-  
bilem illorum descriptionem (*prop. I.*) &  
æqualia tempora periodica, sectores CPm,  
CQn, æquali tempore describentur. Qua-  
re (*per prop. VI.*). Vires centripetæ in  
punctis P & Q, sunt inter se ut rectæ mR,  
nS, punctis m & P, n & Q coeuntibus;  
verùm propter Parallelas QE, aG & PE,  
FG, est, aG:FG=QE:PE, (257)  
& quia nG & mG in eadem sunt ratio-  
ne, iis ex aG & FG subductis manent a n  
ad Fm sicut QE. ad PE; ductis autem  
ex C, Parallelis CB CO ad tangentes  
aH FH, Triangula BCG & OGC sunt  
similia triangulari aGH, FGH unde est  
BG:aG=GC:GH  
& OG:FG=GC:GH ideoque

$BG:OG=aG:FG=QE:PE=nG:$   
 $mG$  & jungendo terminos primæ & secundæ  
 rationis terminis ultimæ est  $Bn:Om=$   
 $QE:PE=a:n:Fm$ . Denique quia ob  
 $CB, CO, Tangentibus aH FH Paralle-$   
 las, similia etiam sunt Triangula,  $a n S$   
 &  $nCB, FmR$  &  $mCO$ , est  
 $Bn:na=Cn:Sn$   
 & est  $Fm:mO=Rm:mC$ , & Compo-  
 sitis Rationibus est  $Bn \times Fm:na \times mO$   
 $=Cn \times Rm:Sn \times mC$ , sed quia  $Bn:$   
 $Om=a:n:Fm$ , est  $Bn \times Fm=a n \times$   
 $Om$ , ergo etiam  $Cn \times Rm=Sn \times mC$ ,  
 ideoque  $Cn:Cm=Rm:Sn$ ; siue dis-  
 tantiarû à Centro in eadem sunt ratione ac  
 vires Centrales.

SECTIO III.

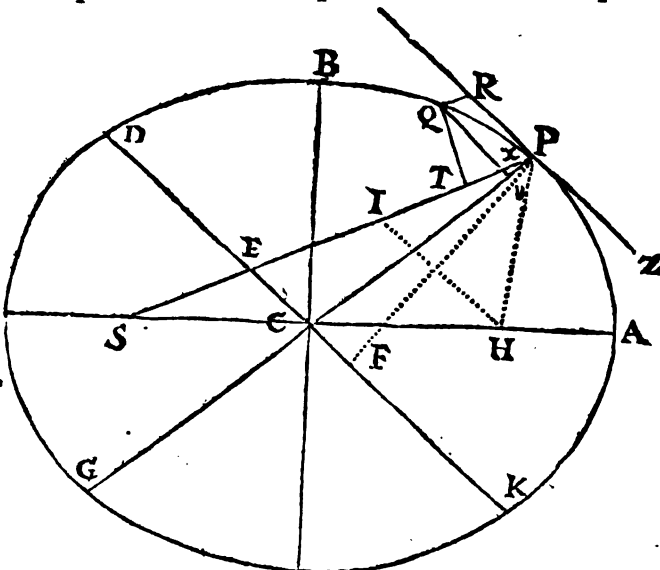
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.*

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

*Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tenden-  
tis ad umbilicum ellipseos.*

Est ellipseos umbilicus  $S$ . Agatur  $SP$  secans ellipseo tum dia-  
metrum  $DK$  in  $E$ , tum ordinatim applicatam  $Qu$  in  $x$ , & com-  
pleatur parallelogrammum  $QxPR$ . Patet  $EP$  æqualem esse se-  
mi-axi majori  $AC$ , eo quod, actâ ab altero ellipseos umbilico  
 $H$  lineâ  $HI$  ipsi  $EC$  parallelâ, ob æquales  $CS$ ,  $CH$  æquen-  
tur  $ES$ ,  $EI$ , (3)  
adeo ut  $EP$  semi-  
summa sit ipsa-  
rum  $PS$ ,  $PI$ , id  
est (ob parallelas  
 $HI$ ,  $PR$ , &  
angulos æquales  
 $IPR$ ,  $HPZ$ )  
ipsarum  $PS$ ,  $PH$ ,  
quæ conjunctim  
axem totum  $2AC$   
adæquant. Ad  
 $S$   $P$  demitta-  
tur perpendicu-  
laris  $QT$ , & ellip-  
seos latere recto



prin-

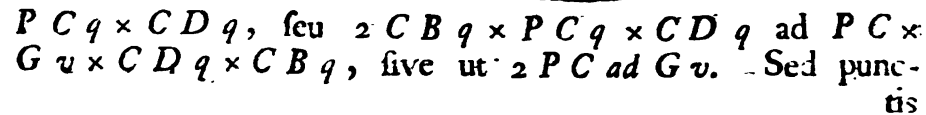
(3) 260. Quia (per prop. 48. lib. 3. Conic. Apoll. sup. Theor. IV. de Ellipsi) æquales sunt anguli quos rectæ  $PH$ ,  $PS$ , constituunt cum tangente  $PR$ , & ob parallelas  $HI$ ,  $PR$ , æquales quoque sunt  
Tom. I.

anguli alterni  $PIH$ ,  $PHI$ , æquales erunt rectæ  $PI$ ,  $PH$ , adeoque  $EP = \frac{PS + PH}{2} = AC$ , (prop. 52. lib. 3. Conic. Apoll. superius Theor. III. de Ellip.).  
V

De Mo-

LIBER

PRIMUS.



rectum principale  $L = \frac{2}{A} \frac{B C^2}{C}$  nam  $2 A C:$

$$2BC = 2BC:L, \text{ und } L = \frac{4BC^2}{2AC} =$$

(i) Per constructionem  $QR = Px$ , sed propter Triangula similia  $Pxv$ ,  $PEC$

(\*) Per naturam Conicorum, facta partium Diametri sunt ad quadrata Ordinata-

(1) Est  $CA^2:PF^2=CD^2:CB^2$ ;  
nam per Lem. XII.  $PF \times CD = AC \times BC$ ;

(=) 162. Scriptis scorum analogis:  
res clara fit.

$$L \times QR : L \times P_v = A\dot{C} : PC$$

$$L \times P \vee : G \vee P = L : G \vee$$

$$G \vee P : Q \vee ^2 = P C ^2 : C D ^2$$

$$QV^2:QT^2=CD^2:CB^2$$

Unde conjunctis his omnibus rationibus;  
 $L \times QR : QT^2 = AC \times L \times PC^2 \times$

$$L \times QR = QT^2, \text{ \& } L = \frac{QT^2}{QR}$$

1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 26

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 155

tis  $Q$  &  $P$  coeuntibus æquantur  $2PC$  &  $Gv$ . Ergo & his proportionalia  $L \times QR$  &  $QT$  quad. æquantur. Ducantur hæc æqualia in  $\frac{SPq}{QR}$ , & fiet  $L \times SPq$  æquale  $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ . Ergo (per *corol. 1. & 5. prop. v1.*) vis centripeta reciproce est ut  $L \times SPq$ , id est, reciproce in ratione duplicata distantiae  $SP$ . *Q. E. I.*

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.

## Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipseos tendens, quâ corpus  $P$  in ellipsi illâ revolvi potest, sit (per *corol. 1. prop. x.*) ut  $CP$  distantia corporis ab ellipseos centro  $C$ ; ducatur  $CE$  parallela ellipseos tangenti  $PR$ ; & vis, quâ corpus idem  $P$  circum aliud quodvis ellipseos punctum  $S$  revolvi potest, si  $CE$  &  $PS$  concurrant in  $E$ , <sup>(n)</sup> erit ut  $\frac{PE \text{ cub.}}{SPq}$  (per *corol. 3. prop. vii.*) hoc est, si punctum  $S$  sit umbilicus ellipseos, ideoque  $PE$  detur, ut  $SPq$  reciproce. *Q. E. I.*

Eâdem brevitate, quâ traduximus problema quintum ad parabolam, & hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, & usum ejus in sequentibus non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

## P R O.

(<sup>n</sup>) Nam (per *Coroll. III. Prop. VII.*) vis tendens ad centrum  $C$ , quam exponat recta  $CP$ , est ad vim tendentem ad aliud punctum  $S$ , quam exponat recta  $AS$ , ut  $CP \times SP^2$  ad cubum rectæ quæ à centro  $A$  ad Tangentem  $RPZ$  duceretur parallela ad lineam  $SP$  à secundo virium centro ad punctum  $P$  curvæ ductam, quæ quidem recta æqualis foret  $PE$ , quoniam ipsi esset Parallela & inter easdem Par-

abellæ  $DCRPZ$ , adeoque  $CP \times SP^2$ :  $PE$ ;  $= CP : A = \frac{PE}{SP^2}$ ; hoc est, si punctum  $S$  sit umbilicus Ellipseos, adeoque  $PE = AC$  (260) detur, erit vis ut  $SP^2$  reciproce; hic autem supponitur talem esse vim ad centrum  $C$  tendentem ut tempora periodica circa centra  $C$ , &  $S$ , æqualia sint, quod supponi potest.



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

*Moveatur corpus in hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tenden-  
tis ad umbilicum figuræ.*

Sunto  $CA$ ,  $CB$  semiaxes hyperbolæ;  $PG$ ,  $KD$ , diametri  
aliæ conjugatæ;  $PF$  perpendicularum ad diametrum  $KD$ ; &  $Qv$   
ordinatim applicata ad diametrum  $GP$ . Agatur  $SP$  secans cum  
diametrum  $DK$  in  $E$ , tum ordinatim applicatam  $Qv$  in  $x$ , &  
compleatur parallelogrammum  $QRPx$ . (°) Patet  $EP$  æqualem  
esse semiaxi transverso  $AC$ , eo quod, actâ ab altero hyperbolæ  
umbilico  $H$  lineâ  $HI$ , ipsi  $EC$  parallelâ, ob æquales  $CS$ ,  $CH$   
æquentur  $ES$ ,  $EI$ ; adeo ut  $EP$  semidifferentia sit ipsarum  
 $PS$ ,  $PI$ , id est (ob parallelas  $IH$ ,  $PR$  & angulos æquales  
 $IPR$ ,  $HPZ$ ) ipsarum  $PS$ ,  $PH$ , quarum differentia axem to-  
tum  $2AC$  adæquat. Ad  $SP$  demittatur perpendicularis  $QT$ .

Et hyperbolæ latere recto principali (seu  $\frac{2BCq}{AC}$ ) dicto  $L$ , erit

$L \times QR$  ad  $L \times Pv$  ut  $QR$  ad  $Pv$ , seu  $Px$  ad  $Pv$ , id est (ob  
similia triangula  $Pxu$ ,  $PEC$ ) ut  $PE$  ad  $PC$ , seu  $AC$  ad  $PC$ .  
Erit etiam  $L \times Pv$  ad  $Gv \times Pv$  ut  $L$  ad  $Gv$ ; & (ex naturâ con-  
icorum) rectangulum  $GvP$  ad  $Qv$  quad. ut  $PCq$  ad  $CDq$ ; & (per  
corol. 2. lem. VII.)  $Qv$  quad. ad  $Qx$  quad. punctis  $Q$  &  $P$  coeun-  
tibus sit ratio æqualitatis; &  $Qx$  quad. seu  $Qv$  quad. est ad  
 $QTq$  ut  $EPq$  ad  $PFq$ , id est, ut  $CAq$  ad  $PFq$ , sive (per  
lem. XII.) ut  $CDq$  ad  $CBq$ : & conjunctis his omnibus ratio-  
nibus  $L \times QR$  fit ad  $QTq$  ut  $AC \times L \times PCq \times CDq$ , seu  $2CBq \times$   
 $PCq \times CDq$  ad  $PC \times Gv \times CDq \times CBq$ , sive ut  $2PC$  ad  $Gv$ . Sed  
punctis  $P$  &  $Q$  coeuntibus æquantur  $2PC$  &  $Gv$ . Ergo & his pro-  
por-

(°) 263. Est  $SE = SP + PE$  & ob æ-  
quales  $ES$ ,  $EI$ , est  $PI = EI + PE =$   
 $ES + PE = SP + 2PE$ , ac proinde  $PI =$   
 $SP + 2PE$ , ac  $PE$  est semidifferentia ip-  
sarum  $PS$ ,  $PI$ ; sed angulus  $HPR = RPS$ ,  
angulus enim interceptus inter lineas à fo-  
cis ad punctum Hyperbolæ ductas bifariam  
dividitur per Tangentem (per prop. 48. lib.  
3. Conic. Apoll. vide Theor. V. de Hyp.)

&  $RPS = EPZ$  (per 15. 1. Elem.) adeoque  
 $IPR = HPZ$ , & ob parallelas  $IH$ ,  $PR$ ,  
angulus  $PHI = HPR = IPZ = HIP$ , un-  
de  $HP = PI$ , adeoque  $EP$ , est semidif-  
ferentia ipsarum  $PS$ ,  $PH$ , & quia diffe-  
rentia rectarum  $PS$ ,  $PH$ , axem totum  
 $2AC$ , adæquat (per prop. 51. lib. 3. Co-  
nic. Apoll. Vide sup. Theor. IV. de Hy-  
perb.) est  $EP = AC$ .





tripetâ in cenrrifugam versâ movebitur in hyperbolâ oppositâ.

DE MOTU CORP-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

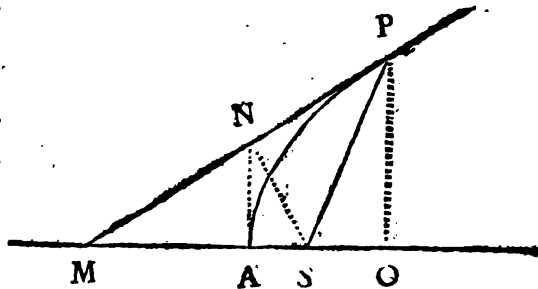
LEMMA XIII.

(<sup>r</sup>) *Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertiens est quadruplum distantie verticis illius ab umbilico figuræ.*  
Patet ex conicis.

LEMMA XIV.

*Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici à puncto contactus & à vertice principali figuræ.*

Sit enim  $AP$  parabola,  $S$  umbilicus ejus,  $A$  vertex principalis;  $P$  punctum contactus,  $PQ$  ordinatim applicata ad diametrum principalem,  $PM$  tangens diametro principali occurrens in  $M$ , &  $SN$  linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur  $AN$  & ob æquales  $MS$  &  $SP$ ,  $MN$ , &  $NP$ ,  $MA$  &  $AO$  parallelae erunt rectæ  $AN$  &  $OP$ ; & inde triangulum  $SAN$  rectangulum erit ad  $A$ , & simile triangulis æqualibus  $SNM$ ,  $SNP$ : ergo  $PS$  est ad  $SN$  ut  $SN$  ad  $SA$ . Q. D. E.



Corol. 1.  $PSq$  est ad  $SNq$  ut  $PS$  ad  $SA$ .

(<sup>r</sup>) Corol. 2. Et ob datam  $SA$  est  $SNq$  ut  $PS$ .

Corol. 3. Et concursus tangentis cujuscvis  $PM$  cum rectâ  $SN$ , quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam  $AN$  quæ parabolam tangit in vertice principali.

P R O-

(<sup>r</sup>) 266. Dem. Illius demonstrationem jam superius in Compendio de Conicis, Theor. IV. de Parabolâ dedimus.

(<sup>r</sup>) Cum sit (per coroll. 1.)  $SA \times BS^2 = SN^2 \times PS$ , adeoque  $SA \times PS =$

$SN^2$ ; erit ob datam  $SA$ ,  $SN^2$  ut  $PS$ , id est, variationes quadrati  $SN^2$ , in eadem parabolâ erunt ut variationes rectæ  $SP$  sive ut distantia à focis.

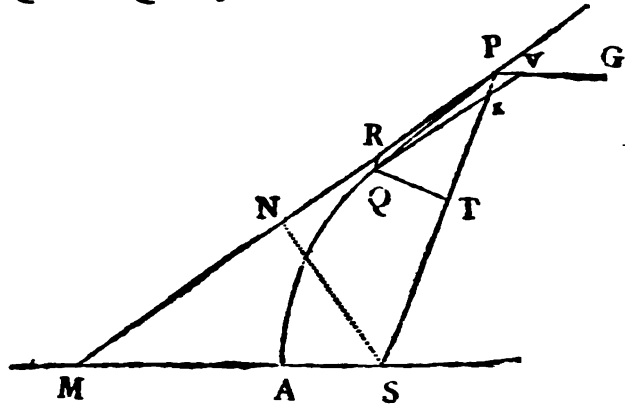
# 160 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TUS COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

*Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.*

Maneat constructio lemmatis, sitque  $P$  corpus in perimetro parabolæ, & à loco  $Q$ , in quem corpus proxime movetur, age ipsi  $SP$  parallelam  $QR$  & perpendicularem  $QT$ , necnon  $Qv$  tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro  $PG$  in  $v$ , tum distantia  $SP$  in  $x$ . Jam ob similia triangu-  
(\*)  $Pxv$ ,  $SPM$ , & æqualia unius latera  $SM$ ,  $SP$ , æqualia sunt alterius latera  $Px$  seu  $QR$  &  $Pv$ . Sed ex conicis quadratum ordinatæ  $Qv$  æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri  $Pv$ , id est (per lem. xiii.) rectangulo  $4PS \times Pv$ , seu  $4PS \times QR$ ; & punctis  $P$  &  $Q$  coeuntibus, ratio  $Qv$  ad  $Qx$  (per corol. 2. lem. vii.) fit ratio æqualitatis. Ergo  $Qx$  quad. eo in casu æquale est rectangulo  $4PS \times QR$ . Est autem (ob similia triangu-  
(\*)  $QxT$ ,  $SPN$ )  $Qxq$  ad  $QTq$  ut  $PSq$  ad  $SNq$ , hoc est (per corol. 1. lem. xiv.) ut  $PS$



ad  $SA$ , id est, ut  $4PS \times QR$  ad  $4SA \times QR$ , & inde (per prop. ix. lib. v. elem.) (\*)  $QT^2$  &  $4SA \times QR$  æquantur.

Ducantur hæc æqualia in  $\frac{SPq}{QR}$ , & fiet  $\frac{SPQ \times QTq}{QR}$  æquale

$SP$

(\*) \* Nam ob parallelas  $MP$  &  $Qv$ ,  $MS$  &  $PG$ , est angulus  $vPx = PSM$  &  $Pxv = QxT = MPS$ .

(\*) 267. Quoniam latus rectum principale  $L = 4AS$ , & est  $4AS \times QR =$

$QT^2$ , erit etiam in parabolâ ut in cæteris Sectionibus conicis (264), latus rec-

tum principale  $L = \frac{QT^2}{QR}$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 161

$SPq \times 4SA$ : & propterea (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut  $SPq \times 4SA$ , id est, ob datam  $4SA$  reciprocè in duplicatâ ratione distantiae  $SP$ . Q. E. I.

Corol. 1. (\*) Ex tribus novissimis propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis  $P$  secundum lineam quamvis rectam  $PR$  quâcunque cum velocitate exeat de loco  $P$ , & vi centripetâ, quæ reciprocè proportionalis quadrato distantiae locorum à centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliquâ sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico, & puncto contactus, & positione tangentis, describi potest sectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex datâ vi centripetâ, & velocitate corporis: & orbes duo se mutuo tangentes eâdem vi centripetâ eâdemque velocitate describi non possunt.

Co-

(\*) 268. Si corpus moveatur in aliquâ sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium, vis centripeta erit reciprocè proportionalis quadrato distantiae locorum ab umbilico, & contrâ si vis centripeta fuerit quadrato distantiae à centro virium reciprocè proportionalis, corpus movebitur in aliquâ sectionum conicarum... Dem... Prima pars propositionis à NEWTONO eleganter demonstrata, potest adhuc aliter & generatim demonstrari. Vis

centripeta ut  $\frac{SP}{SY_1 \times R}$  (212.) sed in omni sectione conicâ  $R = \frac{L \times SP}{2SY_1}$  (239.)

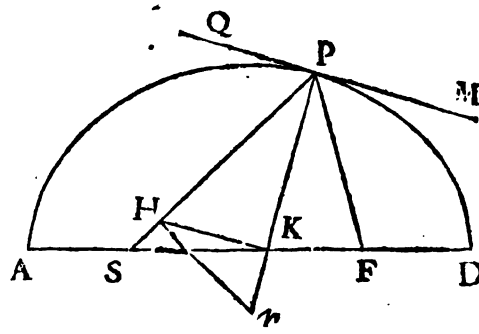
Ergò  $\frac{SP}{SY_1 \times R} = \frac{2SY_1 \times SP}{SY_1 \times L \times SP} = \frac{2}{L \times SP^2}$

hoc est, ob datam  $\frac{2}{L}$ , vis est ut  $\frac{1}{SP^2}$

Q. e. iam.

Corpus  $P$ , datâ cum velocitate secundum directionem datam  $PQ$  projiciatur, sitque vis centripetæ ad punctum  $S$  tendentis quantitas absoluta data in puncto dato  $P$ , in variis à centro distantis ea vis sit semper in ratione inversâ quadrati distantiae à centro  $S$ , si ea fuerit corporis  $P$  velocitas quam vi centripetâ ut est in

Tom. I.



$P$  uniformiter urgente acquireret cadendo per  $\frac{1}{2} SP$  & præterea  $PS$  sit ad  $PQ$  perpendicularis, corpus  $P$  circulum describet cujus centrum  $S$  & radius  $PS$  (201.) Si verò alia fuerit velocitas, aut  $PS$  ad  $PQ$  obliquâ, corpus  $P$  aliam describet orbitam in quâ tangens  $PQ$ , non semper erit ad radium vectorem  $SP$  perpendicularis. Sit igitur  $PQ$  ad  $SP$  obliqua, datur  $Pr$ , radius circuli orbitam à corpore  $P$  describendam osculantis in  $P$ ; ex  $r$  in  $PS$  demittatur perpendicularis  $rH$ , & ex  $H$  in  $Pr$  perpendicularis  $HK$ , jungaturque  $X$   $SK$ ;

DE MO-  
TUS COR-  
FORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

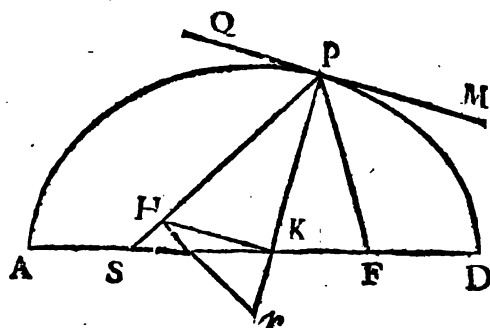
*Corol. 2.* Si velocitas, quâcum corpus exit de loco suo  $P$ , ea sit, quâ lineola  $PR$  in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit; & vis centripeta potius sit eodem tempore corpus idem movere per spatium  $QR$ : movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ sectione; cujus latus rectum principale est quantitas illa  $(\gamma)$

$$\frac{QTq}{QR}$$

, quæ ultimo fit, ubi lineolæ  $PR$ ,  $QR$  in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad ellipsin; & casum excipio, ubi corpus rectâ descendit ad centrum.

P R O-

$SK$ ; Deindè fiat angulus  $QPF$  complementum ad duos rectos anguli  $QPS$ , & si fuerit  $PF$  parallela ipsi  $SK$ , describatur parabola cujus umbilicus  $S$ , axis  $SK$ , & punctum perimetri  $P$ , data sunt. Si verò  $PF$  ipsi  $SK$  occurrat in puncto aliquo  $F$ , tunc focus  $S$ , &  $F$ , & perimetri puncto  $P$  datus describatur Hyperbola, si puncta  $S$  &  $F$  cadant ad eandem partem puncti  $K$ , & Ellipsis si cadant ad partes contrarias, & corpus  $P$  movebitur in sectione conicâ per eam constructionem descriptâ. Nam (*per construct.*) angulus  $QPF$ , est complementum anguli  $QPS$ , ad duos rectos; sed angulus  $SPM$ , est quoque ejusdem anguli  $QPS$ , complementum ad duos rectos, ac proinde  $QPF = SPM$ , ergò subducto communi angulo  $SPF$ , erit angulus  $QPS = FPM$ , adeoque  $QP$ , tangens sectionis in  $P$ , (*prop. 48. Lib. 3. Conic. Apoll. & per Theor. III. aut IV. de Hyp. Ell. & Parab.*) Cum igitur sectionis axis sit  $SK$ , &  $PK$  ad tangentem  $PQ$  normalis (*per constr.*) erit  $Pr$  radius curvaturæ sectionis in puncto  $P$ , (239.) eadem igitur est sectionis conicæ & orbitæ quam corpus  $P$  describit tangens atque curvatura in puncto  $P$ , porro sectio conica  $DPA$  describi potest vi aliquâ centripetâ ad umbilicum  $S$  tendente quæ sit semper reciproce proportionalis quadrato distantie ab illo puncto  $S$  (*per superius demonstrata*) & ex datis corporis alicujus  $A$  sectionem describentis, velocitate in puncto  $P$ , directione tangentis  $PQ$ , directione vis  $PS$ , & curvaturâ sectionis conicæ in  $P$ , datur vis centripetæ quantitas absoluta in puncto  $P$ ,



(242.) quâ corpus  $A$  in sectione conicâ retinetur in  $P$ , ponamus velocitatem corporis  $A$  eandem cum velocitate projectionis corporis  $P$  orbitam suam describentis, tùm eadem erit ejus orbitæ & Sectionis Conicæ curvatura in  $P$ , idem virium centrum  $S$ , idem punctum  $P$ , eadem tangens  $PQ$ , eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ, ac proinde eadem illius quantitas absoluta in puncto  $P$ , tam in sectione conicâ quàm in orbitâ à corpore  $P$  describendâ. Cùm igitur corpus  $P$ , iis positis unicam curvam describere possit & quidem sectionem conicam  $DPA$  possit describere, eam reverâ describet (244.) *Q. e. 2<sup>um</sup>.*

2<sup>am</sup>. hujusce propositionis partem formulis analyticis invenerunt *Hermannus & Bernoullius* in Monumentis Academiæ Parisiensis, an. 1710.

(1) \* Patet ex notâ 267.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciprocè in duplicatâ ratione distantia locorum à centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.

(<sup>2</sup>) Nam (per corol. 2. prop. XIII.) latus rectum  $L$  æqua-

le est quantitati  $\frac{QTq}{QR}$ , quæ

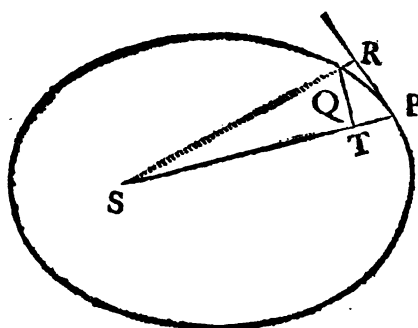
ultimo fit, ubi coeunt puncta  $P$  &  $Q$ . Sed linea minima  $QR$  dato tempore est ut vis centripeta generans, hoc est (per hypothesin) reciprocè ut  $SPq$ . Ergo

$\frac{QTq}{QR}$  est ut  $QTq \times SPq$ , hoc est, latus rectum  $L$  in duplicatâ

ratione areæ  $QT \times SP$ .  $Q. E. D.$

Corol. (<sup>a</sup>) Hinc ellipsoos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area  $QT \times SP$ , quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum.

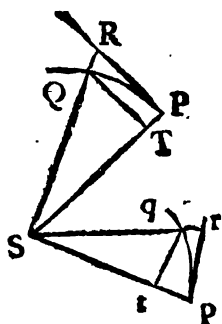
P R O-



(<sup>2</sup>) 269. Sint in Hypothesi propositionis XIV. duarum sectionum conicarum arcus quam minimi  $PQ$ ,  $pq$ , simul descripti,  $L$ ,  $l$ , earundem latera recta, (& per prop. VI. & Hyp.)  $QR : qr = SP^2 : Sp^2$ . Sed (267.)

$$\frac{QT^2}{QR} : \frac{qt^2}{qr} = L : l$$

$$\frac{QT^2}{Sp^2} : \frac{qt^2}{Sp^2} = QT^2 \times SP^2 : qt^2 \times Sp^2.$$



Sunt autem  $QT \times SP$ ,  $qt \times Sp$ , ut sectores evanescentes  $SQP$ ,  $Sqp$ , ergò latera recta  $L$ ,  $l$ , sunt in duplicatâ ratione arearum simul descriptarum; nam areæ quævis simul descriptæ sunt semper ut sectores  $SQP$ ,  $Sqp$ , simul descripti, ob æquabilem circa centrum virium  $S$  arearum descriptionem in utrâque sectione conicâ. Hinc in analogis loco quadrati areæ dato tempore descriptæ substitui potest sectionis latus rectum & contrâ, dummodo id fiat in Hypothesi propositionis.

(<sup>2</sup>) 270. Hinc Ellipsoos area tota eique proportionale rectangulum sub axibus (250.) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & ratione temporis periodici.



## PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

*Isdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsis sunt in ratione sesquuplicatâ majorum axium.*

(b) Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque ideo rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & sesquuplicatâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (*per corol. prop. XIV.*) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquuplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis. *Q. E. D.*

(c) *Corol.* Sunt igitur tempora periodica in ellipsis eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipseon.

P R O-

*Acti.* Namque tempus periodicum (252.) est ut area tota directè & area tempore dato descripta inversè, adeoque area tota est ut area  $QT \times SP$  quæ dato tempore describitur (hoc est, (269.) ut radix quadrata lateris recti) ducta in tempus periodicum.

(b) 271. Sit Ellipsis axis major A; minor B, Latus rectum L, tempus periodicum T; & quoniam  $A:B = B:L$ , erit  $B^2 = A \times L$ ,  $B = A^{\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ ,  $A \times B = A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ , sed rectangulum  $A \times B$ , (270.) est

ut  $T \times L^{\frac{1}{2}}$ , ergò  $A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$  est ut  $T \times L^{\frac{1}{2}}$ , & dividendo utrumque terminum per  $L^{\frac{1}{2}}$  erit  $A^{\frac{3}{2}}$  ut T.

(c) 272. Circulus est species ellipsis cujus foci cum centro coincidunt & Latus rectum cum diametro; sed tempora periodica in Ellipsis quæ axem majorem æqualem habent sunt æqualia (271.) ergò in Ellipsi & circulo cujus diameter seu axis æquatur axi majori ellipsis, tempora periodica æquantur.

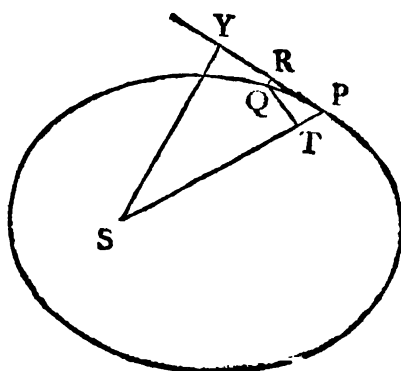
PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Isidem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tan-  
gant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangen-  
tes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in  
ratione compositâ ex ratione perpendicularum inversè, & subdu-  
plicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.*

Ab umbilico  $S$  ad tangen-  
tem  $PR$  demitte perpendicu-  
lum  $SY$ , & velocitas corporis  
 $P$  erit reciprocè in subdupli-  
catâ ratione quantitatis  $\frac{SY}{L}$ .

Nam velocitas illa est ut arcus  
quam minimus  $PQ$  in datâ  
temporis particulâ descriptus,  
hoc est (*per lem. VII.*) ut  
tangens (<sup>d</sup>)  $PR$ , id est, ob



proportionales  $PR$  ad  $QT$  &  $SP$  ad  $SY$ , ut  $\frac{SP \times QT}{SY}$ , five  
ut  $SY$  reciprocè &  $SP \times QT$  directè; estque  $SP \times QT$  ut area  
dato tempore descripta, id est (*per prop. XIV.*) in subduplicatâ  
ratione lateris recti. *Q. E. D.*

*Corol. 1.* (<sup>e</sup>) Latera recta principalia sunt in ratione com-  
positâ ex duplicatâ ratione perpendicularum, & duplicatâ ratio-  
ne velocitatum.

*Corol. 2.* Velocitates corporum, in (<sup>f</sup>) maximis & minimis ab  
umbilico communi distantis, sunt in ratione compositâ ex ratio-  
ne

(<sup>d</sup>) \* Velocitas est ut tangens  $PR$ ;  
sed ob angulos ad  $T$  &  $Y$  rectos & an-  
gulos  $QPT$ ,  $YPS$ , punctis  $P$ ,  $Q$ , coeun-  
tibus æquales, triangulum evanescens  
 $QPT$ , simile erit triangulo  $PSY$ , adeò-  
que  $QP(PR):QT=SP:SY$ , &  $PR$   
 $= \frac{SP \times QT}{SY}$ .

(<sup>e</sup>) \* Velocitatis quadratum  $c^2$ , est di-  
rectè ut  $\frac{L}{SY^2}$  (*prop. XVI.*) ergò  $L$  est ut  
 $c^2 \times SY^2$ .

(<sup>f</sup>) \* Maximæ & minimæ distantie sunt  
axis partes ab umbilico ad vertices principa-  
les contentæ, adeoque cum illic axis sit per-  
pen-

## 166 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM. distantiarum inversè, & subduplicatâ ratione laterum recto-  
rum principalium directè. Nam perpendiculara jam sunt ipsæ  
LIBER distantiæ.  
PRIMUS.

*Corol. 3.* (g) Ideoque velocitas in conicâ sectione, in maxi-  
mâ vel minimâ ab umbilico distantia, est ad velocitatem in cir-  
culo in eadem à centro distantia in subduplicatâ ratione lateris  
recti principalis ad duplam illam distantiam.

*Corol. 4.* (h) Corporum in ellipsis gyantium velocitates in  
mediocribus distantis ab umbilico communi sunt eadem, quæ  
corporum gyantium in circulis ad easdem distantias; hoc est  
(per *corol. 6. prop. 1v.*) reciprocè in subduplicatâ ratione dis-  
tantiarum. Nam perpendiculara jam sunt semi-axes minores,  
& hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera  
recta. Componatur hæc ratio inversè cum subduplicatâ ratione  
laterum rectorum directè, & fiet ratio subduplicata distantiarum  
inversè.

*Corol. 5.* In eadem figurâ; vel etiam in figuris diversis,  
quarum latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corpo-  
ris est reciprocè ut perpendicularum demissum ab umbilico ad  
tangenterem.

*Corol. 6.* (i) In parabolâ velocitas est reciprocè in subdu-  
plicatâ ratione distantia corporis ab umbilico figuræ; in ellipsi  
ma-

pendicularis tangenti, ipsa perpendiculara ad  
tangenterem in maximis & minimis distan-  
tiis sunt ipsæ distantia; mediocres distantia  
sunt distantia ab umbilico ad vertices axis  
minoris Ellipticos, adeoque semiaxi majori  
æquantur.

(g) \* Nam circulus ille (272.) est  
ellipsi cujus latus rectum est ipsa diame-  
ter, ideoque est ipsa dupla distantia ab um-  
bilico seu centro, quare cum eadem ponat-  
ur distantia tam in conicâ sectione quàm  
in circulo, velocitates sunt in subduplicatâ  
ratione laterum rectorum, hoc est in subdu-  
plicatâ ratione lateris recti sectionis con-  
icæ, ad duplam illam distantiam quæ est  
latus rectum circuli.

(h) \* Sit  $A$  corporis in Ellipsi gyantis  
mediocris distantia ab umbilico, sit etiam

circuli radius  $A$ ; semiaxis minor, seu  
perpendicularis demissa ex umbilico in tan-  
gentem axi majori parallelam sit  $B$ , latus  
rectum  $L$ , & circuli latus rectum (272.)  
erit  $2A$ , velocitas in Ellipsi sit  $C$ , in  
circulo  $c$ , & erit (per *prop. xv.*)  $C^2$ :

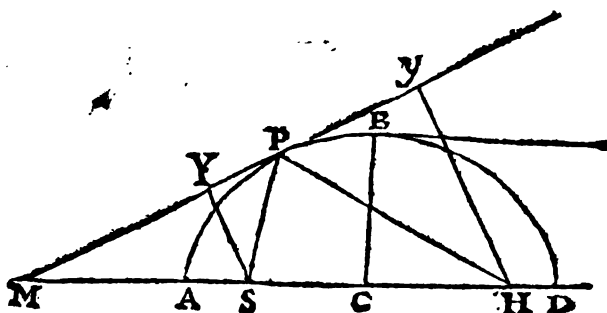
$c^2 = \frac{L}{B^2} : \frac{2A}{A^2} = L \times A : 2B^2$ ; sed ex Co-  
nicis distantia à foco ad extremitatem se-  
miaxis minoris (quæ est mediocris dis-  
tantia) est æqualis semiaxi majori, est er-  
go distantia  $A$  semiaxis major, ideoque cum  
ex conicis sit  $A : B = 2B : L$ , est  $2B^2 = A \times L$ ,  
ergo  $C^2 = c^2$ , &  $C = c$ .

(i) In Parabolâ velocitas est reciprocè in  
subduplicatâ ratione distantia corporis ab um-  
bilico figuræ; cum enim velocitas sit reci-  
procè ut perpendicularum demissum ab um-  
bili-

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 167

magis variatur, in hyperbolâ minus quàm in hac ratione. Nam DE MO-  
(per corol. 2. lem. XIV.) perpendiculum demissum ab um-TU COR-  
bilico ad tangentem parabolæ est in subduplicatâ ratione dif-FORUM.  
tantia. In hyperbolâ perpendiculum minus variatur, in ellip-LIBER  
fâ magis. PRIMUS.

Co-



bilico ad Tangentem, per præced. Coroll.;  
& (per Cor. 2. Lem. XIV.) quadratum  
ejus perpendiculi sit semper in Parabolâ  
ut distantia à foco, erit velocitas recipro-  
ce ut radix quadrata illius distantia à fo-  
co, sive in subduplicatâ ratione distantia  
&c.

276. Lemma. Sit Ellipsis APB, cujus  
axis major AD, foci S & H, semiaxis mi-  
nor BC; My tangens in P, SY & Hy  
in tangentem perpendiculares; ob an-  
gulos YPS, HPY, æquales (prop. 48.  
lib. 3. Conic. Apoll. sup. Theor. IV.  
de Ellip.) similia sunt triangu-  
la SPY, HPY, unde  $SP : SY :: HP : Hy$   
 $\frac{SY \times HP}{SP} = \frac{SY \times HP}{SP}$ , ac proinde  $SY \times Hy = \frac{SY \times HP}{SP}$   
 $= BC^2$  (ex conicis. Vid. sup. n. 236.)  
sed  $HP + SP = AD$  (prop. 52. lib.  
3. Conic. Apoll. sup. Theor. III. de Ellip.)  
unde est  $HP = AD - SP$  ergò  $\frac{SY \times AD - SP}{SP}$   
 $= BC^2$ ; &  $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$  Ergò in  
Ellipsi,  $SY^2$  variatur in ratione  $\frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$   
sive ob quantitatem  $BC^2$ , constantem in

ratione  $\frac{SP}{AD - SP}$ :

Crescat distantia SP, minor fiet  $AD - SP$ ,  
si non mutaretur denominator fractionis

$\frac{SP}{AD - SP} = SY^2$ , cresceret  $SY^2$  sicut SP, cum

autem minuatür denominator Sp crescente,  
eo ipso major fit valor fractionis  $\frac{SP}{AD - SP}$

ergo crescente SP,  $SY^2$  magis cre-  
scit quàm in solâ ratione SP, ergo perpen-  
diculum in ellipsi magis variatur quàm in  
subduplicatâ ratione distantia SP.

In Hyperbolâ verò, quoniam  $HP - SP$   
 $= AD$  (prop. 51. lib. 3. Conic. Apoll.  
Theor. III. de Hyp.) &  $HP = AD + SP$ ,

eodem modo reperitur  $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD + PS}$

& crescente SP, cre-  
scit etiam  $AD + SP$ , si  
idem maneret denominator cresceret  $SY^2$  si-

cut SP, denominatore aucto, fractio  $\frac{SP}{AD + SP}$

fit minor quàm eo manente, sed ea ex-  
primit valorem quadrati perpendiculi SY,  
ergo  $SY^2$  minus cre-  
scit quàm SP sive  
perpendiculum in Hyperbolâ minus variatur  
quàm in subduplicatâ ratione distantia SP.

# 168 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Corol. 7. (\*) In parabolâ velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro distantiam in subduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem; (1) in ellipsi minor est, in hyperbolâ major quàm in hac ratione. Nam per hujus corollarium secundum velocitas in vertice parabolæ est in hac ratione, & per corollaria sexta hujus & propositionis quartæ servatur eadem proportio in omnibus distantiiis. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam, in ellipsi minor est, in hyperbolâ major.

Cq-

(\*) 277. Sit latus rectum parabolæ  $L$ , adeoque distantia foci à vertice  $\frac{1}{4} L$ , & ex umbilico tanquam centro ac radio  $\frac{1}{4} L$ , describatur circulus, ejus latus rectum seu diameter erit  $\frac{1}{2} L$ ; unde velocitas corporis in vertice parabolæ erit ad velocitatem corporis in illo circulo revolventis ut  $\sqrt{L}$  ad  $\sqrt{\frac{1}{2} L}$ , hoc est, ut  $\sqrt{2}$  ad 1. (corol. 2. hujusce Prop.) sed per corol. 6. velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in aliâ quavis ab umbilico distantia SP, ut  $\sqrt{SP}$  ad  $\sqrt{\frac{1}{4} L}$ , & (per corol. 6. prop. IV.) velocitas in circulo cujus radius  $\frac{1}{4} L$ , est etiam ad velocitatem in alio circulo cujus radius SP, ut  $\sqrt{SP}$ , ad  $\sqrt{\frac{1}{4} L}$ ; quare velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in eadem parabolâ ad distantiam SP, ut velocitas in circulo cujus radius  $\frac{1}{4} L$ , ad velocitatem in circulo cujus radius est SP, ac proinde alternando velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in circulo radio  $\frac{1}{4} L$  descripto, hoc est,  $\sqrt{2}$  ad 1, ut velocitas in parabolâ in distantia SP, ad velocitatem in circulo ad eandem à centro seu umbilico distantiam descripto.

278. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam; nam velocitas in circulo cujus radius  $\frac{1}{2} SP$  est ad velocitatem in circulo cujus ra-

dus SP, ut  $\sqrt{2}$  ad 1, (per coroll. 6. prop. IV.) sed velocitas in parabolâ ad distantiam SP, est ad velocitatem in circulo cujus radius SP, etiam ut  $\sqrt{2}$  ad 1, velocitas igitur in parabolâ ad distantiam SP, æquatur velocitati in circulo cujus radius  $\frac{1}{2} SP$ .

(1) 279. In Ellipsi velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro distantiam in minore ratione quam  $\sqrt{2}$  ad 1; in Hyperbolâ in ratione majore. Sit enim Ellipsis vel hyperbolæ latus rectum  $L$ , distantia ab umbilico SP, perpendicularum ad tangentem sectionis in puncto P demissum SY; SP, sit radius circuli, C sit velocitas in Ellipsi vel hyperbola ad distantiam SP; C, velocitas in circulo,

& erit (per prop. XVI.)  $c^2 : C^2 = \frac{L}{SY^2}$ :

$\frac{2 SP}{SP^2} = L \times SP : 2 SY^2$ ; sed (276)  $2 SY^2$

$= \frac{2 BC^2 \times SP}{AD \mp SP}$ , ergo  $c^2 : C^2 = L \times SP :$

$\frac{2 BC^2 \times SP}{AD \mp SP} = L \times AD \mp SP : 2 BC^2$ ;

& ob  $L \times AD = 4 BC^2$  seu  $BC^2$

$= \frac{L \times AD}{2}$ , est  $c^2 : C^2 = 2 AD \mp 2 SP : AD$ ;

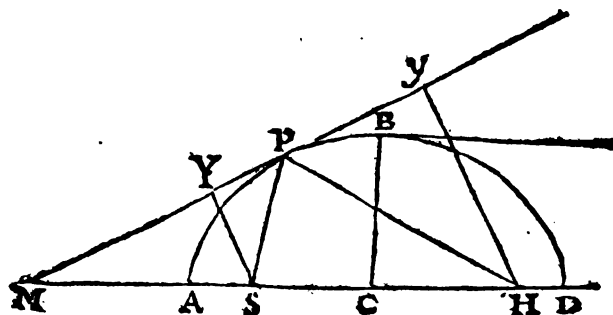
undè in Ellipsi in quâ 2 SP habet signum —, ratio  $c^2$  ad  $C^2$ , minor est quam ratio

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 169

*Corol. 8.* Velocitas gyantis in sectione quavis conicâ est ad DE Mo-  
velocitatem gyantis in circulo in distantia dimidii lateris recti TU COR-  
principalis sectionis, ut distantia illa ad perpendicularum ab um- FORUM  
bilico in tangentem sectionis demissum. (m) Patet per corolla- LIBER  
rium quintum. PRIMUS.

*Corol. 9.* (n) Unde cum (per corol. 6. prop. 1 v.) veloci-  
tas gyantis in hoc circulo sit ad velocitatem gyantis in circulo  
quovis alio reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum; fiet ex  
æquo velocitas gyantis in conicâ sectione ad velocitatem gyran-  
tis in circulo in eâdem distantia, ut media proportionalis inter  
distantiam illam communem & semissem principalis lateris recti  
sectionis, ad perpendicularum ab umbilico communi in tangentem  
sectionis demissum.

P R O-



ratio 2; ad 1, & ratio c ad C, minor  
quam ratio  $\sqrt{2}$ , ad 1; in hyperbolâ ma-  
jor ob  $\frac{1}{2} SP$  (276.)

280. *Coroll.* Quoniam distantia ab al-  
tero sectionis foco HP = AD - SP,  
erit  $c^2 : C^2 = 2 HP : AD = HP : \frac{1}{2} AD$ ,  
hoc est, velocitas in Ellipsi & hyper-  
bolâ ad quamvis ab umbilico seu centro  
virium distantiam SP est ad velocitatem in  
circulo ad eandem distantiam in ratione  
subduplicatâ distantiae HP ab altero um-  
bilico ad semiaxem majorem.

(m) \* Nam iste circulus & sectio Co-  
nica idem latus rectum habent, quia in cir-  
culo distantia à Centro semi diametro  
æquatur & tota diameter est latus Rectum,  
ideo velocitates sunt reciprocè ut perpen-

Tom. I.

dicula in Tangentem demissa (per Cor. 5:  
hujusce) sed in circulo semidiameter per-  
pendiculo æquatur, ergo velocitates in sec-  
tione & in circulo sunt ut semi-diameter  
circuli ad Perpendicularum &c.

(n) 281. Sit C velocitas corporis gy-  
rantis in circulo ad distantiam dimidii  
lateris recti  $\frac{1}{2} L$ , c velocitas in sectione  
conicâ ad distantiam SP, K velocitas in  
circulo ad eandem distantiam SP, & erit  
(per coroll. 8.)  $c^2 : C^2 = \frac{1}{4} L^2 : SY^2$   
(& per cor. 6. prop. IV.)  $C^2 : K^2 = SP : \frac{1}{2} L$ ,  
undè, ex æquo,  $c^2 : K^2 = SP \times \frac{1}{4} L^2 :$   
 $SY^2 \times \frac{1}{2} L = SP \times \frac{1}{2} L : SY^2$ . Fiat  $SP : m^2$   
 $= m : \frac{1}{2} L$ , & erit  $m^2 = SP \times \frac{1}{2} L$ ,  
ac proinde  $c^2 : K^2 = m^2 : SY^2$  &  $c : K = m : SY$ .

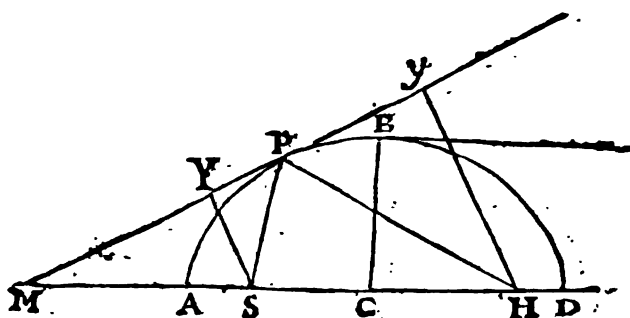
Y

282,

## PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantie locorum à centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea, quam corpus describit de loco dato cum datâ velocitate secundum datam rectam egrediens.

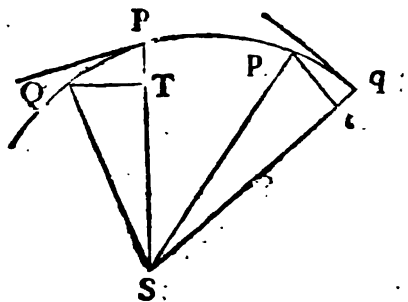
Vis centripeta tendens ad punctum S ea sit, quâ corpus p in orbitâ quâvis datâ p q gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco p. De loco P secundum lineam PR.



282. Sic C, centrum Ellipsis, CB semiaxis min.or, foci S & H, tendatque vis centripeta ad focum S; velocitas in P erit ad velocitatem in B, in subduplicatâ ratione distantie HP à foco H, ad distantiam SP ab altero foco seu centro virium S; Nam velocitas in P dicatur c, velocitas in B dicatur e, & erit (per cor. 5. prop. XVI.)  $C:e=CB:SY$ , adeoque  $C^2:e^2=CB^2:SY^2$ , hoc est, ob  $CB^2=SY \times Hy$  (235.)  $C^2:e^2=SY \times Hy:SY^2=Hy:SY$ ; sed ob similia triangula SPY, HPY,  $Hy:SY=HP:SP$ . Ergo  $C^2:e^2=HP:SR$ , &  $C:e=HP^{\frac{1}{2}}:SP^{\frac{1}{2}}$  Q. e. D.

Theorema illud invenit clarissimus Geometra Abrahamus de Moivre.

283. Velocitas angularis corporis P, in quâvis orbitâ QPp, revolvantis seu angulus PSQ, quem radius vector SP, dato tempore minimo describit est directè ut QT perpendicularis ad radium vectorem SP, & distintia SP inversè, dum puncta Q & P coeant, nam linea perpendicularis QT pro arcu circuli haberi potest, undè angulus PSQ =  $\frac{QT}{SP}$  (153.)



284. Coroll. 1. Hinc velocitas angularis in eadem orbitâ est ubique reciprocè in duplicatâ ratione distantie SP à centro virium S. Nam sectores PSQ, pSq, eodem tempusculo descripti sunt æquales (prop. I.). Undè  $QT \times SP = qt \times Sp$ , adeoque  $QT:qt=Sp:SP$ , & hinc  $\frac{QT}{SP} = \frac{qt}{Sp} = \frac{Sp}{SP} = \frac{Sp^2}{SP^2}$ .

285. Coroll. 2. ... Velocitates angulares in sectionibus conicis circa umbilicum communem seu centrum virium descriptis sunt inter se ut radices quadratæ laterum rectorum principalium directè & quadratè dif.

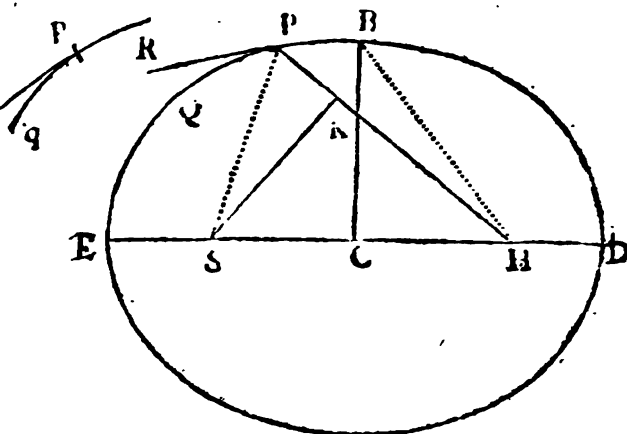




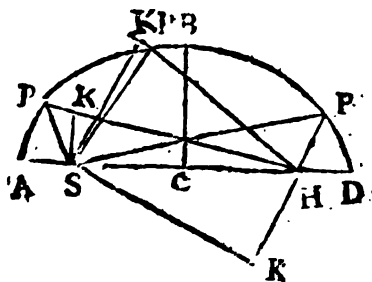
# 172 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO  
TU COR  
PORUM  
LIBER  
PRIMUS

rectum Datur præterea ejusdem confectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH; & dabitur positione linea PH, in qua umbilicus alter H locatur. Demisso ad PH perpendiculari SK, erigi intelligatur semiaxis conjugatus BC, (b) & erit  $SPq - 2KPH + PHq = SHq = 4CHq = 4BHq - 4BCq = SP + PH: quad. - L \times SP + PH(c) = SPq + 2SPH + PHq - L \times SP + PH$ . Addantur utrobique  $2KPH - SPq - PHq + L \times SP + PH$ , & fiet  $L \times SP + PH = 2SPH + 2KPH$ , seu  $SP + PH$  ad PH ut  $2SP + 2KP$  ad L. Unde datur PH tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit



quam  $2SP + 2KP$ , jacebit PH ad eandem partem tangentis PR. Recti sectionis assumptæ ad Latus Rectum sectionis quam corpus P describit; Quod ergo invenitur, eratque primum.



(b) Erat  $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SH^2$ . Es. nim (per 12. & 13. 1. Elem.) in omni Triangulo SPH, quadratum lateris SH, quod consideratur ut Hypothenusâ anguli P, æquatur quadratis aliorum laterum SP PH. dempto duplo Rectanguli lateris PH in quod cadit perpendicularum, ducti in partem

PK ab Angulo P ad perpendicularum usque interceptam, quæ quidem PK sumitur cum signo + si sit ab eadem parte Tangentis ac S & cum signo - si sit in parte opposita.

(c) 187.  $SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2$  &c. Ex naturâ Ellipseos est 2BH æqualis axi majori 2AC idcoque æqualis  $SP + PH$  &  $4BH^2 = SP + PH^2$ , pariter est 2AC: 2BC = 2BC: L est ergo  $4BC^2 = L \times 2AC$  five  $L \times SP + PH$  unde est  $4BH^2 - 4BC^2 = SP + PH^2 - L \times SP + PH$ .

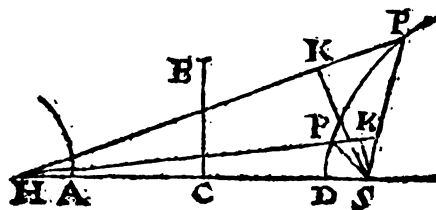
Collatis itaque valoribus ejusdem quantitatis  $SH^2$ , est  $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SP^2 + 2SP \times PH + PH^2 - L \times SP + PH$ , utrinque detractis æqualibus manet  $- 2KP \times PH = 2SP \times PH - L \times SP + PH$  transpositisque partibus negativis est  $L \times SP + PH = 2SP \times PH + 2KP \times PH$  five  $2SP + 2KP \times PH$  unde est  $2SP + 2KP: L = SP + PH: PH$  & dividendo  $2SP + 2KP - L: L = SP: PH$  unde.

cum linea  $PS$ ; ideoque figura erit ellipsis, & ex datis umbilicis  $S$ ,  $H$ , & axe principali  $SP + PH$ , dabitur. Sin tanta fit corporis velocitas ut latus rectum  $L$  æquale fuerit  $2SP + 2KP$ , longitudo  $PH$  infinita erit; & propterea figura erit parabola axem habens  $SH'$  parallelum lineæ  $PK$ , & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo  $P$  exeat, capiendâ erit longitudo  $PH$  ad alteram partem tangentis; ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum  $SP$  &  $PH$ , & inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conicâ sectione sic inventâ, demonstratum est in prop. XI, XII, & XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum distantie corporis à centro virium  $S$  reciprocè; ideoque linea  $PQ$  rectè exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato  $P$ , cum datâ velocitate; secundum rectam positionem datam  $PR$  egrediens. *Q.E.F.*

*Corol. r.* Iinc in omni conicâ sectione ex dato vertice principali  $D$ , in latere recto  $L$ , & umbilico  $S$ , datur umbilicus alter  $H$  capiendâ  $DH$  ad  $DS$  ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum &  $4DS$ . (<sup>d</sup>) Nam proportio  $SP + PH$  ad  $PH$  ut  $2SP + 2KP$  ad  $L$  in casu hujus corollarii, fit  $DS + DH$  ad  $DH$  ut  $4DS$  ad  $L$ , & divisim  $DS$  ad  $DH$  ut  $4DS - L$  ad  $L$ .

nunc quo magis accedit valor lateris recti  $L$  ad quantitatem  $2SP + 2KP$ , eo major est  $PH$  respectu  $SP$ , si  $L = 2SP + 2KP$ , infinitum est  $SP$  respectu  $PH$ ; hoc est, Ellipsis abit in Parabolam, si  $L$  sit majus quam  $2SP + 2KP$ , primus terminus Proportionis fit negativus, ideoque  $PH$  in partem oppositam Tangentis cadet & sectio fiet Hyperbola; manentibus autem cæteris crescit Latus Rectum cum velocitate in puncto  $P$  datâ: Unde quò major fit velocitas respectu vis centripetæ, eo magis elongatur Ellipsis quam describit corpus propositum vel etiam in Parabolâ movetur, & tandem in Hyperbolâ.

288. Demonstratio pro Hyperbolâ ita instituitur: Quia  $PK$  non est in eadem parte Tangentis ac  $S$ , sumitur  $PK$  cum signo — ideoque est  $SH^2 = SP^2 + 2KP \times PH + PH^2$ , & per naturam Hyperb. lz  $SH^2 = 4CH^2 = 4CA^2 + 4CB^2$  sive quia  $CA = PH - SP$  &  $CB = L \times 2CA$  est  $SH^2 = PH^2 - 2SP \times PH$ .



$+SP^2 + L \times PH - SP$  unde collatis valoribus  $SH^2$  & detractis quantitibus communibus est  $2KP \times PH = -2SP \times PH + L \times PH - SP$  & transpositis quantitibus negativis est  $2KP \times PH + 2SP \times PH = L \times PH - SP$  unde est  $2SP + 2KP : L = PH : SP$ , & convertendo  $L \times 2SP - 2KP : L = SP : PH$ .

(<sup>d</sup>) 289. In casu hujus corollarii punctum  $P$  cadit in  $D$ , punctum  $K$  cadit in  $S$ , fitque  $PK = DS = SP$ , &  $PH = DH$ . Quare in omni sectione conicâ est  $DH$ , ad  $DS$ , ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum &  $4DS$ . *Y 3.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Corol. 2.* Unde si datur corporis velocitas in vertice principali  $D$ , invenietur orbita expedite, capiendò scilicet latus rectum ejus ad duplam distantiam  $DS$ , in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam  $DS$  gyrantis (*per corol. 3. prop. XVI.*); dein  $DH$  ad  $DS$  ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4  $DS$ .

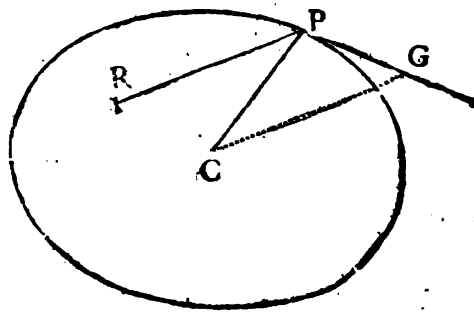
*Corol. 3.* Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quâcunque conicâ, & ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exhibit.

*Corol. 4.* Et si corpus illud vi aliquâ extrinsecus impressâ continuo perturbetur, innotescet cursus quam proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogiâ mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

### Scholium.

Si corpus  $P$  vi centripetâ ad punctum quodcunque datum  $R$  tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque sectionis conicæ, cujus centrum sit  $C$ ; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur  $CG$  radio  $RP$  parallela, & orbis tangenti  $PG$  occurrens in  $G$ ; & (\*) vis illa (*per corol. 1. & schol. prop. X. & corol. 3. prop. VII.*) erit ut

$$\frac{CG \text{ cub.}}{RP \text{ quad.}}$$



S E C.

(\*) 290. Vis ad centrum vel à centro  $C$ , tendens est ut  $CP$ , (*per coroll. X. Prop. X. & Not. 232.*) adeoque exponatur per lineam  $CP$ ; vis ad punctum

$R$ , tendens exponatur per lineam  $A$ , & (*per corol. 3. prop. VII.*) erit  $CP \times RP^2$ :

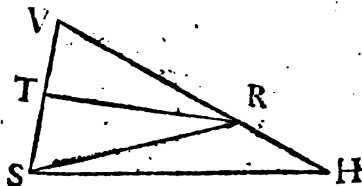
$$CG : CP : A = \frac{CG}{RP^2}$$

SECTIO IV.

*De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum  
& hyperbolicorum ex umbilico dato.*

LEMMA XV.

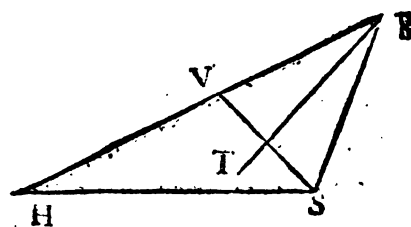
Si ab ellipso vel hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus  $S, H$ , ad punctum quodvis tertium  $V$  inflectantur rectæ duæ  $SV, HV$ , quarum una  $HV$  æqualis sit axi principali figuræ, id est, axi in quo umbilici jacent, altera  $SV$  à perpendiculari  $TR$  in se demisso bisecetur in  $T$ ; perpendicularum illud  $TR$  sectionem conicam alicubi tanget: & contra, si tangit, erit  $HV$  æqualis axi principali figuræ.



Secet enim perpendicularum  $TR$  rectam  $HV$  productam, si opus fuerit, in  $R$ ; & jungatur  $SR$ . Ob æquales  $TS, TV$ , æquales erunt & rectæ  $SR, VR$  & anguli  $TRS, TRV$ . (\*) Unde punctum  $R$  erit ad sectionem conicam, & perpendicularum  $TR$  tanget eandem & contra. Q. E. D.

P R O-

(\*) \* Si fuerint  $S, H$ , Ellipseos umbilici, erit  $SR + RH = HV =$  axi majori; ac proinde  $R$  punctum perimetri Ellipsis quam  $TR$  tangit in  $R$ , ob angulos  $TRS, TRV$ , æquales (per prop. 51. & 46. lib. 3. Conic. Apollon. Theor. III. & IV. de Ell.) & contra si  $TR$  tangat Ellipsim in  $R$ , & duratur  $SV$ , ad  $TR$  perpendicularis, erit ob angulos  $TRS, TRV$ , æquales  $VR = SR$ , &  $VH = SR + RH =$  axi majori.



\* Si fuerint  $S, H$ , Hyperbolæ umbilici ob æquales  $TS, TV$ , erit  $SR = VR$ , &  $HR - SR = HV$  æqualis axi majori, &  $R$  punctum Hyperbolæ quam tangit in  $R$  recta  $TR$  ob angulos  $VRT, TRS$ , æquales (per prop. 51. & 46. lib.

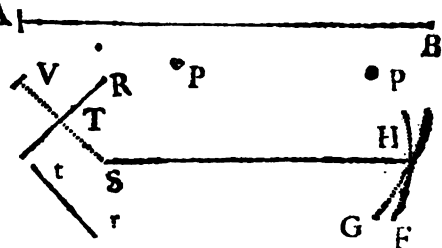
3. Conic. Apoll. Theor. III. & IV. de Hyperb.) & contra si  $TR$  tangat Hyperbolam in  $R$ , & agatur  $SV$  ad  $TR$  perpendicularis erit  $VR = SR$ , &  $HV = HR - RS$ , æqualis axi majori, ut patet.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

*Datis umbilico & axibus principalibus describere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.*

Sit  $S$  communis umbilicus figurarum;  $AB$  longitudo axis principalis trajectoriæ cujuscvis;  $P$  punctum per quod trajectoria debet transire; &  $TR$  recta quam debet tangere. Centro  $P$  intervallo  $AB-SP$ , si orbita sit elliptica, vel  $AB+SP$ , si ea sit hyperbola, describatur circulus  $HG$ . Ad tangentem  $TR$  demittatur perpendicularum  $ST$ , & producatum idem ad  $V$ , ut sit  $TV$  æqualis  $ST$ ; centroque  $V$  & intervallo  $AB$  describatur circulus  $FH$ . Hac methodo sive dentur duo puncta  $P, p$ , sive duæ tangentes  $TR, tr$ , sive punctum  $P$  & tangens  $TR$ , describendi sunt circuli duo. Sit  $H$  eorum intersectio communis, & umbilicis  $S, H$ , axe illo dato describatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria descripta (eo quod  $PH+SP$  in elliptica, &  $PH-SP$  in hyperbola æquatur axi) transibit per punctum  $P$ , & (per lemma superius) tanget rectam  $TR$ . Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo  $P, p$ , vel tanget rectas duas  $TR, tr$ .  
(8) *Q. E. F.*



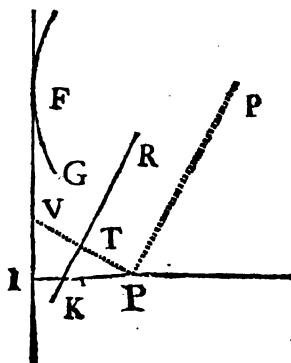
## PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

*Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas contingent.*

Sit  $S$  umbilicus,  $P$  punctum &  $TR$  tangens trajectoriæ describendæ. Centro  $P$  intervallo  $PS$  describe circulum  $FG$ . Ab  
um-

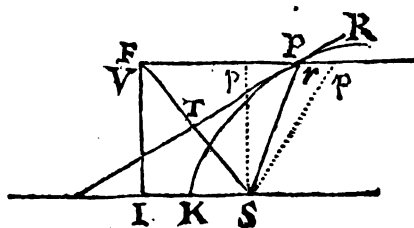
\* (8) Si orbita sit Hyperbola, focus  $H$ , erit in recta  $HS$ , ultra  $S$ ; producta;

umbilico ad tangentem demitte perpendicularem  $ST$ , & produc DE Mo-  
eam ad  $V$ , ut sit  $TV$  æqualis  $ST$ . Eodem modo describendus TU COR-  
est alter circulus  $fg$ , si datur alterum punctum  $p$ ; vel invenien- PORUM.  
dum alterum punctum  $v$ , si datur altera tan- LIBER  
gens  $tr$ ; dein ducenda recta  $IF$  quæ tan- PRIMUS.  
gat duos circulos  $FG$ ,  $fg$  si dantur duo  
puncta  $P$ ,  $p$ , vel transeat per duo puncta  
 $V$ ,  $v$ , si dantur duæ tangentes  $TR$ ,  $tr$ ,  
vel tangat circulum  $FG$  & transeat per  
punctum  $V$ , si datur punctum  $P$  & tangens  
 $TR$ . Ad  $FI$  demitte perpendicularem  $SI$ ,  
eamque bifeca in  $K$ ; & axe  $SK$ , vertice  
principalis  $K$  describatur parabola. Dico  
factum. (h) Nam parabola, ob æquales  
 $SK$  &  $IK$ ,  $SP$  &  $FP$ , transibit per punctum  $P$ ; & (per lem. XIV.  
corol. 3.) ob æquales  $ST$  &  $TV$  & angulum rectum  $STR$ , tan-  
get rectam  $TR$ . Q. E. F.



(h) 291. Nam Parabola ob æquales  $SK$   
&  $IK$ ,  $SP$  &  $FP$ , transibit per punctum  $P$   
scilicet Parabola descripta ob æquales  $SK$   
&  $IK$  habet pro directrice lineam  $IF$  (per  
Theor. II de Parab. n. 224. de Conicis),  
cùm verò distantia puncti cujusvis Parabola  
à Directrice sit æqualis distantia ejus  
puncti à foco, vice versâ, punctum quod  
æqualiter à foco & à Directrice distabit,  
pertinebit ad Parabolam. Finge enim li-  
neam  $FP$  Directrici perpendicularem oc-  
currere quidem Parabolæ in puncto  $P$ , ita  
ut sit  $FP = SP$ , sed in eâ posse tum aliud  
punctum  $p$  ita ut sit etiam  $Sp = Fp = FP$   
 $\pm Pp$ , erit ob  $Fp = SP$ ,  $Sp = SP \pm Pp$   
sed cùm  $SPp$  sit Triangulum, absurdum est  
(per 20. 1. Elem.) esse  $Sp = SP \pm Pp$   
ergo absurdum est fingere aliud. Punctum  
præter id quod ad Parabolam pertinet tale  
ut ejus distantia à directrice sit æqualis ejus  
distantia à foco, ergo ob æquales  $SP$  &  $FP$ ,  
Parabola cujus directrix est  $IF$  & umbili-  
cus  $S$  transibit per punctum  $P$ .

2us. Casus. Parabola descripta ob æqua-  
les  $ST$ ,  $TV$ , ob angulum Rectum  $STR$  tan-  
get rectam  $TR$ , ejus enim Parabolæ de-  
scriptæ directrix est  $VI$ . Jam verò du-  
Tom. I.



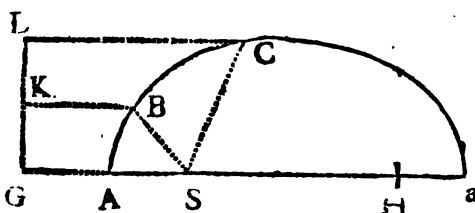
catur ex  $V$  perpendicularis in directricem  
quæ rectæ  $TR$  occurrat in  $r$  & ab  $r$  duca-  
tur ad focum linea  $rS$ , ob æquales  $ST$  &  $TV$   
& angulum rectum  $STR$  erit  $Vr = rS$  &  
punctum  $r$  ad Parabolam pertinebit per su-  
periore demonstrationis partem, eadem  
ratione probabitur angulum  $VrT$  æqualem  
esse angulo  $TrS$  ideoque linea  $Tr$  bifariam  
dividit angulum  $VrS$ , sed ea linea Para-  
bolæ Tangens est quæ bifariam dividit an-  
gulum quem faciunt duæ lineæ ductæ à pun-  
cto quovis Parabolæ una ad focum alte-  
ra perpendiculariter ad directricem (per  
Theor. III. de Parabola n. 224.) ergo li-  
nea  $TR$  tangit Parabolam descriptam five  
Parabola descripta tanget Rectam  $TR$ .

Z

## PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

*Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis speciei<sup>(1)</sup> datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tanget positione datas.*

*Cas. 1.* Dato umbilico S, describenda sit trajectoria ABC per puncta duo B, C. Quoniam trajectoria datur speciei, dabitur ratio axis principalis ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape KB ad BS, & LC ad CS. Centris B, C, intervallis BK, CL, describe circulos duos, & ad rectam KL, quæ tangat eosdem in K & L, demitte perpendiculum SG, idemque secæ in A & a, ita ut sit GA ad AS & Ga ad aS ut est KB ad BS & axe Aa, verticibus A, a, describatur trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter figuræ descriptæ, & cum sit GA ad AS ut Ga ad aS, erit divisim Ga — GA seu Aa ad aS — AS seu SH in eâdem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; (<sup>k</sup>) & propterea figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. (<sup>1</sup>) Cumque sint KB ad BS & LC ad CS in eâdem ratione, transibit hæc figura per puncta B, C, ut ex conicis manifestum est.



(<sup>1</sup>) 292. Sectiones conicæ sunt ejusdem speciei, seu similes, quarum axes duo, vel quod idem est, axis major & focorum distantia sunt inter se in datâ ratione; Ex hæc enim ratione unicè pendent partium sectionis ratio ac respectiva positio, atque hinc fit ut parabolæ omnes similes sint quod in omnibus focorum distantia infinita majori axi æqualis sit.

(<sup>k</sup>) \* Si describenda sit hyperbola, punctum a, sumi debet in perpendiculo SG, ad alteram partem lineæ GL, productum ut sit G, inter A, & a, tumque erit Ga + GA, seu Aa ad aS + AS, seu SH, in ratione GA ad AS, adeoque in ratione quam habet axis principalis hyperbolæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, & propterea hyperbola de-

scripta similis est hyperbolæ describendæ.

(<sup>1</sup>) Ut demonstretur puncta B & C ad Sectionem Conicam descriptam pertinere, quædam prævia ex Conicis sunt usurpanda.

293. Lemma. . . Sit sectionis conicæ AZB, axis major Aa, foci S, H, semiaxis minor cE erectâ ad axem perpendiculari SZ per punctum Z, ducatur tangens DZG quæ axi occurrat in G; tum ex punctis G, A, & quovis alio axis puncto M, erigantur ad axem perpendiculares GK, AX, MBD, & ex puncto sectionis B, ducatur ad GK, perpendicularis BK, erit 1°. SZ =  $\frac{1}{2}$  L, seu dimidio lateri recto, etenim ordinata in foco est semper æqualis semilateri Recto, (per Theor. III. de Ell. & Hyp. & Cor. 2. Theor. I. de Parab. n. 224.)

294. 2<sup>o</sup>. Erit GA ad AS sicut axis major ad distantiam focorum, hoc est GA:AS=Aa:SH; Nam cum G sit punctum in quo Tangens secat Diametrum, ejus distantia GA, Ga, ab utroque vertice sunt inter se sicut abscissae AS Sa ab utroque vertice Diametri sumptae, five est (per Lem. V. de Conic. n. 224.) GA:Ga

=AS:Sa & convertendo GA:Aa=AS:Sa — AS five SH (quia AS=Ha) ergo alternando GA:AS=Aa:SH.

295. 3<sup>o</sup>. Erit factum GS x Sc æquale quadrato semi axis minoris, nam quia est GA:AS=Aa:SH, est componendo GS:AS=SH+Aa:SH, & sumendo dimidium terminorum ultimae rationis est GS:AS=Sc+ca (five Sa):Sc, est ergo GS x Sc=AS x Sa, sed factum AS x Sa, (partium ab uno foco ad utrumque axis majoris verticem sumptarum) est semper æquale quadrato semi axis minoris, nam id factum æquatur in Ellipsi  $cA^2 - cS^2$  (per 5. 2. Elem.) & in Hyperbola  $cS^2 - cA^2$  (per 6. 2. Elem.) utrumque verò æquatur quadrato semi axis minoris per naturam focorum (Theor. III. de Hyper. & Ellip. 224.) est ergo GS x Sc =  $cE^2$ .

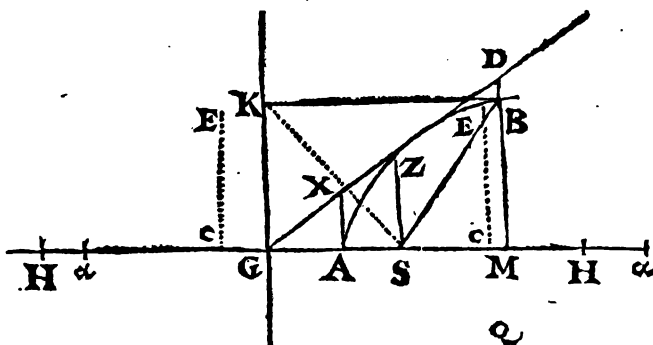
296. 4<sup>o</sup>. Perpendicularis AS in axis Vertice A erecta & terminata ad Tangentem in extremitate Z ordinatae quae insistit foco S est æqualis AS distantiae foci à Vertice... Nam cum ob Triangula similia XGA ZGS sit GA:AX=GS:SZ five  $\frac{1}{2}L$

$$= \frac{2cE^2}{2cA} \text{ & sit } cE^2 = GS \times Sc \text{ est } GA:AX$$

$$= GS: \frac{GS \times Sc}{cA} = cA:Sc \text{ (& duplicando hos terminos) } = Aa:SH, \text{ sed in eadem ratione est GA ad AS (294) ergo}$$

$$GA:AX=GA:AS \text{ & } AX=AS.$$

In Parabola idem verum est, in ea enim est GA=AS, GS=2AS & SZ  $\frac{1}{2}L$  = 2AS (Cor. 1. Lem. V. de Con. 224.) Ergo hæc proportio GA:AX=GS:SZ in hanc mutatur AS:AX=2AS:2AS ergo AS=AX.



297. 5<sup>o</sup>. Linea à foco S, ad curvæ punctum quodvis B ducta est æqualis lineæ DM, quæ per id punctum transit, & perpendiculariter ad axim ducitur, terminaturque hinc ab axi, illinc à Tangente GZ. Produc enim DM ad Q ubi iterum occurrit Sectioni Conicæ sitque MQ=BM, erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) ZX<sup>2</sup>:ZD<sup>2</sup>=AX<sup>2</sup>:DM x DP (five DM<sup>2</sup> — BM<sup>2</sup> per 6. 2. Elem.) sed ob Parallelas AX, SZ, MD est ZX:ZD=AS:SM & ZX<sup>2</sup>:ZD<sup>2</sup>=AS<sup>2</sup>:SM<sup>2</sup>. Ergo est AS<sup>2</sup>:SM<sup>2</sup>=AX<sup>2</sup> (five AS<sup>2</sup> per 296):DM<sup>2</sup> — BM<sup>2</sup> unde est SM<sup>2</sup>=DM<sup>2</sup> — BM<sup>2</sup> & addendo utrinque BM<sup>2</sup>, SM<sup>2</sup> + BM<sup>2</sup> (five SB<sup>2</sup> per 47. 1. Elem.) = DM<sup>2</sup> & SB=DM.

298. 6<sup>o</sup>. Si ex sectionis quovis puncto B, ducatur perpendicularis BK ad lineam GK, & linea BS ad focum, erit semper KB:BS=GA:AS, nam propter Triangula similia GMD GAX, est GM (five KB ob Parallelas GM & KB, GK & MB):MD (five BS per 297)=GA:AX (five AS per 296) hoc est KB:BS=GA:AS ideoque KB:BS=Aa:SH quoniam GA:AS=Aa:SH (per 294).

299. Conversa etiam vera est si ducatur perpendicularis in lineam GK, & in ea sumatur B, ita ut sit KB:BS=GA:AS=Aa:SH punctum B est in Sectione Conicâ descriptâ.

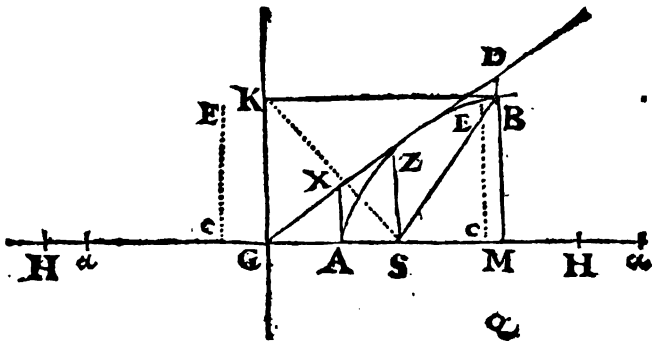
Sit enim Sectio Hyperbola aut Parabola, illa in unico puncto B secabitur per lineam KB, eritque (per 298) KB:BS=Aa:SH, dico autem nullum aliud punctum β sumi posse in ea linea KB producta si lubet, ita ut sit KB:BS=Aa:SH, fingatur enim dari illud punctum β, subtrahanturque termini duarum priorum rationum à se mutuo, erit KB — Kβ (five Bβ):BS — βS=Aa:SH sed quia in Hyperbola est Aa, minor quam SH, & in Parabola ei est æqualis, erit Bβ minor



DE MO-  
TUS COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Caf. 2.* Dato umbilico  $S$ , describenda fit trajectoria quæ rectas duas  $TR$ ,  $tr$  alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendiculara  $ST$ ,  $st$  & produc eadem ad  $V$ ,  $v$ , ut sint  $TV$ ,  $tv$ , æquales  $TS$ ,  $tS$ . Biseca  $Vv$  in  $O$ , & erige perpendiculum infinitum  $OH$ , rectamque  $VS$  infinite productam seca in  $K$  &  $k$ , ita ut fit  $VK$  ad  $KS$  &  $Vk$  ad  $kS$  ut est trajectoriæ describendæ

**axis**



nor aut æqualis differentiæ SB—S $\beta$ , sed SB $\beta$  est Triangulum, ergo absurdum est (per 20. 1. Elem.) unum ejus latus ut B $\beta$  esse minus aut æquale differentiæ aliorum, non datur ergo punctum illud  $\beta$ .

2°. Sectio sit Ellipsis; Ducatur  $SK$ , si  
 $GK$  sit æqualis semi axi minori, erit  $SK$ :  
 $GK=Aa:SH$  nam (per 295) est  $GS:cE$  (five  
 $GK$  ex Hyp.)  $=cE:S$  &  $GS^2:GK^2=cE^2:S^2$ :  
 $S:c^2$ , & componendo  $GS^2+GK^2$  (five  $SK^2$   
per 47. 1. *Elem.*):  $GK^2=cE^2+S^2$  five  
 $cA^2$  per nat. focorum:  $S:c^2$  &  $SK:GK=$   
 $cA:S$  &  $c$  & duplicando terminos posterioris  
rationis est  $SK:GK=Aa:SH$ .

Si GK sit major quàm cE erit GS<sup>2</sup>:GK<sup>2</sup> in  
 minori ratione quàm c E<sup>2</sup> ad S c<sup>2</sup>, & com-  
 ponendo erit G S<sup>2</sup> + GK<sup>2</sup> five SK<sup>2</sup> ad GK<sup>2</sup>  
 in minori ratione quàm c E<sup>2</sup> + S c<sup>2</sup> ad S K<sup>2</sup>  
 unde tandem deductur in hoc casu esse SC  
 ad GK in minori ratione quàm Aa ad SH.

Ex pariter si  $GK$  sit minor quàm  $cE$ , erit  
 $SK$  ad  $GK$  in majori ratione quàm  $Aa$  ad  $SH$ .

Sed (*per princ. Trigo.*) est in Triang. SKG,  $\sinus\ totalis\ ad\ finum\ ang.\ KSG$  (five ad  $\sinum\ anguli\ SKB$  huic  $\aequalem\ ex\ Parallelis\ GS\ KB$ ) sicut  $KS$  ad  $KG$ . Ergo ratio  $\sinus\ totalis\ ad\ fin.\ Ang.\ SKB$ ,  $\aequalis\ est\ rationi\ A\ a\ ad\ SH$ , si  $GK$  sit  $\aequalis\ c\ E$ , est illa minor si  $GK$  superet  $c\ E$ , est illa major si  $GK$  minor sit quam  $c\ E$ .

Ut verò lineæ KP B S habeant rationem A a ad SH, oportet ut in Triang. K B S, finus angulorum K S B S K B sint in eâ ratione A a ad SH; Ergo si GK sit æqualis cE, est Sinus totalis: Sin. SKB=Sin. KSB: Sin. SKB, ideoque in hoc casu erit Sin. tot = Sin. KSB, hoc est, lineæ SB erit perpendicularis in SK, unica ergo erit, unicumque punctum B, sicut etiam lineæ KB in unico puncto Sectioni Conicæ occurrit.

52

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 181

axis principalis ad umbilicorum distantiam. Super diametro  $Kk$  De Mo:  
describatur circulus secans  $OH$  in  $H$ , & umbilicis  $S, H$ , axe <sup>TU COR-</sup>  
principali ipsam  $VH$  æquante, describatur trajectoria. Dico <sup>PORUM.</sup>  
factum. Nam biseca  $Kk$  in  $X$ , & junge  $HX, HS, HV, Hv$ . <sup>LIBER</sup>  
Quoniam est  $VK$  ad  $KS$  ut  $Vk$  ad  $kS$ ; & composite ut  $VK +$  <sup>PRIMUS.</sup>  
 $Vk$  ad  $KS + kS$ ; divisimque ut  $Vk - VK$  ad  $kS - KS$ , id est,  
(<sup>m</sup>) ut  $2VX$  ad  $2KX$  &  $2KX$  ad  $2SX$ , ideoque ut  $VX$  ad  $HX$   
&  $HX$  ad  $SX$ , similia erunt triangula  $VXH, HXS$ , & prop-  
terea  $VH$  erit ad  $SH$  ut  $VX$  ad  $XH$ , ideoque ut  $VK$  ad  $KS$ .  
Habet igitur trajectoriæ descriptæ axis principalis  $VH$  eam  
rationem ad ipsius umbilicorum distantiam  $SH$ , quam habet  
trajectoriæ describendæ axis principalis ad ipsius umbilicorum  
distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum  $VH,$   
 $vH$  æquantur axi principali, &  $VS, vS$  à rectis  $TR, tr$  per-  
pendiculariter bisecentur, liquet (ex lem. xv.) rectas illas tra-  
jectoriam descriptam tangere. Q. E. F. (<sup>n</sup>)

Caf.

Si  $GK$  sit major  $cE$  est sin. totalis ad sin.  
 $SKB$  in minori ratione quam sin.  $KS B$  ad  
sin.  $SK B$ , unde sinus totalis minor esse de-  
beret sinu  $KS B$  quod quidem est absurdum,  
nulla ergo duci poterit linea  $SB$  quæ deter-  
minet punctum  $B$  tale ut sit  $KB$  ad  $SB$  sicut  
 $Aa$  ad  $SH$ , sicut etiam in eo casu linea  $KB$   
nullibi occurrit Sectioni Conicæ.

Denique si  $GK$  sit minor  $cE$ , est sin. tot.  
ad sin.  $SKB$  in majori ratione quam sinus  
 $KS B$  ad sin.  $SKB$ , dabitur ergo sinus  $KS B$ ,  
sed ut ad acutum vel obtusum angulum æ-  
qualiter pertinet duæ duci poterunt lineæ  
 $SB$  (sed non plures) quæ requiruntur cum  
 $KB$  habeant rationem, ut etiam linea  $KB$   
hoc in casu duobus in punctis Ellipsim secat.

Ergo si  $KB:BS = GA:AS = Aa:SH$   
punctum  $B$  est in Sectione Conicæ.

Ex his autem liquet curvam secundum  
Newtonianam solutionem descriptam trans-  
fere per puncta  $B$  &  $C$ , omnia enim planè  
conveniunt ad Lemmatis (293) Hypothesim.

In iis omnibus parabolam usurpamus pro

ellipsi in quâ distantia focorum infinita est,  
ac proinde axi majori æqualis.

(<sup>m</sup>) \* Id est, ut  $2VX$  ad  $2KX$ , &  
 $2KX$  ad  $2SX$ ; nam  $KX = kX = HX$  (per  
constr.) adeoque  $VK + Vk = 2VK +$   
 $2KX = 2VX$ , &  $KS + kS = Kk = Vk$   
 $- VK = 2KX$ ; & quia  $kS - KS = kX +$   
 $SX = KX + SX = KS + 2SX$ , erit  $kS$   
 $- KS = 2SX$ , adeoque  $VK:KS = VX:$   
 $HX = HX:SX$ . Quare similia erunt  
triangula  $VXH, HXS$ , quorum latera  $VX$   
&  $XH, HX$  &  $Ks$ , proportionalia com-  
munem angulum  $X$ , complectuntur.

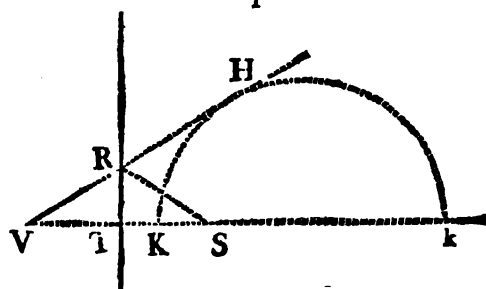
(<sup>n</sup>) \* Si describenda sit hyperbola, in  
 $SV$ , versus  $V$  productâ, ita sumantur  
puncta  $K, k$ , ut inter utrumque positum  
sit  $V$ , cæteraque fiant ut NEWTONUS præ-  
scribit, & quoniam  $VK:KS = Vk:kS$ ,  
erit  $Vk - VK:kS - KS = VK:Ks =$   
 $VK + Vk:KS + kS$ , sed  $Vk - VK =$   
 $2VX$ ,  $kS - KS = 2KX$ ,  $VK + Vk =$   
 $2KX$ ; &  $Ks + kS = 2SX$ . Reliqua  
demonstratio eadem est ac pro ellipsi.

# 182 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Caf. 3.* Dato umbilico  $S$  describenda fit trajectoria quæ rectam  $TR$  tanget in puncto dato  $R$ . In rectam  $TR$  demitte perpendicularem  $ST$ , & produc eandem ad  $V$ , ut fit  $TV$  æqualis  $ST$ . Junge  $VR$  & rectam  $VS$  infinite productam secam in  $K$  &  $k$ , ita ut fit  $VK$  ad  $SK$  &  $Vk$  ad  $Sk$  ut ellipseos describendæ

axis principalis ad distantiam umbilicorum: circuloque super diametro  $Kk$  descripto secetur producta recta  $VR$  in  $H$ , & umbilicis  $S$ ,  $H$ , axe principali rectam  $VH$  æquante, describatur tra-



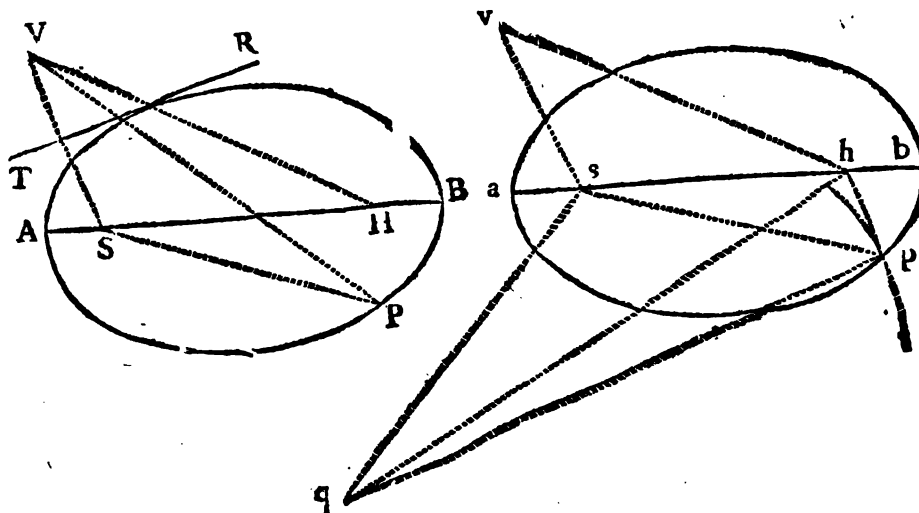
jectoria. Dico factum. Namque  $VH$  esse ad  $SH$  ut  $VK$  ad  $SK$  atque ideo ut axis principalis trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, ( $^{\circ}$ ) patet ex demonstratis in casu secundo, & propterea trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describendâ, rectam vero  $TR$  quâ angulus  $VR$  bisecatur, tangere trajectoriam in puncto  $R$ , patet ex conicis. *Q. E. D.*

*Caf. 4.* Circa umbilicum  $S$  describenda jam fit trajectoria  $APB$ , quæ tangat rectam  $TR$ , transeatque per punctum quodvis  $P$  extra tangentem datum, quæque similis sit figuræ  $aph$ , axe principali  $ab$  & umbilicis  $s$ ,  $h$  descriptæ. In tangentem  $TR$  demitte perpendiculum  $ST$ , & produc idem ad  $V$ , ut fit  $TV$  æqualis  $ST$ . Angulis autem  $SV$ ,  $SP$  fac angulos  $hsq$ ,  $shq$  æquales; centroque  $q$  & intervallo quod sit ad  $ab$  ut  $SP$  ad  $VS$  describe circulum secantem figuram  $apb$  in  $p$ . Junge  $sp$  & age  $SH$  quæ sit ad  $sh$  ut est  $SP$  ad  $sp$ , quæque angulum  $PSH$  angulo  $ps$  & angulum  $VSH$  angulo  $psq$  æquales constituat. Denique umbilicis  $S$ ,  $H$ , & axe principali  $AB$  distantiam  $VH$  æquante, describatur sectio conica. Dico factum. Nam si agatur  $sv$  quæ sit ad  $sp$  ut est  $sh$  ad  $sq$ , quæ-

( $^{\circ}$ ) \* Centro circuli literâ  $X$  notato, jungantur  $HX$ ,  $HS$ ,  $HV$ , & eadem est demonstratio quæ casus 2<sup>us</sup> pro ellipsi,

& si producatur  $RV$ ,  $SV$ , versùs  $V$ , ut punctum  $V$ ; situm sit inter  $K$  &  $k$ , eadem quoque erit demonstratio pro hyperbolâ.

que constituat angulum  $vsp$  angulo  $hsq$  & angulum  $vsh$  angulo  $psq$  æquales, triangula  $vsh$ ,  $spq$  erunt similia, & propterea  $vh$  TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



erit ad  $pq$  ut est  $sh$  ad  $sq$ , id est (ob similia triangula  $VSP$ ,  $hsq$ ) ut est  $VS$  ad  $SP$  seu  $ab$  ad  $pq$ . Æquantur ergo  $vh$  &  $ab$ . Porro (p) ob similia triangula  $VSH$ ,  $vsh$ , est  $VH$  ad  $SH$  ut  $vh$  ad  $sh$ , id est, axis conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis  $ab$  ad umbilicorum intervallum  $sh$ ; & propterea figura jam descripta similis est figuræ  $aph$ . Transiit autem hæc figura per punctum  $P$ , (q) eo quod triangulum  $PSH$  simile sit triangulo  $ps h$ ; & quia  $VH$  æquatur ipsius axi &  $VS$  bifecatur perpendiculariter à recta  $TR$ , tangit eadem rectam  $TR$ . (r) Q. E. F. L E M-

\* (p) Similia sunt triangula  $VSH$ ,  $vsh$ , nam (per constr.) angulus  $VSP = hsq = vsp$ , & angulus  $HSP = hsp$ , adeoque angulus  $VSH = vsh$ ; & præterea  $sp:sh = SP:SH$ , &  $sv:sp = sh:sq = SV:SP$ , ob similia triangula  $VSP$ ,  $hsq$ ; quare ex æquo  $sv:sh = SV:SH$ , triangula igitur  $VSH$ ,  $vsh$ , quorum latera proportionalia æquales angulos complectuntur sunt similia.

\* (q) Nam si ducatur recta  $SP$ , peri-

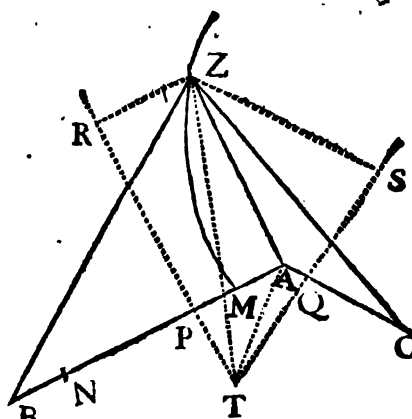
metro figuræ occurrens in  $P$ , & angulum  $PSH$ , æqualem faciens angulo  $ps h$ , patet ob similitudinem sectionum conicarum, triangula duo  $PSH$ ,  $ps h$ , fore similia; unde vicissim manifestum est punctum  $P$ , esse in perimetro figuræ, si triangulum  $PSH$ , simile sit triangulo  $ps h$ .

\* (r) Eadem est constructio ac demonstratio pro hyperbolâ, si foci  $H$ ,  $h$ , & vertices  $B$ ,  $b$ , ad contrariam partem transferantur.

## • L E M M A X V I.

*A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere  
tres rectas quarum differentia vel dantur  
vel nullæ sunt.*

*Cas. 1.* Sinto puncta illa data  $A, B, C$  & punctum quartum  $Z$ , quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum  $AZ, BZ$ , locabitur punctum  $Z$  in hyperbola cujus umbilici sunt  $A$  &  $B$ , & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille  $MN$ . Cape  $PM$  ad  $MA$  ut est  $MN$  ad  $AB$ , & erecta  $PR$  perpendiculari ad  $AB$ , demissaque  $ZR$  perpendiculari ad  $PR$ ; erit, (\*) ex naturâ hujus hyperbolæ,  $ZR$  ad  $AZ$  ut est  $MN$  ad  $AB$ . Simili discursu punctum  $Z$  locabitur in aliâ hyperbolâ, cujus umbilici sunt  $A, C$  & principalis axis differentia inter  $AZ$  &  $CZ$ , ducique potest  $QS$  ipsi  $AC$  perpendicularis, ad quam si ab hyperbolæ hujus puncto quovis  $Z$  demittatur normalis  $ZS$ , hæc fuerit ad  $AZ$  ut est differentia inter  $AZ$  &  $CZ$  ad  $AC$ . Dantur ergo rationes ipsarum  $ZR$  &  $ZS$  ad  $AZ$ , & idcirco datur earundem  $ZR$  &  $ZS$  ratio ad invicem; ideoque si rectæ  $RP, SQ$  concurrant in  $T$ , & agantur  $TZ$  &  $TA$ , figura  $TRZS$  dabitur specie, & recta  $TZ$  in qua punctum  $Z$  alicubi locatur, dabitur positione. Dabitur etiam recta  $TA$ , ut & angulus  $ATZ$ ; & ob datas rationes ipsarum  
 $AZ$



\* (\*) Erit ex naturâ hujus hyperbolæ  $ZR$ , ad  $AZ$ , ut est  $MN$ , ad  $AB$ , (298).

## 185

**TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.**

LIBER  
PRIMUS.

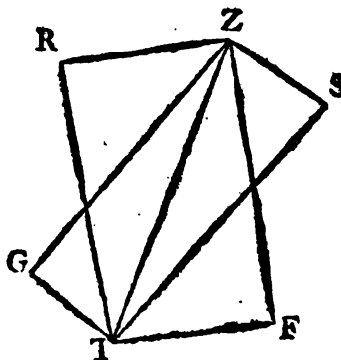
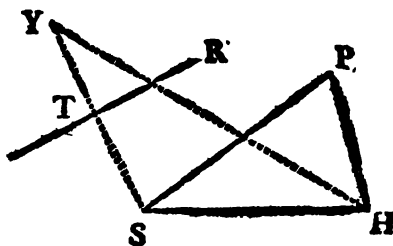
**Q. E. I.**

## Librum Tactio-

XIII.

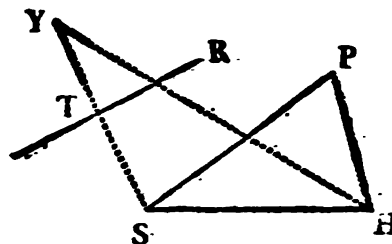
*transibit per*

diff-



# 186 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo- differentia inter  $HP$  & axem principalem. (a) Hoc modo fi  
TU COR- dentur plures tangentes  $TR$ , vel plura puncta  $P$ , devenietur  
PORUM. semper ad lineas totidem  $YH$ , vel  $PH$ , à dictis punctis  $Y$   
LIBER vel  $P$  ad umbilicum  $H$  ductas, quæ vel æquantur axibus,  
PRIMUS. vel datis longitudinibus  $SP$   
differant ab iisdem, atque ideo  
quæ vel æquantur sibi invi-  
cem, vel datas habent diffe-  
rentias; & inde, per lemma  
superius, datur umbilicus ille  
aliter  $H$ . Habitis autem um-  
bilibus una cum axis longitu-  
dine (quæ vel est  $YH$ ; vel, si trajectoria ellipsis est,  $PH+SP$ ;  
sin hyperbola,  $PH-SP$ ) habetur trajectoria. Q. E. L.

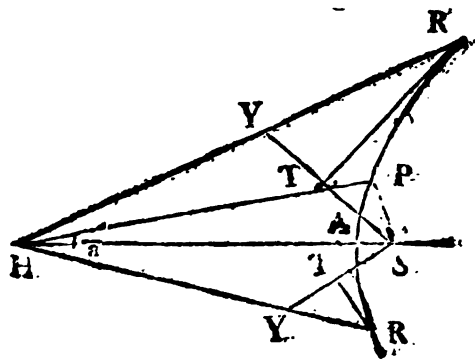


## Scholium.

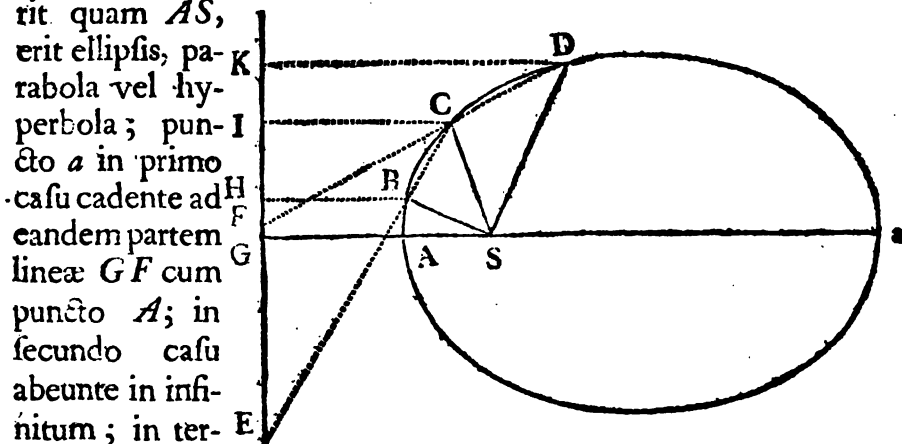
Ubi trajectoria est hyperbola, sub nomine hujus trajectoriæ oppositam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim per-  
gendo in motu suo, in oppositam hyperbolam transire non po-  
test.

Casus.

¶ (\*) 301. Si dentur tres tangentes, da-  
buntur tria puncta ut  $Y$ , ex quibus ad um-  
bilocum  $H$ , inflectendæ erunt tres rectæ  
æquales ut  $YH$ , quod fit per Cas. 3. Lem-  
matis superioris. Si duæ dentur tangen-  
tes & punctum perimetri sectionis  $P$ , da-  
buntur duo puncta ut  $Y$ , ex quibus ad um-  
bilocum  $H$ , inflectendæ erunt duæ rectæ  
æquales, & 3<sup>um</sup> punctum  $P$ , ex quo du-  
cenda  $PH$ , cujus differentia à lineâ  $YH$ ,  
est data  $SP$ . Nam in ellipsi  $PH+SP=$   
 $YH$ , adeoque  $YH-PH=SP$ ; in hy-  
perbola  $PH-SP=YH$ , unde  $PH-YH=$   
 $SP$ , estque Casus 2<sup>us</sup> Lem. XVI. Tan-  
dem si dentur tria perimetri puncta ut  $P$ ,  
locum habet Casus 1<sup>us</sup> ejusdem Lemma-  
tis.



Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta  $B, C, D$ . Junctas  $BC, CD$  produc ad  $E, F$ , ut sit  $EB$  ad  $EC$  ut  $SB$  ad  $SC$ , &  $FC$  ad  $FD$  ut  $SC$  ad  $SD$ . Ad  $EF$  ductam & productam demitte normales  $SG, BH$ , inque  $GS$  infinite productâ cape  $GA$  ad  $AS$  &  $Ga$  ad  $aS$  ut est  $HB$  ad  $BS$ ; & erit  $A$  vertex, &  $Aa$  axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut  $GA$  major, æqualis, vel minor fuerit quam  $AS$ , erit ellipsis, parabola vel hyperbola; puncto  $a$  in primo casu cadente ad eandem partem lineæ  $GF$  cum puncto  $A$ ; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ  $GF$ . Nam si demittantur ad  $GF$  perpendiculara  $CI, DK$ ; erit  $IC$  ad  $HB$  ut  $EC$  ad  $EB$ , hoc est, ut  $SC$  ad  $SB$ ; & vicissim  $IC$  ad  $SC$  ut  $HB$  ad  $SB$  sive ut  $GA$  ad  $SA$ . Et simili argumento probabitur esse  $KD$  ad  $SD$  in eâdem ratione. (\*) Jacent ergo puncta  $B, C, D$  in conicâ sectione circa umbilicum  $S$  ita descripta, ut rectæ omnes, ab umbilico  $S$  ad singula sectionis puncta ductæ, sint ad perpendiculara à punctis iisdem ad rectam  $GF$  demissa in datâ illâ ratione.



Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit clarissimus Geometra *de la Hire*, Conicorum suorum lib. VIII. prop. XXV.

S E C.

(\*) \* Jacent ergo puncta  $B, C, D$ , in Conicâ Sectione (vide n. 298.)



## S E C T I O V.

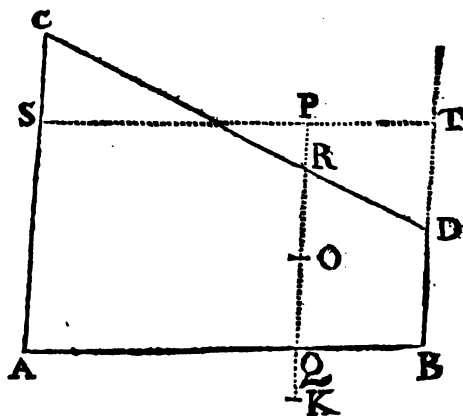
*Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.*

## L E M M A XVII.

Si à datæ conicæ sectionis puncto quovis  $P$  ad trapezii alicujus  $ABDC$ , in conicâ illâ sectione inscripti, latera quatuor infinite producta  $AB$ ,  $CD$ ,  $AC$ ,  $DB$  totidem rectæ  $PQ$ ,  $PR$ ,  $PS$ ,  $PT$  in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera  $PQ \times PR$ , erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita  $PS \times PT$  in datâ ratione.

*Cas. 1.* Pōnamus primò lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà  $PQ$  &  $PR$  lateri  $AC$ , &  $PS$  ac  $PT$  lateri  $AB$ . Sintque insuper latera duo ex oppositis, putà  $AC$  &  $BD$ , sibi invicem parallela. Et recta, quæ bisecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ sectionis, & bisecabit etiam

$RQ$ . Sit  $O$  punctum in quo  $RQ$  bisecatur, & erit  $PO$  ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc  $PO$  ad  $K$ , ut sit  $OK$  æqualis  $PO$ , & erit  $OK$  ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta  $A$ ,  $B$ ,  $P$  &  $K$  sint ad conicam sectionem, &  $PK$  secet  $AB$  in dato angulo, erit (per prop.



17, 19, 21 & 23. lib. III. Conicorum Apollonii) rectangulum  $PQK$  ad rectangulum  $AQB$  in datâ ratione. (†) Sed  $QK$  &  $PR$  æqua-

(†) Erit Rectangulum  $PQK$  ad Rectangulum  $AQB$  in datâ ratione. Liqueat (per

Lem. III. de Conic.) quod si linea quævis in Sectione Conicâ terminata ut  $P, K$  secet aliam

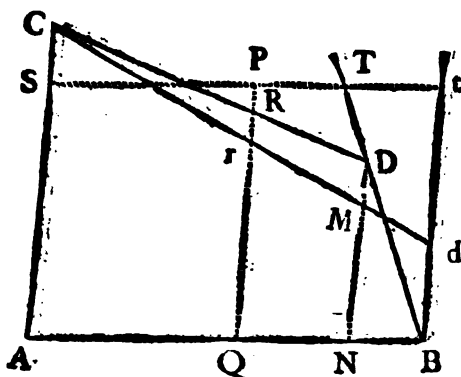
# PRINCIPIA MATHEMATICA. 189

æquales sunt, utpote æqualium  $OK$ ,  $OP$ , &  $OQ$ ,  $OR$  differentia, & inde etiam rectangula  $PQK$  &  $PQ \times PR$  æqualia sunt; atque ideo rectangulum  $PQ \times PR$  est ad rectangulum  $AQB$ , hoc est ad rectangulum  $PS \times PT$  in datâ ratione. *Q. E. D.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS

*Cas. 2.* Ponamus jam trapezii latera opposita  $AC$  &  $BD$  non esse parallela. Age  $Bd$  parallelam  $AC$  & occurrentem tum rectæ  $ST$  in  $r$ ; tum conicæ sectioni in  $d$ . Junge  $Cd$  secantem

$PQ$  in  $r$ , & ipsi  $PQ$  parallelam age  $DM$  secantem  $Cd$  in  $M$  &  $AB$  in  $N$ . Jam ob similia triangula  $BT$ ,  $DBN$ ; est  $Bt$  seu  $PQ$  ad  $Tt$  ut  $DN$  ad  $NB$ . Sic & (2)  $Rr$  est ad  $AQ$  seu  $PS$  ut  $DM$  ad  $AN$ . Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectan-



gulum  $PQ$  in  $Rr$  est ad rectangulum  $PS$  in  $Tt$ , ita rectangulum  $NDM$  est ad rectangulum  $ANB$ , & (per *cas. 1.*) ita rectangulum  $PQ$  in  $Pr$  est ad rectangulum  $PS$  in  $Pt$ , (†) ac divisim ita rectangulum  $PQ \times PR$  est ad rectangulum  $PS \times PT$ . *Q. E. D.*

*Cas.*

aliam lineam etiam in Sectione Conicâ terminatam ut  $AB$ , Rectangulum partium lineæ  $PK$  erit ad Rectangulum partium lineæ  $AB$  ut Rectangulum partium lineæ cujuscvis alius Parallelæ lineæ  $PK$  & ad Sectionem terminatæ, ad Rectangulum partium quas hæc nova linea secat in lineâ  $AB$ : ideo ubicumque sit punctum  $P$  Rectangula  $PQK$  &  $AQB$  erunt in eadem datâ ratione.

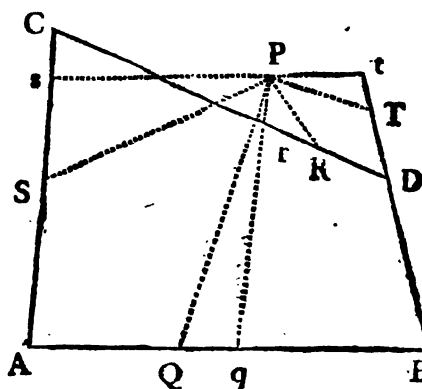
(2) \*  $Rr: AQ$  seu  $PS = DM: AN$ . Sunt enim propter parallelas  $Rr$ ,  $DM$ ,

triangula  $rCR$  &  $MCD$  similia; ideoque  $Rr: DM = Cr: CM$ ; sed est  $Cr: CM = AQ$  vel  $PS: AN$ ; ergo  $Rr: DM = AQ$  vel  $PS: AN$  &  $Rr: PS = DM: AN$ .

(†) \* Ac divisim, Ex Demonstratis  $NDM: ANB = PQ \times Rr: PS \times Tt = PQ \times Pr: PS \times Pt$ , & divisim  $NDM: ANB = PQ \times Pr: PQ \times Rr: PS \times Pt = BS \times Tt = PQ \times PR: PS \times PT$ , sed ratio  $NDM$  ad  $ANB$  data est, ergo & ratio  $PQ \times PR$  ad  $PS \times PT$ .

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Caf. 3.* Ponamus denique lineas quatuor  $PQ$ ,  $PR$ ,  $PS$ ,  $PT$  non esse parallelas lateribus  $AC$ ,  $AB$ , sed ad ea utcumque inclinatas. Earum vice age  $Pq$ ,  $Pr$  parallelas ipsi  $AC$ ; &  $Ps$ ,  $Pt$  parallelas ipsi  $AB$ ; & propter datos angulos triangulorum  $PQq$ ,  $PRr$ ,  $PSs$ ,  $PTt$ , dabuntur rationes  $PQ$  ad  $Pq$ ,  $PR$  ad  $Pr$ ,  $PS$  ad  $Ps$ , &  $PT$  ad  $Pt$ ; atque ideo rationes compositæ  $PQ \times PR$  ad  $Pq \times Pr$ , &  $PS \times PT$  ad  $Ps \times Pt$ . Sed, per superius demonstrata, ratio  $Pq \times PR$  ad  $Ps \times Pt$  data est: ergo & ratio  $PQ \times PR$  ad  $PS \times PT$ . Q. E. D.



### LEMMA XVIII.

*Isdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera trapezii  $PQ \times PR$  sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera  $PS \times PT$  in datâ ratione; punctum  $P$ , à quo lineæ ducuntur, tanget conicam sectionem circa trapezium descriptam.*

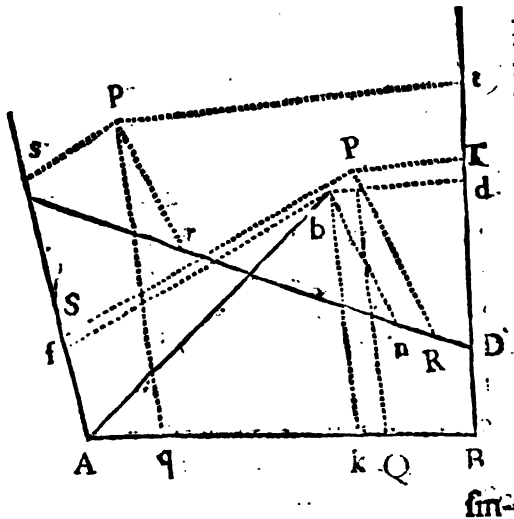
Per puncta  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  & aliquod infinitorum punctorum  $P$ , putà  $p$ , concipe conicam sectionem describi: dico punctum  $P$  hanc semper tangere. Si negas, junge  $AP$  secantem hanc conicam sectionem alibi quam in  $P$ , si fieri potest, putà in  $b$ . Ergo si ab his punctis  $p$  &  $b$  ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ  $pq$ ,  $pr$ ,  $ps$ ,  $pt$  &  $bk$ ,  $bn$ ,  $bf$ ,  $bd$ ; erit ut  $bk \times bn$  ad  $bf \times bd$  ita (per lem. xvii.)  $pq \times pr$  ad  $ps \times pt$ , & ita (per hypoth.)  $PQ \times PR$  ad  $PS \times PT$ . Est & propter similitudinem trapeziorum  $bkAf$ ,  $PQAS$ , ut  $bk$  ad  $bf$  ita  $PQ$  ad  $PS$ . Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit  $bn$  ad  $bd$  ut  $PR$  ad  $PT$ . (†) Ergo trapezia æquiangula  $Dnbd$ ,  $DRPT$  similia

(†) \* Cum sit  $bk \times bn : bf \times db = PQ \times PR : PS \times PT$

item  $bf : bk = PS : PQ$   
erit  $bn : bd = PR : PT$

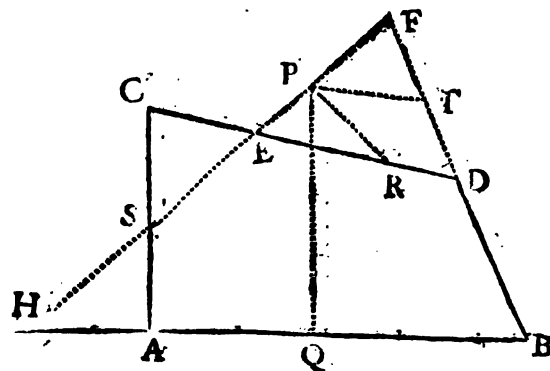
similia sunt, & <sup>(a)</sup> eorum diagonales  $Db$ ,  $DP$  propterea coincidunt. Incidit itaque  $b$  in intersectionem rectarum  $AP$ ,  $DP$  ideoque coincidit cum puncto  $P$ . Quare punctam  $P$ , ubicunque sumatur, incidit in assignatam conicam sectionem. *Q. E. D.* <sup>(b)</sup>

*Corol.* Hinc si rectæ tres  $PQ$ ,  $PR$ ,  $PS$  à puncto communi  $P$  ad alias totidem positione datas rectas  $AB$ ,  $CD$ ,



<sup>(a)</sup> Ergò trapezia æquiangula  $Dnb d$ ,  $D'RPT$ , similia sunt, & eorum diagonales  $Dd$ ,  $DP$ , propterea coincidunt; nam jungantur  $nd$ ,  $RT$ , & duo triangula  $ndb$ ,  $RTP$ , æquiangula erunt ob latera  $bn$ ,  $bd$ , &  $PR$ ,  $PT$  & proportionalia, & angulos  $nb d$ ,  $RPT$ , æquales; quare & duo triangula  $nd D$ ,  $RTD$ ; æquiangula erunt ob angulum  $D$ , communem, & angulos ad  $T$  &  $t$ ,  $R$  &  $n$ , æquales, erit igitur  $bn : nD = PR : RD$ , adeoque ductis diagonalibus  $Db$ ,  $DP$ , duo triangula  $bDn$ ,  $PDR$ , erunt similia, ac proinde angulus  $PDR$ , æqualis angulo  $bDn$ , quod esse non potest, nisi diagonales  $Db$ ,  $DP$ , coincidunt.

<sup>(b)</sup> 302. Lemma XVIII. per analysim facile demonstrari potest. Producta enim  $PS$ , donec singulis trapezii lateribus occurrat in  $F$ ,  $E$ ,  $S$ ,  $H$ , ob datos omnes angulos figuræ, data erit ratio laterum quibus singula triangula  $FPT$ ,  $FED$ ,  $PER$ ,  $ECS$ ,  $SHA$ ,  $PHQ$ , clauduntur. Assumptis igitur  $CE$ , tanquam abscissa &  $PE$  tanquam ordinatâ loci punctorum  $P$ , data erit ratio  $PE$ , ad  $PR$ , adeoque  $PE$ , in datam quantitatem ducta æquabitur ipsi  $PR$ ; ob datam  $CD$ , invenietur  $ED$ , ut pote æqualis  $CD - CE$ , & per triangulum  $FED$  specie datum

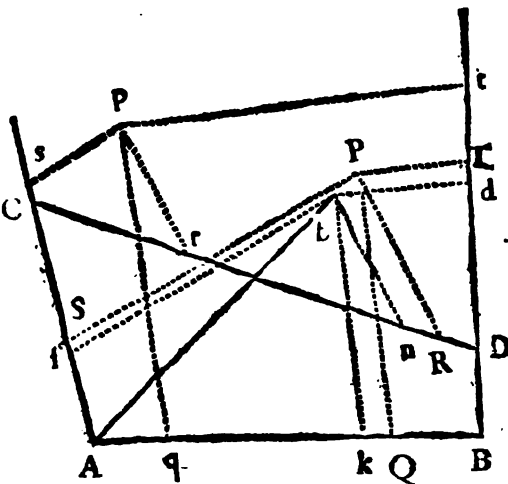


invenietur  $EF$ , ac proinde  $PF = EF - EP$ , & inde per triangulum  $EPT$ , invenietur  $PT$ , omnesque illæ lineæ exprimentur per lineas  $CE$ ,  $PE$ , unius dimensionis, & alias datas quantitates. Similiter  $ES$  &  $CS$  &  $SA = CA - CS$ , atque  $HS$ , per triangulum  $SAH$ , specie datum, & hinc  $PH = HS + SE + EP$ , adeoque  $PQ$ , per triangulum  $PHQ$ , invenientur in lineis  $CE$  &  $PE$ , unius dimensionis & aliis datis quantitatibus. Quare in rectangulis  $PQ \times PR$ ,  $PS \times PT$ , rectæ variables  $CE$ ,  $PE$ , non plures quam duas dimensiones obtinebunt, unde æquatio quæ ex rectangulo-

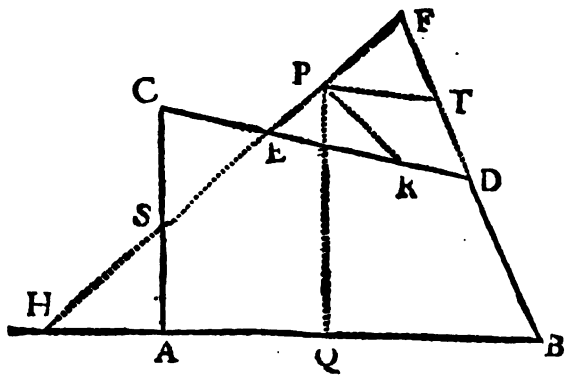
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

singulæ ad singulas, in datis  
 angulis ducantur, sitque  
 rectangulum sub duabus du-  
 ctis ( $^c$ )  $PQ \times PR$  ad quadra-  
 tum tertiæ  $PS$  in datâ ratio-  
 ne: punctum  $P$ , à quibus  
 rectæ ducuntur, locabitur in  
 sectione conicâ quæ tangit  
 lineas  $AB$ ,  $CD$  in  $A$  &  $C$ ;  
 & contra. Nam coeat li-  
 nea  $BD$  cum lineâ  $AC$ ,  
 manente positione trium  
 $AB$ ,  $CD$ ,  $AC$ , dein coeat  
 etiam linea  $PT$  cum lineâ  $PS$ :

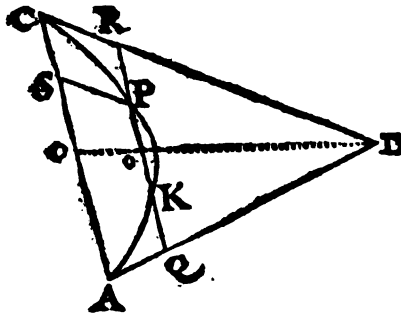
& rectangulum  $PS \times PT$  evadet  $PS$  quad. rectæque  $AB, CD$ ,  
. quæ



idem pari argumento respectu punctorum  
A, B, reperitur, si ponatur  $AQ = 0$  vel  
 $AQ = AB$ .



gulorum illorum ratione datâ reperitur secundum gradum non superabit; Cum igitur, ut vulgè notum est, æquationis quadraticæ locus sit Sectio conicæ, patet locum punctorum P, esse ad sectionem conicam. Quod autem sectio illa per puncta C, D, P, A, transeat inito calculo facillè ostenditur, nam si in æquatione loci ponatur  $CE = 0$ , invenietur valor unus ipsius  $PE = 0$ , adeoque punctum P, cadit in C, si ponatur  $CE = CD$ , invenietur quoque valor unus  $PE = 0$ , ac proinde punctum P, cum puncto D, coincidit;



(c) *Hinc si rectæ tres &c. Sint tres lineæ AB, CD, AC positione datæ, & lineæ AB, CD tangent sectionem conicam in A & C, & à puncto communi P ducantur tres Rectæ PQ, PR, PS in datis angulis ad singulas AB, CD, AC erit  $PQ \times PR$  in ratione datâ ad quadratum tertię PS: Sit enim PS parallela lineæ DC & sint RP, PQ parallelæ lineæ CA utque PK chorda Sectionis, sumatur mediana*

quæ curvam in punctis  $A$  &  $B$ ,  $C$  &  $D$  secabant, jam (†) curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantum tangent.

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.

*Scholium.*

Nomen conicæ sectionis in hoc lemmate latè sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem conï transiens, quam circulari basi parallela includatur. (d) Nam si punctum  $p$  incidit in rectam, quâ puncta  $A$  &  $D$  vel  $C$  &  $B$  junguntur, conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum  $p$  incidit, & altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquantur duobus rectis, & lineæ quatuor  $PQ$ ,  $PR$ ,  $PS$ ,  $PT$  ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibuscvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis  $PQ \times PR$  æquale rectangulo sub duabus aliis  $PS \times PT$ , sectio conica eva-

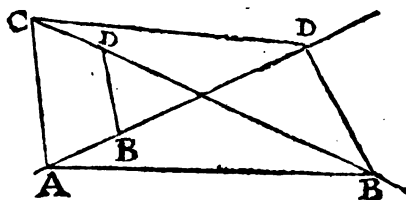
dium  $O$  chordæ  $AC$  ducaturque per punctum  $D$ ,  $DO$ , quæ secabit tam chordam  $PK$  quam totam  $RQ$  in medio (vide Lem. IV. de Conic. n. 224.) hinc erit  $RK = PQ$ , sed est (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.)  $CR^2$  ad  $RP \times RK$  in datâ ratione, ideoque est  $CR^2$  ad  $RP \times PQ$  in datâ ratione, sed ob parallelas  $CR$   $SP$  &  $C$   $RP$  est  $PS = CR$ , ergo  $PS^2$  est ad  $RP \times PQ$  in datâ ratione.

Si lineæ  $PS$ ,  $RP$ ,  $PQ$  in aliis sed datis angulis ad lineas  $AC$   $CD$   $AD$  inclinentur, dabuntur earum rationes ad has priores, unde deducetur eodem modo ac in Lemmate XVII, in isto etiam casu fore  $SP^2$  ad  $RP \times PQ$  in datâ ratione.

Pariter & conversâ demonstrabitur ut Lemm. XVIII.

(†) \* Jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantum tangent; puncta enim  $A$  &  $B$ ,  $C$  &  $D$ , temper supponuntur in conicæ sectionis perimetro posita; quare evanescen-  
tibus distantis  $AB$  &  $CD$ , lineæ  $AB$  &  $CD$ , ultimò coincidunt cum tangentibus sectionem in punctis  $A$  &  $C$ . Vid. Lem. VI. NEWTON.

Tom. I.

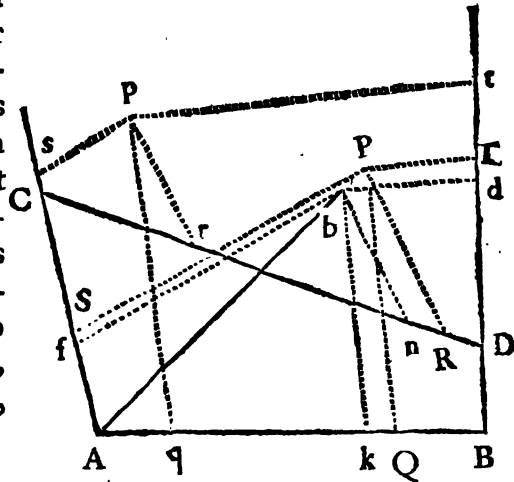


(d) 303. Puncta quatuor  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $C$ , sint in perimetro hyperbolæ vel in perimetris duarum hyperbolarum oppositarum, planum sectionis quo hyperbola in cono generatur accedat ad conï verticem; hyperbolæ in triangula rectilinea mutantur quæ erunt loca punctorum  $P$ , & quorum latera vel coincidunt cum duobus trapezii lateribus vel sunt ipsius diagonales, ac proinde punctum  $P$ , incidit in rectam quâ quævis ex punctis quatuor  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , junguntur & conica sectio vertitur in geminas rectas quarum una est recta illa in quâ punctum  $P$  incidit & altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur.

B b

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

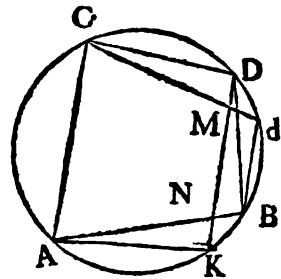
evadet circulus. (e) Idem fiet, si lineæ quatuor ducantur in angulis quibuscvis, & rectangulum sub duabus ductis  $PQ \times PR$  sit ad rectangulum sub aliis duabus  $PS \times PT$  ut rectangulum sub sinubus angulorum  $S, T$ , in quibus duæ ultimæ  $PS, PT$  ducuntur, ad rectangulum sub sinubus angulorum  $Q, R$ , in quibus duæ primæ  $PQ,$



$PR,$

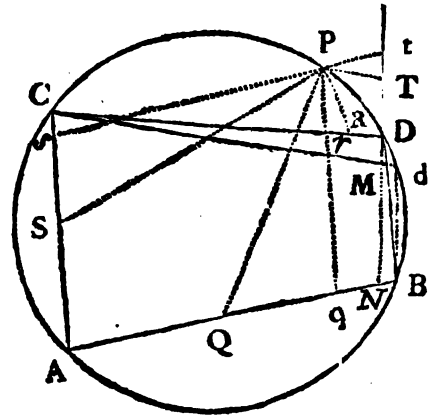
(e) 304. Sectio Conica evadet circu-

lus. Si ex trapezii  $ABDC$  circulo inscripti angulo quovis  $D$ , agatur recta  $DN$ , lateri  $AC$  parallela, & lateri  $AB$  occurrens in  $N$ , deinde ex altero angulo  $B$ ,



ducatur  $Bd$ , lateri  $AC$  parallela circulo occurrens in  $d$ , jungaturque  $Cd$  rectam  $DN$ , secans in  $N$ , erit  $DN \times DM = AN \times NB$ . Nam jungatur  $AK$ , & quoniam arcus  $CD$ , &  $AK$ ,  $DJ$ , &  $KB$ , inter easdem parallelas intercepti æquales sunt, anguli  $DCd$ , &  $BAK$ ,  $CDK$  &  $AKD$ , iis arcibus insistentes & æqualium arcuum chordæ  $CD$ ,  $AK$ , æquantur; quare triangula  $AKN$ ,  $CDM$ , similia & æqualia sunt; est igitur  $DM = NK$ ; sed ex naturâ circuli  $AN \times NB = KN \times DN$ , ergo  $AN \times NB = DM \times DN$ .

305. Si ergo sectio conica trapezio circumscripta vertatur in circulum, hoc est, si sectionis planum basi conî fiat parallelum, erit rectangulum  $PQ \times PR$  ad rectangu-



lum  $PS \times PT$ , ut rectangulum sub sinubus angulorum  $S, T$ , ad rectangulum sub sinubus angulorum  $Q, R$ ... *Dem...* factâ constructione Cas. 3<sup>ti</sup> Lem. XVII. agatur recta  $D'N$ ,  $Bd$ , lateri  $AC$  parallela, ut in articulo superiori; & erit per demonstrationem casus 2<sup>ti</sup> Lem. XVII.,  $ND \times DM : AN \times NB = PQ \times PR : Ps \times Pt$ , hoc est (304)  $PQ \times PR = Ps \times Pt$ . Jam verò angulorum sinubus litterâ  $S$  designatis

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 195

*PR*, ducuntur. (f) Cæteris in casibus locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur sectiones conicæ. (g) Vice autem trapezii *ABCD* substitui potest quadrilaterum, cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & è punctis quatuor *A, B, C, D* possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

L E M-

signatis erit  $S. PqA = S. CAB, \& S. PrC = S. ACD$ , ob parallelas  $Pq, AC$ , &  $S. PsS = S. PsC = S. CAB, \& S. PtT = S. ABD$ , ob parallelas  $st, AB$ , & ob angulum  $ACD$  complementum anguli  $ABD$  ad duos rectos,  $S. PtT = S. ACD$ .

Porro

$PQ:Pq = S. PqA (S. CAB):S. PQB$   
 $Ps:PS = S. PSC:S. PsS (S. CAB)$   
 $PR:Pr = S. PrC (S. ACD):S. PRC$   
 $Pt:PT = S. PtT:S. PtT (S. ACD)$

Ergo per compositionem rationum

$PQ \times PR \times Ps \times Pt : PS \times PT \times Pq \times Pr = PQ \times PR : PS \times PT$

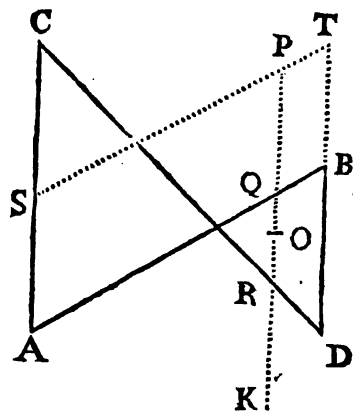
$= S. PSC \times S. PtT : S. PQB \times S. PRC$

Q. e. D.

306. Coroll... Eadem manente proportionem, si omnes anguli ad  $S, T, Q, R$ , fuerint æquales rectangulum  $PQ \times PR$ , erit quoque æquale rectangulo  $PS \times PT$ .

(f) \* Nam vel punctum  $P$ , locabitur in sectione rectilinea per verticem conicæ transeunte, vel in circulo, vel tandem in aliqua trium sectionum conicarum, nullæ enim aliæ sunt sectiones conicæ, ut notum est.

(g) 307. Vice autem trapezii substitui potest quadrilaterum  $ABDC$ , cujus latera duo  $AB, CD$ , se mutuo instar diagonalium decussant; huic enim quadrilatero absque mutatione aptari possunt tam constructiones quam demonstrationes Lemmatum XVII. & XVIII. Exemplum fit

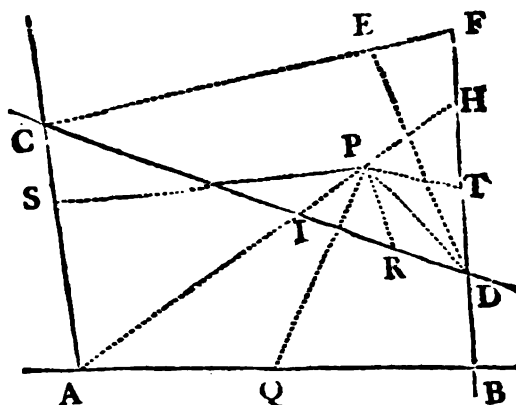


Caf. 1. Lem. XVII. Ponamus lineas ex puncto  $P$ , ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta  $PQ \& PR$ , lateri  $AC \& PS$ , ac  $PT$ , lateri  $AB$ ; sintque insuper latera duo ex oppositis puta  $AC \& BD$ , sibi invicem parallela & recta quæ biecat &c. cæteræ omnes demonstrationis partes eodem modo transferuntur ad quadrilaterum  $CABD$ .



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Invenire punctum  $P$ , à quo si rectæ quatuor  $PQ$ ,  $PR$ ,  $PS$ ,  $PT$  ad alias totidem positione datas rectas  $AB$ ,  $CD$ ,  $AC$ ,  $BD$ , singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis,  $PQ \times PR$ , sit ad rectangulum sub aliis duabus,  $PS \times PT$ , in datâ ratione.



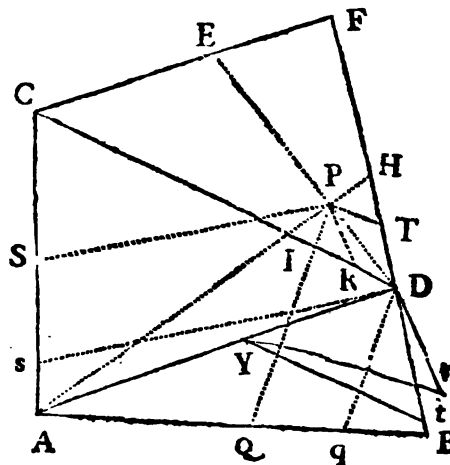
Lineæ  $AB$ ,  $CD$ , ad quas rectæ duæ  $PQ$ ,  $PR$  unum rectangulorum continentes ducuntur, convenient cum aliis duabus positione datis lineis in punctis  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Ab eorum aliquo  $A$  age rectam quamlibet  $AH$ , in quâ velis punctum  $P$  reperiri. Secet ea lineas oppositas  $BD$ ,  $CD$ , nimirum  $BD$  in  $G$  &  $CD$  in  $I$ , & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes  $PQ$  ad  $PA$  &  $PA$  ad  $PS$ , ideoque ratio  $PQ$  ad  $PS$ . Auferendo hanc à datâ ratione  $PQ \times PR$  ad  $PS \times PT$ , dabitur ratio  $PR$  ad  $PT$ , & addendo datas rationes  $PI$  ad  $PR$ , &  $PT$  ad  $PH$  dabitur ratio  $PI$  ad  $PH$ , atque ideo punctum  $P$ . *Q. E. I.*

*Corol. 1.* Hinc <sup>(h)</sup> etiam ad loci punctorum infinitorum  $P$ .

(h) 308. Minima sit punctorum  $P$ ,  $D$ , distantia  $PD$ , agantur  $Ds$ ,  $Dq$ , ad  $AC$ ,  $AB$ , in angulis datis  $PSC$ ,  $PQA$ , & iunctâ  $AD$ , ex illius quovis puncto  $Y$ , ducantur  $Yr$ , lateri  $CD$ , parallela, &  $Yt$ , ad  $DB$ , in angulo dato  $PTH$ ; tum ex puncto  $D$ , ad  $Yr$ , ducatur  $Dr$ , in angulo dato  $PRI$ ; punctis  $P$ ,  $D$ , coeuntibus erit  $PQ:PA=Dq:DA$ , &  $PA:PS=DA:Ds$ , adeoque  $PQ:PS=Dq:Ds$ , & proinde  $PQ \times PR:PS \times PT=Dq \times PR:Ds \times PT$ . Ratio data rectanguli  $PQ \times PR$  ad  $PS \times PT$  sit  $A$  ad  $B$ , & erit  $Dq \times PR:Ds \times PT=A:B$ , adeoque

$PR:PT=A \times Ds:B \times Dq$   
& evanescente  $PD$ , ob similia triangula  $PIR$ ,  $DYr$ , erit

$$PI:PR=DY:Ds.$$



## 197

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

$$\frac{BGq}{AG}$$

(k) 309. Locus omnium punctorum P, est aliqua ex quinque confectionibus, per Lem. XVIII & ipsius scholium. Si locus  
B b 3 fue-

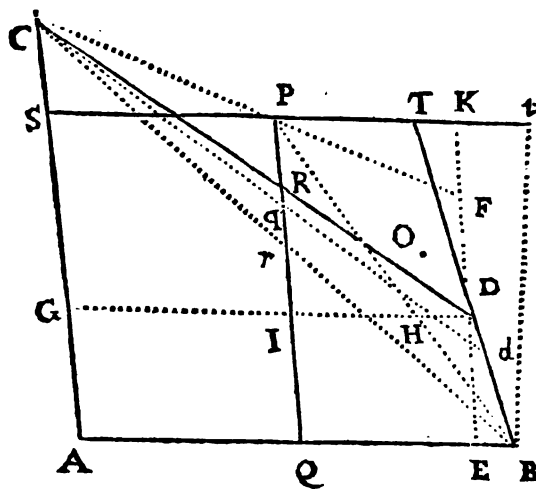
# 198 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

De Mo- Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide*  
TU COR- incepti & ab *Appollonio* continuati non calculus, sed compo-  
PORUM. sitio geometrica, qualem veteres quærebant, in hoc corollario  
LIBER exhibitur. <sup>(1)</sup>  
PRIMUS.

## LEMMA XX.

Si parallelogrammum quodvis *ASPQ* angulis duobus oppositis *A* & *P* tangit sectionem quamvis conicam in punctis *A* & *P*; & lateribus unius angulorum illorum infinite productis *AQ*, *AS* occurrit eidem sectioni conicæ in *B* & *C*; à punctis autem occursum *B* & *C* ad quintum quodvis sectionis conicæ punctum *D* agantur rectæ duæ *BD*, *CD* occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus *PS*, *PQ* in *T* & *R*: erunt semper abscissæ laterum partes *PR* & *PT* ad invicem in datâ ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in datâ ratione, punctum *D* tanget sectionem conicam per puncta quatuor *A*, *B*, *C*, *P* transeuntem.

Cas. 1. Jungantur *BP*, *CP* & à puncto *D* agantur rectæ duæ *DG*, *DE*, quarum prior *DG* ipsi *AB* parallela sit & occurrat *PB*, *PQ*, *CA* in *H*, *I*, *G*; altera *DE* parallela sit ipsi *AC* & occurrat *PC*, *PS*, *AB* in *F*, *K*, *E*: & erit (per lem. xvii.) rectangulum *DE* × *DF* ad rectangulum *DG* × *DH*



fuert linea recta ac proinde tangens ipsa *AE*, (303) recta *BF*, tangenti parallela nullibi occurret loco; si verò locus fuerit alia conicæ sectio, recta *BF*, huic sectioni occurret in puncto aliquo *F*, tumque diameter *AG*, vel utrinque terminabitur ad hyperbolas oppositas, quo casu, puncta *A* & *H*, sita erunt ad easdem partes ipsius *G*, vel claudetur Ellipsi aut circulo, & punctum *G*, inter *A* & *H* positum erit,

vel tandem nullibi occurret loco qui proinde erit parabola. Porro datis sectionis conicæ vertice, diametro, hujus latere recto ac ordinarum angulo sectio describi potest (per prop. 52. 53. 54. 55. lib. 1. Conic. *Apoll.* sive ex iis quæ in notâ 224. de Conicis tradita fuere).

(1) \* Hoc veterum problema primus in sua Geometria *Cartesius* per calculum analyticum generaliter resolvit.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 199

in ratione datâ. Sed est  $PQ$  ad  $DE$  (feu  $IQ$ ) ut  $PB$  ad  $DE$  <sup>Mo-</sup>  
 $HB$ . ideoque ut  $PT$  ad  $DH$ ; & vicissim  $PQ$  ad  $PT$  ut  $DE$  <sup>TU COR-</sup>  
ad  $DH$ . Est &  $PR$  ad  $DF$  ut  $RC$  ad  $DC$ , ideoque ut  $(IG$  <sup>PORUM.</sup>  
vel)  $PS$  ad  $DG$ , & vicissim  $PR$  ad  $PS$  ut  $DF$  ad  $DG$ ; & <sup>I</sup>BER  
<sup>PRIMUS.</sup> conjunctis rationibus fit rectangulum  $PQ \times PR$  ad rectangulum  
 $PS \times PT$  ut rectangulum  $DE \times DF$  ad rectangulum  $DG \times DH$ ,  
atque ideo in datâ ratione. Sed dantur  $PQ$  &  $PS$ , & prop-  
terea ratio  $PR$  ad  $PT$  datur. *Q. E. D.*

*Cas. 2.* Quod si  $PR$  &  $PT$  ponantur in datâ ratione ad invi-  
cem, (<sup>m</sup>) tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectan-  
gulum  $DE \times DF$  ad rectangulum  $DG \times DH$  in ratione datâ, ideo-  
que punctum  $D$  (*per lem. xviii.*) contingere conicam sectionem  
transcurrentem per puncta  $A, B, C, P$ . *Q. E. D.*

*Corol. 1.* Hinc si agatur  $BC$  secans  $PQ$  in  $r$ , & in  $PT$  ca-  
piatur  $Pt$  in ratione ad  $Pr$  quam habet  $PT$  ad  $PR$ : erit  
 $Bt$  tangens conicæ sectionis ad punctum  $B$ . Nam concipe  
punctum  $D$  coire cum puncto  $B$ , ita ut chordâ  $BD$  evanes-  
cente,  $BT$  tangens evadat; &  $CD$  ac  $BT$  coincident cum  
 $CB$  &  $Bt$ .

*Corol. 2.* Et vice versâ si  $Bt$  sit tangens, & ad quodvis  
conicæ sectionis punctum  $D$  convenient  $BD, CD$ ; erit  $PR$   
ad  $PT$  ut  $Pr$  ad  $Pt$ . Et contra, si sit  $PR$  ad  $PT$  ut  $Pr$   
ad  $Pt$ : convenient,  $BD, CD$  ad conicæ sectionis punctum  
aliquod  $D$ .

*Corol. 3.* Conica sectio non secat conicam sectionem in pun-  
ctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ  
conicæ sectiones per quinque puncta  $A, B, C, P, O$ ; easque  
fecet recta  $BD$  in punctis  $D, d$ , & ipsam  $PQ$  fecet recta  $Cd$   
in  $q$ . Ergo  $PR$  est ad  $PT$  ut  $Pq$  ad  $PT$ ; (<sup>n</sup>) unde  $PR$  &  
 $Pq$  sibi invicem æquantur, contra hypothesin. LEM-

(<sup>m</sup>) \* Nam si  $PR$  &  $PT$  ponantur  
in ratione datâ, erit quoque ob datas  $PQ,$   
 $PS$ , rectangulum  $PQ \times PR$ , ad rectan-  
gulum  $PS \times PT$ , in ratione datâ; sed per  
demonstrata in 1<sup>o</sup> casu  $PQ \times PR : PS \times$   
 $PT = DE \times DF : DH \times DG$ ; ergo  $DE \times$   
 $DF$  ad  $DH \times DG$  in ratione datâ.

(<sup>n</sup>) \* Cum enim duæ sectiones coni-  
cæ se mutuo intersecant in punctis  $O$  &  $B$ ,

(*per hyp.*) duci poterit recta  $BD$ , quæ  
duos sectionum arcus in  $B$  &  $O$  conve-  
nientes secet in punctis duobus, eritque  
*per coroll. 1. Lem. XX.*  $PR : PT =$   
 $Pr : Pt = Pq : PT$ , adeoque  $PR : PT$   
 $= Pq : PT$ , unde  $PR$  &  $Pq$  sibi invi-  
cem æquantur, ac proinde  $Cd$ , coincidet  
cum  $CD$ , & punctum  $d$ , cum puncto  $D$ ,  
(*contra hyp.*).

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

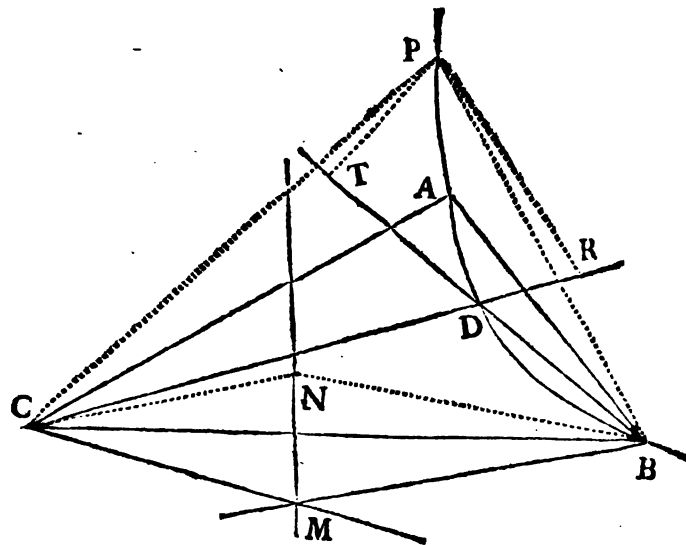
LIBER

PRIMUS.

# LEMMA XXI.

*Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM per data puncta B, C cen polos ductæ, concursu suo M describant tertiam positione datam rectam MN; & aliæ duæ infinitæ rectæ BD, CD, cum prioribus duabus ad puncta illa data B, C datos angulos MBD, MCD efficientes ducantur: dico quod hæ duæ BD, CD concursu suo D describent sectionem conicam per puncta B, C transeuntem. Et vice versâ, si rectæ BD, CD concursu suo D describant sectionem conicam per data puncta B, C, A transeuntem, & sit angulus DBM semper æqualis angulo dato ABC, angulusque DCM semper æqualis angulo dato ACB: punctum M contingeret rectam positione datam.*

Nam in rectâ MN detur punctum N, & ubi punctum mobile M incidit in immotum N; incidat punctum mobile D in im-



motum P. Junge CN, BN, CP, BP, & a puncto P age rectas PT, PR occurrentes ipsis BD, CD in T & R, & facientes an-

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 201

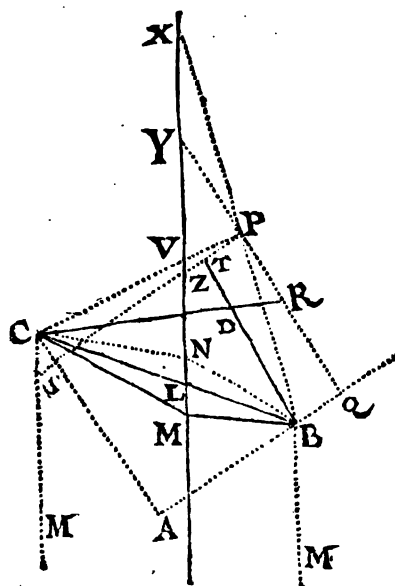
angulum  $BPT$  æqualem angulo dato  $BNM$ , & angulum  $CPR$  æqualem angulo dato  $CNM$ . Cum ergo (ex hypothesi) æquales sint anguli  $MBD$ ,  $NBP$ , ut & anguli  $MCD$ ,  $NCP$ ; aufer communes  $NBD$  &  $NCD$ , & restabunt æquales  $NBM$  &  $PBT$ ,  $NCN$  &  $PCR$ : ideoque triangu-  
la  $NBM$ ,  $PBT$  similia sunt, ut & triangu-  
la  $NCM$ ,  $PCR$ . Quare  $PT$  est ad  $NM$  ut  $PB$  ad  $NB$ , &  $PR$  ad  $NM$  ut  $PC$  ad  $NC$ . Sunt autem puncta  $B$ ,  $C$ ,  $N$ ,  $P$  immobilia. Ergo  $PT$  &  $PR$  datam habent rationem ad  $NM$ , proindeque datam rationem inter se; atque ideo (per lem. xx. (°)) punctum  $D$ , perpetuus rectarum mobilium  $BT$  &  $CR$  concursus, contingit sectionem conicam, per puncta  $B$ ,  $C$ ,  $P$  transeuntem.  $Q. E. D.$  Et

(o) Atque ideo per Lemma XX. &c. ut pateat Lemma XX. ad hanc demonstrationem applicari, hæc sunt supplenda constructioni Newtonianæ.

Concurrant lineæ  $BM$ ,  $CM$  in puncto lineæ  $NM$  infinitè distanti, hoc est, sint illi lineæ  $NM$  Parallelæ, & ducantur lineæ  $BA$ ,  $CA$  facientes cum illis lineis  $BM$ ,  $CM$  angulos  $MBA$ ,  $MCA$  datis  $MBC$ ,  $MCD$  æquales. Dico lineas  $BA$ ,  $CA$  fore parallelas lineis  $PT$ ,  $PR$  secundum constructionem Newtonianam descriptis: Productis enim  $BP$  &  $PT$  (si necesse sit) donec secent rectam datam  $MN$  in  $X$  &  $Z$ , erit angulus  $EPZ$  exterior respectu Trianguli  $PZX$ , ideoque æqualis angulis  $X$  &  $PZX$ , & angulus  $BNM$  erit exterior respectu Trianguli  $BNX$  ideoque æqualis angulis  $X$  &  $XBN$ , anguli vero  $BPZ$  &  $BNM$  æquales sunt per constructionem Newton. ergo anguli  $X$  &  $PZX$  æquales sunt angulis  $X$  &  $XBN$ , unde angulus  $PZX$ , quem facit linea  $PT$  cum recta  $NM$  est æqualis angulo  $XBN$  sive angulo dato  $MBD$  quem facit linea  $BA$  cum linea  $BM$  ipsi  $NM$  parallela, ergo per naturam Parallelarum, est linea  $PT$  parallela lineæ  $BA$ .

Eodem planè modo demonstrabitur lineam  $CA$  esse Parallelam lineæ  $PR$ . Quibus positis, sit sectio Conica per puncta  $B$ ,  $C$ ,  $P$  &  $A$  transiens, lineæ  $BD$ ,  $CD$  juxta conditiones in Lemmate præscriptas ductæ, concursu suo  $D$  percurrent eam sectionem Conicam: Productis enim lineis  $PT$ ,  $PR$ , donec secent lineas  $CA$ ,  $BA$ , in  $S$  &  $Q$  fiet Parallelogrammum  $AS PQ$ ,

Tom. I.

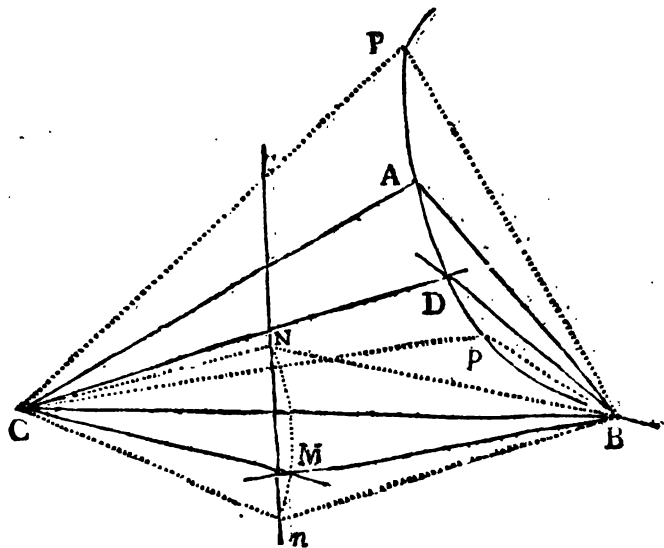


quod in Angulis suis oppositis  $A$  &  $P$  tangit sectionem conicam & lateribus anguli  $A$  productis occurrit eidem sectioni in  $B$  &  $C$ , & lineæ  $BD$ ,  $CD$  à punctis occursum  $B$  &  $C$  ductæ (secundum conditiones Lemmatis hujusce XXI.) abscindunt à Parallelogrammi lateribus  $PS$ ,  $PQ$  partes  $PT$ ,  $PR$  quæ sunt ad invicem in data ratione (per demonstrationem Newtonianam hujusce) ergo (per 2. caum Lem. XX.) punctum  $D$  tangit sectionem Conicam per puncta quatuor  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $P$  transi-  
entem.

C c

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Et contra, si punctum mobile  $D$  contingat sectionem conicam transeuntem per data puncta  $B, C, A$ , & sit angulus  $DBM$  semper æqualis angulo dato  $ABC$ , & angulus  $DCM$  semper æqualis angulo dato  $ACB$ , & ubi punctum  $D$  incidit successivè in duo quævis sectionis puncta immobilia  $p, P$ , punctum mobile  $M$  incidat successivè in puncta duo immobilia  $n, N$ : per



eadem  $n$ ,  $N$ , agatur recta  $nN$ , & hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis  $M$ . Nam, si fieri potest, versetur punctum  $M$  in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum  $D$  sectionem conicam per puncta quinque  $B$ ,  $C$ ,  $A$ ,  $p$ ,  $P$  transeuntem, ubi punctum  $M$  perpetuò tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum  $D$  sectionem conicam per eadem quinque puncta  $B$ ,  $C$ ,  $A$ ,  $p$ ,  $P$ , transeuntem, (P) ubi punctum

(p) \* Ubi punctum  $M$ , perpetuo tangit lineam rectam  $nN$  &c. cum enim angulorum datorum  $ABC$ ,  $A'CB$ , latera duo coincidunt cum recta  $CB$ , punctum  $A$ , aliorum laterum  $BA$ ,  $CA$ , intersectio, locatur in sectione conica per polos  $C$ ,  $B$ ,

transfunte; dum vero latera duo  $Bn$ , &  $Cn$ ,  $BN$ , &  $CN$ , sese interfecant in  $n$ ,  $N$ , aliorum laterum  $Bp$ , &  $Cp$ ,  $BP$  &  $CP$  intersectiones,  $p$ ,  $P$ , sunt in eadem sectione conica ex demonstratis.

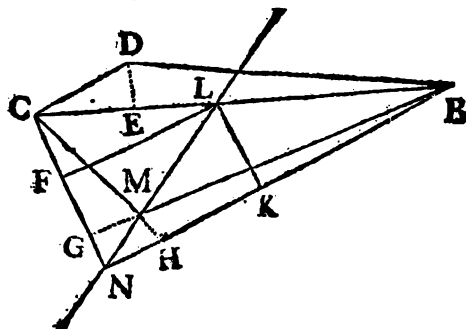
tum  $M$  perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones DE Mo-  
conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra *corol.* TU COR-  
3. *lemmat.* xx. Igitur punctum  $M$  versari in lineâ curvâ ab- PORUM.  
surdum est. Q. E. D. (9) LIBER  
PRIMUS.

(9) 310. In hac organica sectionum co-  
micarum descriptione, angulorum circa po-  
los mobilium crura utrinque producantur,  
ut cum duo crura v. gr.  $CP$ ,  $BP$  supra  
lineam  $CB$  divergunt, infra eandem pro-  
ducta convergant.

Si recta  $NM$ , per polorum alterutrum  
 $C$ , vel  $B$ , transeat, aut si anguli  $BCD$ ,  
 $CED$ , simul evanescant, punctum  $D$   
describet lineam rectam. Nam in 1.º ca-  
su angulorum datorum unus immobilis  
manet, dum alter circa polum suum ro-  
tatur & crurum suorum cum immobilis  
anguli cruribus intersectione lineam re-  
ctam describit; Si enim recta  $NM$  cum  
anguli dati  $DCM$  crure altero  $CM$  coin-  
cidat, immobili manente angulo  $DCM$ ,  
alterius  $DBM$  crura rectas  $MC$ ,  $CD$   
perpetuò interfecant; deinde si crure  
 $BM$ , coincidente cum  $CB$ , ut rectam  
 $CM$  positione datam perpetuò secet in  $C$ ,  
immobilis maneat angulus  $DBM$ , alterius  
 $DCM$  circa polum  $C$  rotati crus  $CD$   
rectam  $BD$  perpetuò interfecabit.

In 2.º casu anguli  $BCN$ ,  $CBN$  cir-  
cà polos  $C$ ,  $B$  mobiles, crurum duorum  
 $CN$ ,  $BN$  concursu, rectam  $NML$  po-  
sitione datam & aliorum crurum  $CB$ ,  
 $BC$  seu  $CD$ ,  $BD$  concursu  $D$  lineam  
quamlibet percurrant, sintque  $N$  pun-  
tum fixum  $M$  &  $D$  puncta mobilia; duo-  
tis ex puncto  $L$  dato ad latera data  $CN$ ,  
 $BN$  perpendicularibus  $LF$ ,  $LK$  ex punc-  
to mobili  $M$  ad easdem perpendiculari-  
bus  $MG$ ,  $MH$  & ex puncto  $D$  ad rec-  
tam  $CB$ , perpendiculari  $DE$ ; sit  $CE =$   
 $x$ ,  $DE = y$ ,  $CB = a$ , ac proinde  $EB = a - x$   
 $MN = z$ ,  $LN = b$ ,  $LF = c$ ,  $FN = d$   
 $CN = e$ ,  $LK = f$ ,  $NK = h$ ,  $NB = g$ ; &  
ob triangu-  
la  $NMG$ ,  $NFL$  similia,

$NL(b):LF(c)=MN(z):GM=\frac{cx}{b}$ ,  
&  $LN(b):FN(d)=MN(z):GN$   
 $=\frac{dz}{b}$ , adeòque  $CG = CN - GN$



$$= \frac{be-dx}{b}; \text{ porro ob angulos æquales } DCE,$$

$MCG$ , &  $DEC$ ,  $MGC$ , triangu-  
 $MCG$  similia sunt; quare  $CG(\frac{be-dx}{b})$

$$GM(\frac{cx}{b}) = CE(x):DE(y). \text{ Unde}$$

$$cxz = bey - dzy, \text{ \& } z = \frac{bey}{cx+dy}; \text{ ob}$$

triangu-  
la  $NLK$ ,  $NMH$ , similia  $NL(b):$

$$LK(f) = NM(z):MH = \frac{fz}{b}, \text{ \& } NL$$

$$(b):NK(h) = MN(z):NH = \frac{hz}{b}. \text{ unde}$$

$$BH = \frac{gb-hz}{b}; \text{ ob similia triangu-}$$

$$la  $BHM$ ,  $BH(\frac{gb-hz}{b}):MH(\frac{fz}{b}) = BE$$$

$$(a-x):DE(y) \text{ quare } fax - fzx =$$

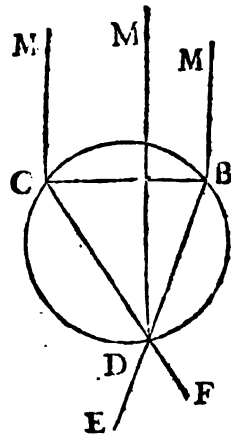
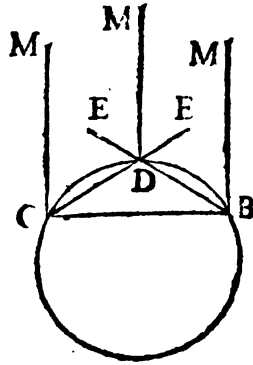
$$gby - hzy, \text{ \& } z = \frac{gby}{fa+hy-fx} =$$

$$\frac{bey}{cx+dy}, \text{ adeòque } gcx + gdy = fae +$$

$hey - fex$ . Cum igitur æquatio sit unius  
dimensionis, locus punctorum  $D$ , est li-  
nea recta.

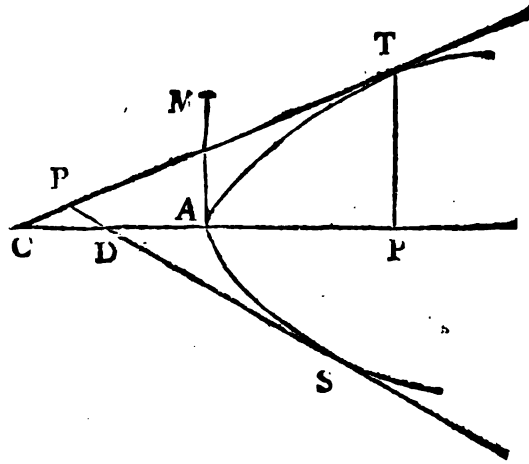


DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

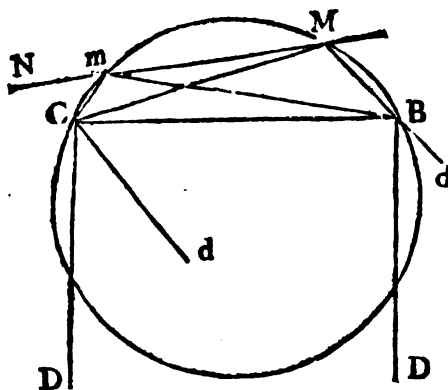


311. Si angulorum mobilium MCD, MBD crura CM, BM sibi invicem parallela maneant, seu, si recta NM ad distantiam infinitam abeat, crura alia CD, BD concursu suo D circulum describent, & contrà. Concurrant enim CM, DM, BM ad distantiam infinitam, & angulus MCD æqualis erit angulo MDF, ac MBD æqualis MDE; quoniam igitur dati sunt anguli MCD, MBD dabuntur quoque anguli MDF, MDE ac etiam angulus EDF & ei æqualis CDB. quare cum curva concursu D descripta, necessariò transeat per puncta data C, & B, patet punctum D seu verticem anguli dati CDB chordæ CB insistentis esse in circuli peripheriâ. Et contrà, si concursus D, tangat circulum per puncta C,

& B transeuntem, dabuntur tres anguli CDB, MCD, MBD atque adeò in quadrilatero MCDBM, cujus duo latera CM, BM concurrunt in M, dabitur angulus CMB, quod fieri nequit, nisi recta NM ad distantiam infinitam abeat, hoc est, nisi parallela fiant crura CM, BM.



312. Lemma. Si duæ rectæ parabolam tangent, & puncta contactuum in infinitum abeant, binæ tangentes se mutuò intersecant ad angulum infinitesimum & evadunt parallelæ axi parabolæ. Sit enim parabolæ axis CP, vertex A, CT tangens in T & axem secans in C, TP ad axem ordinata, AM latus rectum axis, erit  $CP = 2AP$ , &  $AP:PT = PT:AM$ , adeoque  $2AP(CP):PT = 2PT:AM$ . Si punctum contactus T, in infinitum abeat, erit  $2PT$ , infinita respectu AM, & proinde CP, infinita respectu PT, hoc est, sinus totus CP infinitus evadit respectu tangents PT anguli TCP, quare angulus ille infinitesimus est, & tangens axi CP parallela, altera tangens BS, axem secet in D, & tangentem CT in B, & punctum contactus S in infinitum abeat, erit angulus SDP infinitesimus & angulus TBD duobus internis atque infinitesimis BCD, BDC æqualis, erit quoque infinitesimus.



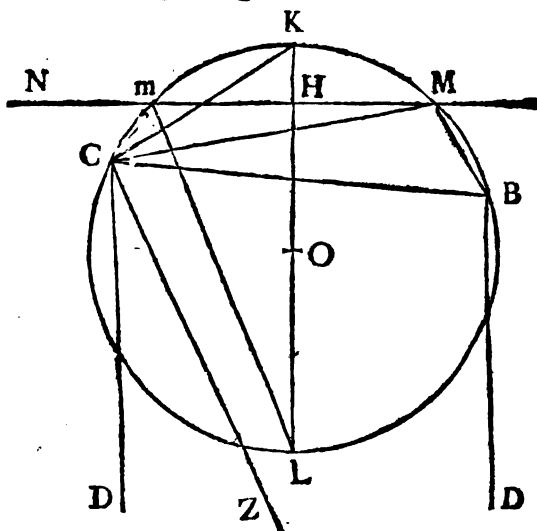
313. Super datâ rectâ CB, describatur segmentum circuli BM m C, quod capiat angulum BMC, datorum MCD, MBD supplementum ad quatuor rectos & compleatur circulus. Si recta data NM, quam in descriptione sectionis conicæ percurrit crurum BM CM concursus M hunc circulum secet, describetur hyperbola; si recta NM circulum contingat, describetur parabola; si recta NM circulo nullibi occurrat, describetur ellipsis.

Cas. 1. Recta NM circulum secet in punctis m, M, & crura Cd, Bd, & CD, ED, sibi invicem parallela erunt siue concurrent ad distantiam infinitam; nam cum in quadrilatero DCMB DdCm Bd angulus M vel m fit complementum angulorum C & B ad quatuor Rectos, angulus ad D vel d, evanescit, ideoque lineæ CD, BD erunt parallelae. Cum verò in omni Sectione Conicâ inveniri possit Tangens parallela chordæ cuius datæ (per Lemma IV. de Conicis pag. 129.) ductæ intelligantur Tangentis Sectionis chordis CD Cd Parallela, illæ Tangentes facient inter se angulum æqualem angulo Dcd quem faciunt inter se illæ chordæ, & puncta contactuum erunt ad distantiam infinitam, nulla verò est sectio conica præter hyperbolam cujus ad infinitam distantiam tangentes angulum finitum communi intersectioni faciunt; in Ellipsi enim nulla est tangens ad distantiam infinitam, & in parabola huiusmodi tangentes angulum infinitesimum duntaxat, facerent (per Lemma superius 313). Si igitur recta MN circulum secet, describetur hyperbola cujus asymptoti

seu tangentes ad distantiam infinitam rectis CD, Cd parallelae sunt & se mutuo interfecant in centro trajectoriæ. Q. e. 1.

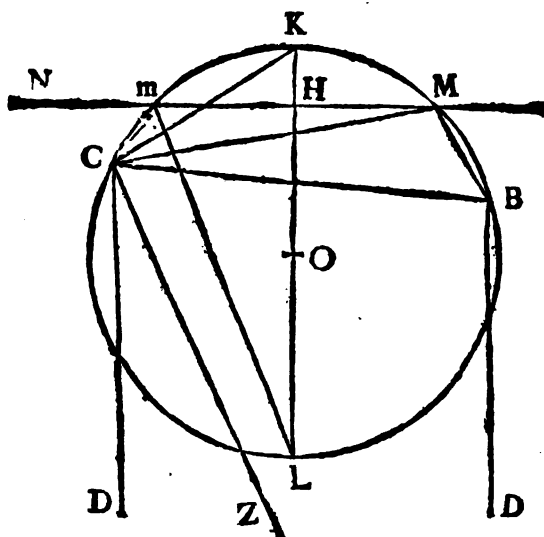
Cas. 2. Quoniam angulus mCM, in 1<sup>o</sup> casu æqualis est asymptotorum angulo DCd, ob æquales DCM, dCm; si manentibus circulo & distantia polorum CB, puncta intersectionum m, M ad se mutuo accedant, decrescet angulus DCd, & tandem punctis m, M coeuntibus, hoc est, secante MN in tangentem mutatâ angulus ille evanescet, dum rectæ CD, BD manent parallelae, & ad distantiam infinitam cum trajectoriâ conveniunt. In hoc igitur casu duæ rectæ, ipsis CD, Cd parallelae & trajectoriâ ad distantiam infinitam tangentes, se mutuo interfecant in angulo infinitesimo, seu in unam lineam coeunt axi trajectoriæ parallelam, & proinde hyperbola casus primi mutatur in parabolam (312). Q. e. 2.

Cas. 3. Si recta NM nullibi circulo occurrat, rectæ BD, CD quarum concursu D sectio conica describitur nunquam possunt fieri parallelae, & proinde curva non abit in infinitum, sed in se redit, estque adeo Ellipsis. Q. e. 3.



314. Coroll. 1. Ex his axes trajectoriæ facile determinantur. Sit O centrum circuli Cm MB ut supra (313) descripti, ab hoc centro in rectam NM cadat perpendicularis OH circulo occurrens in puncto c.

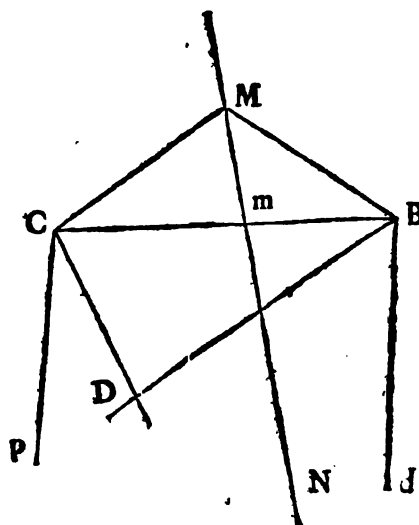
DE Mo- punctis K & L, & rectæ NM in H, jun-  
TU COR- gatur CK, & fiat angulus KCZ æqualis  
PORUM. angulo mobili MCD, aut quod idem est,  
LIBER anguli MCD crus CM ducatur ad posi-  
PRIMUS. tionem CK, & alterum crus CZ erit  
parallelum axi majori, & perpendiculare  
axi minori trajectoriæ, modo punctum K  
sit rectæ MN propius quam punctum op-



positum L; nam arcus Km, KM sunt æ-  
quales & angulus KCM = KCM =  $\frac{1}{2}$  m CM  
= DCZ; cumque mCM æqualis sit an-  
gulo quo asymptoti se mutuo interfecant,  
erit DCZ dimidium illius anguli, adeoque  
CZ parallela axi qui asymptotorum angu-  
lum bifecat; & si punctum K regulæ pro-  
pius sit quam punctum oppositum L, erit  
angulus mCM acutus, ac proinde axis  
major qui angulum asymptotorum acutum  
bifecat, erit rectæ CZ parallelus, axis  
verò minor huic rectæ perpendicularis; un-  
dè si detur trajectoriæ centrum dabuntur  
axes, & si descripta sit trajectoria, inveni-  
tur axis positio, ducta ad CZ normali ad  
trajectoriam utrinque terminata quam axis  
perpendiculariter & bisariam dividit; in-  
ventâ autem axium positione, habetur cen-  
trum in eorum intersectione communi. Su-  
perior autem constructio non solum hyper-  
bolæ convenit, sed & parabolæ inquam hy-

perbola mutatur, dum puncta m, M coeunt;  
atque etiam Ellipsi in quam vertitur parabo-  
la, dum recta MN, extrâ circulum transfit.

315. Coroll. 2. Axiū trajectoriæ quadrata  
sunt ad invicem ut KH, ad LH; nam axes  
sunt inter se ut cosinus dimidii anguli asymp-  
totorum ad sinum dimidii ejusdem angu-  
li; est verò KCM qui æqualis est dimidio  
anguli asymptotorum, etiam æqualis angulo  
mLK, adeoque LH est ad Hm ut axis ad  
axem; sed LH:Hm = Hm:KH, ac  
proinde LH:KH = LH<sup>2</sup>:Hm<sup>2</sup>. Ergo qua-  
drata axium sunt ad invicem ut LH ad KH.



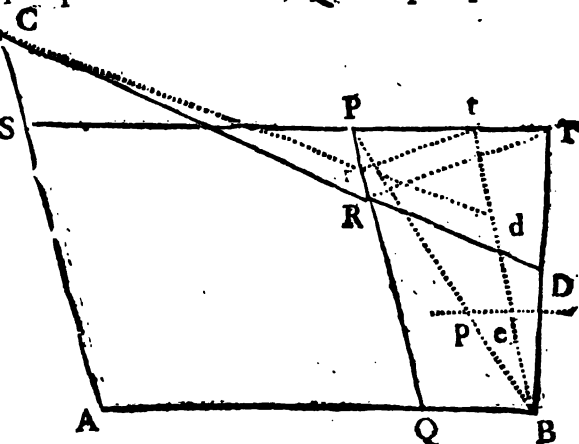
316. Coroll. 3. Si angulorum mobi-  
lium summa duobus rectis æqualis fuerit,  
rectæ BD, CD fiant parallelæ, quando  
punctum M pervenit ad m, ubi recta NM  
occurrit rectæ CB productæ, si opus est,  
& quando M abit in infinitum, cum in  
utroque casu evanescat angulus BMC.  
Si itaque linea MN, in hac hypothesi  
alicubi occurrat rectæ BC productæ, dux  
rectæ trajectoriam in distantia infinitâ con-  
tingent, & se mutuo ad angulum datum  
intersecabunt, adeoque describetur hyper-  
bola; at si MN rectæ CB non occur-  
rat, sed ipsi parallela sit, rectæ CD,  
BD non evadent parallelæ, nisi quando  
punctum M abit in infinitum, ac proin-  
dè trajectoria erit parabola. Quoniam  
igitur recta MN rectæ CB productæ  
occurrit,

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Trajectoriam per data quinque puncta describere.*

Dentur puncta quinque  $A, B, C, P, D$ . Ab eorum aliquo  $A$  ad alia duo quævis  $B, C$ , quæ poli nominentur, age rectas  $AB, AC$ , hisque parallelas  $TPS, QRP$  per punctum quartum  $P$ . Deinde à polis duobus  $B, C$  age per punctum quintum  $D$ , infinitas duas  $BDT, CRD$ , novissimè ductis  $TPS, PRQ$  (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in  $T$  &  $R$ . Denique de rectis  $PT, PR$ , actâ rectâ  $tr$  ipsi  $TR$  parallelâ, abscinde quasvis  $Pt, Pr$  ipsis  $PT, PR$  proportionales; & si per earum terminos  $t, r$  & polos  $B, C$  actæ  $Bt, Cr$  concurrant in  $d$ , locabitur punctum illud  $d$  in trajectoriâ quæsitâ. Nam punctum illud  $d$  (per lem. xx.) versatur in conicâ sectione per puncta quatuor  $A, B, C, P$  transeunte; & lineis  $Rr, Tr$  evanescentibus, coit punctum  $d$  cum puncto  $D$ . Transibit ergo sectio conica per puncta quinque  $A, B, C, P, D$ . *Q. E. D.*



*Idem*

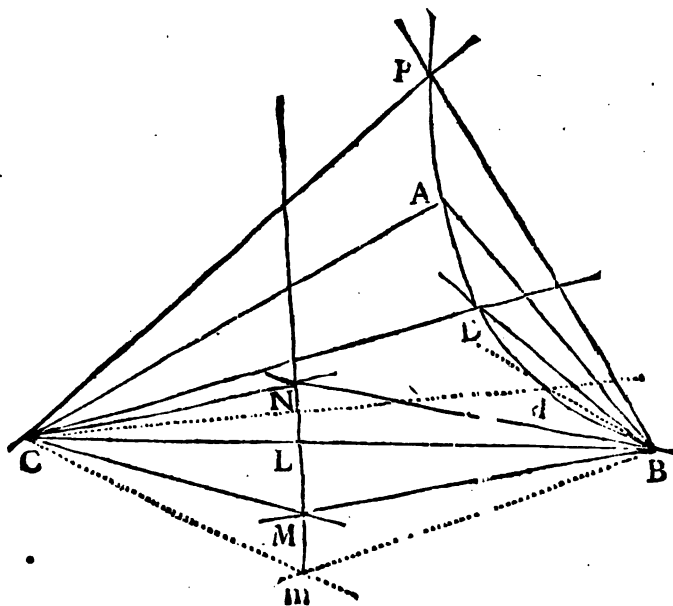
occurrit, vel ipsi parallelâ eff, patet nunquam posse Ellipsim describi, si angulorum mobilium summa, duobus rectis æqualis fuerit.

*Scholium.* Si crura  $CM, BM$  concursu suo  $M$  percurrant sectionem conicam per polum alterum  $C$  transeuntem, crura duo reliqua  $CD, BD$  concursu suo  $D$  describunt curvam secundi generis per polum alterum  $B$  transeuntem, præterquam ubi anguli  $BCD, CBD$  sunt

evanescent; quo casu punctum  $D$  describet sectionem conicam per polum  $C$  transeuntem, & eadem methodo curvas varias tertii, quarti, superiorum generum describere licet. Sed hæc ad præsens institutum non pertinent; qui plura desideraverit, legat Geometriam Organicam Celebrissimi Matheseos Professoris Colini Mac-Laurin, ex quo eximio opere non pauca excerpsimus.

*Idem aliter.*

- E punctis datis junge tria quævis  $A, B, C$ ; & circum duo eorum  $B, C$ , ceu polos, rotando angulos magnitudine datos
- $ABC, ACB$ , applicentur crura  $BA, CA$  primò ad punctum  $D$ , deinde ad punctum  $P$ , & notentur puncta  $M, N$  in qui-



bus altera crura  $BL, CL$  casu utroque se decussant. Agatur recta infinita  $MN$ , & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos  $B, C$ ; eâ lege ut crurum  $BL, CL$  vel  $BM, CM$  intersectio, quæ jam sit  $m$ , incidat semper in rectam illam infinitam  $MN$ ; & crurum  $BA, CA$ , vel  $BD, CD$ , intersectio, quæ jam sit  $d$ , trajectoriam quæsitam  $PADdB$  delineabit. Nam punctum  $d$  (per lem. XXI.) continget sectionem conicam per puncta  $B, C$  transeuntem; & ubi punctum  $m$  accedit ad puncta  $L, M, N$ , punctum  $d$  (per constructionem) accedet ad puncta  $ADP$ . Describetur itaque sectio conica transiens per puncta quinque  $A, B, C, P, D$ . Q. E. F.

Corol.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

LIBER  
PRIMUS.

*Scholium.*

[illegible]

P R O\_

metricè quærat per lem. XIX. Nam (vid. fig. & demonstr. Lem. XX.) cum data sint quinque puncta C, A, B, D, P, dabitur ratio constans rectangulorum  $PQ \times PR$ ,  $PS \times PT$ , hoc est, rectangulorum  $DE \times DF$ ,  $DG \times DH$ , adeoque (per Lem. XIX.) inveniatur punctum concursus trajectoriæ cum lineâ per punctum datum C ductâ. Cætera fiant ut in coroll. 2<sup>o</sup>. Lem. XIX. possint etiam trajectoriarum axes & centra inveniri eo modo quo docuimus num. 344.

(t): \* Hoc est linearum  $p_e$ ,  $P_r$ , alterutra ad arbitrium capiatur, & altera assumptæ æqualis fiat, aganturque rectæ  $B_e$ ,  $C_r$ , concurrentes in  $d$ ; nam (per priorem constr.)  $P_r : P_t = P_r : P_t = p_B : P_B$ , (per hanc constr.); & junctâ  $B_t$ , obparallelas  $p_e$ ,  $P_t$ , erit  $p_B : P_B = p_e : P_t$ , atque adeo  $P_r : P_t = p_e : P_t$ , unde  $P_r = p_e$ .

**D d**

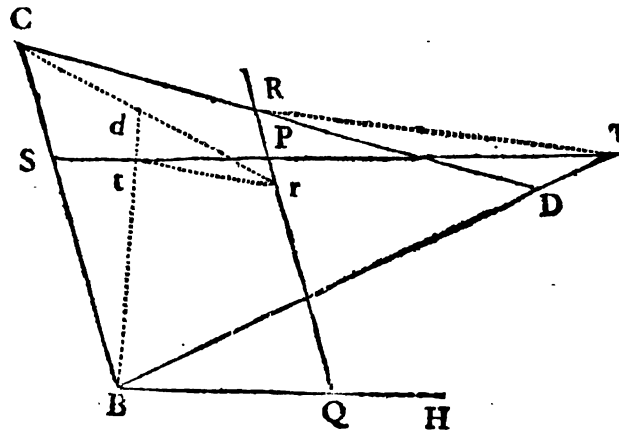
# 210 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

*Trajectoriam describere, quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.*

*Cas. 1.* Dentur tangens  $HB$ , punctum contactus  $B$ , & alia tria puncta  $C, D, P$ . Junge  $BC$ , & agendo  $PS$  parallelam rectæ  $BH$ , &  $PQ$  parallelam rectæ  $BC$ , comple parallelogrammum  $BSPQ$ . Age  $BD$  secantem  $SP$  in  $T$ , &  $CD$  secantem



$PQ$  in  $R$ . Denique, agendo quamvis  $tr$  ipsi  $TR$  parallelam, de  $PQ, PS$  abscinde  $Pr, Pt$  ipsi  $PR, PT$  proportionales respectivè; & ætarum  $Cr, Bt$  concursus  $d$  (*per lem. xx.*) <sup>(u)</sup> incidet semper in trajectoriam describendam.

*Idem aliter.*

Revolvatur tum angulus magnitudine datus  $CBH$  circa polum  $B$ , tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus  $DC$  circa polum  $C$ . Notentur puncta  $M, N$ , in quibus anguli crux  $BC$

(u) \* Demonstratio clara fit, si in punctum  $A$ , & recta  $ABQ$  sectionis configurâ Lem. XX: punctum  $B$  accedat ad nicæ tangens evadat.

## 218

DE MOR-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

ad

gens AB cum BC continet; quare dum anguli ABC, crur BC cum radio AC, si necessum sit, producto, perpetuo concurrunt in recta aliqua positione data ut NM, cruris AB & radii CA concursus trajectorym describit.

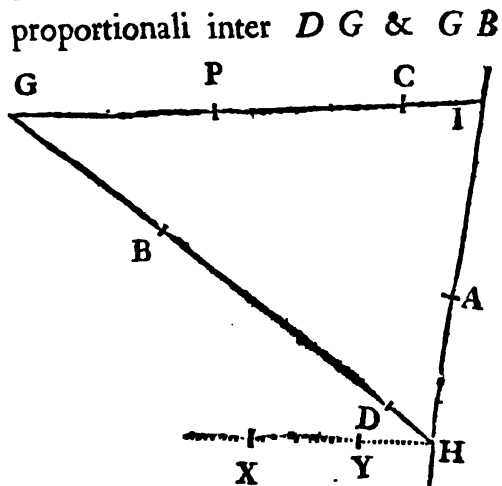


# 212 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

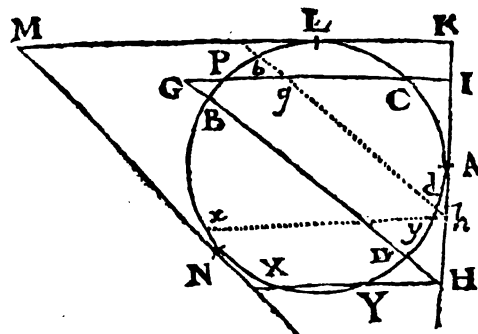
DE MO- ad rectangulum sub mediâ proportionali inter  $DG$  &  $GB$   
 TU COR- & mediâ proportionali in-  
 PORUM. ter  $PI$  &  $IC$ ; & erit  $A$   
 LIBER punctum contactus. Nam  
 PRIMUS. si rectæ  $PI$  parallela  $HX$

trajectoriam secet in punctis quibufvis  $X$  &  $Y$ : erit (ex conicis) (y) punctum  $A$  ita locandum, ut fuerit  $HA$  quad. ad  $AI$  quad. in ratione compositâ ex ratione rectanguli  $XHY$  ad rectangulum  $BHD$ , seu rectanguli  $CGP$  ad rectangulum  $DGB$ , & ex ratione rectanguli  $BHD$  ad rectangulum  $PIC$ . Invento autem contactus puncto  $A$ , describetur trajectory ut in casu primo. *Q. E. F.*

Capi autem potest punctum  $A$  vel inter puncta  $H$  &  $I$ , vel extra; & perinde trajectory dupliciter describi.



(y) 319. *Erit ex Conicis*; scilicet si  $A$  sit punctum contactus erit (per Cor. 3. Lem. III. de Conic. p. 119.)  $HA^2$  ad  $AI^2$  ut rectangulum  $XHY$  ad rectangulum  $PIC$ , sed ratio rectanguli  $XHY$  ad rect.  $PIC$ , potest considerari ut composita ex ratione rect.  $XHY$  ad rect.  $BHD$ , & ex ratione ejusdem rect.  $BHD$  ad rect.  $PIC$ . Est verò rect.  $XHY$  ad rect.  $BHD$  ut rect.  $CGP$  ad rect.  $DGB$  (per Lem. III. de Conic. p. 117.) sunt enim  $HX$ ,  $GC$ , dum Parallelae in Sectione Conicâ ductæ & per tertiam lineam  $GH$  sectæ, ideoque factum partium  $HX$ ,  $HY$  Parallelae  $HX$ , quæ sumuntur ab intersectione  $H$  ad curvæ puncta  $X$  &  $Y$ , est ad  $BH \times HD$  factum partium lineæ secantis  $GH$  sumptarum ab intersectione  $H$  ad puncta curvæ  $B$  &  $D$ , sicut factum partium alterius Parallelae  $CG \times GP$ , ad  $DG \times GB$  factum partium correspondentium lineæ secantis. Est ergo ratio  $HA^2$



ad  $AI^2$  æqualis rationi compositæ ex ratione rect.  $CGP$  ad rect.  $DGB$  & rect.  $BHD$  ad rect.  $PIC$  ideoque est  $HA$ : ad  $AI$  ut  $\sqrt{CGP \times BHD}$  ad  $\sqrt{DGB \times PIC}$ , sed Radices quadratæ illorum Rectangulorum sunt ipsæ mediæ

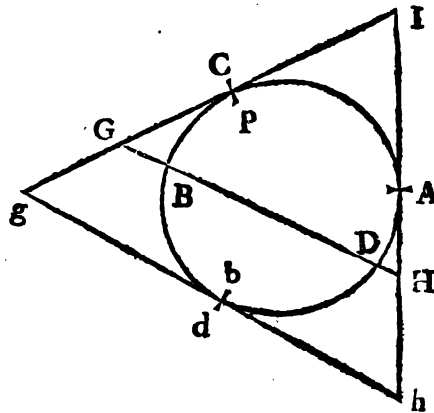
diæ proportionales inter illorum latera;  
Ergo est  $HA$  ad  $AI$  ut est rect. sub media  
proportionali inter  $CG$  &  $GP$  & media  
proportionali inter  $BH$  &  $HD$  ad rect. sub  
media proportionali inter  $DG$  &  $GB$  &  
media proportionali inter  $PI$  &  $IC$ . Si ita-  
que  $HI$  in  $A$  secetur in eâ ratione, ha-  
bebitur punctum contactus.

320. Coroll. 1. Si ex punctis quibufli-  
bet  $H$  &  $I$  rectæ  $HI$  sectionem conicam  
tangentes in  $A$ , agantur duæ quævis  
rectæ  $IG$ ,  $HG$  convenientes in  $G$ , &  
sectionem conicam secantes in punctis  
quatuor  $C$ ,  $P$ ,  $D$ ,  $B$ ; factum  $CGP \times$   
 $BHD$ , erit ad factum  $DGB \times PIC$ , in  
datâ ratione, nempe in ratione  $HA^2$ , ad  
 $AI^2$ ; Ducta enim linea  $HYX$  lineæ  $ICP$   
parallela, erit ut prius (per Lem. III. de  
Conic. p. 117.)  $DGB : BHD = CGP :$   
 $HXY = \frac{CGP \times BHD}{DGB}$ , est verò  $HA^2 :$

$$AI^2 = HXY \left( \frac{CGP \times BHD}{DGB} \right) : PIC$$

(per Cor. 3. ejusdem Lem.) ergo  $HA^2 :$   
 $AI^2 = CGP \times BHD : DGB \times PIC$ .

Quod si linea  $HYX$ , extra sectionem  
cadat aut eam tangat, ex puncto quovis  $h$   
lineæ  $HAI$ , ducatur alia linea  $hyx$  li-  
neæ  $ICP$  parallela quæ sectioni occur-  
rat in  $x$  &  $y$ , & ducatur alia linea  $hdbg$   
lineæ  $HDBG$  parallela ita ut sectioni oc-  
currat in  $d$  &  $b$ , & lineæ  $PC$  in  $g$ , habe-  
biturque ut prius  $hA^2 : AI^2 = CgP \times bhd :$   
 $dgb \times PIC$ . Sed cum ob parallelas  $GH$ ,  $bh$   
fit (per Lemma 3<sup>um</sup>. de Con. p. 117.)  
 $CgP : dgb = CGP : DGB$ , & (per Cor.  
3. ejusd. Lem.) fit  $hA^2 : bhd = HA^2 :$   
 $BHD$  substitutis his ultimis rationibus lo-  
co priorum in proportionem  $hA^2 : AI^2$   
 $= CgP \times bhd : dgb \times PIC$  fiet  $HA^2 :$   
 $AI^2 = CGP \times BHD : DGB \times PIC$  ut  
prius. Unde satis patet demonstrationem  
constructionis universalem esse, quomodo-  
cumque rectæ  $GI$ ,  $GH$  flectantur, adeo-  
que etiam valere, ubi recta  $HX$  sectio-  
ni non occurrit.

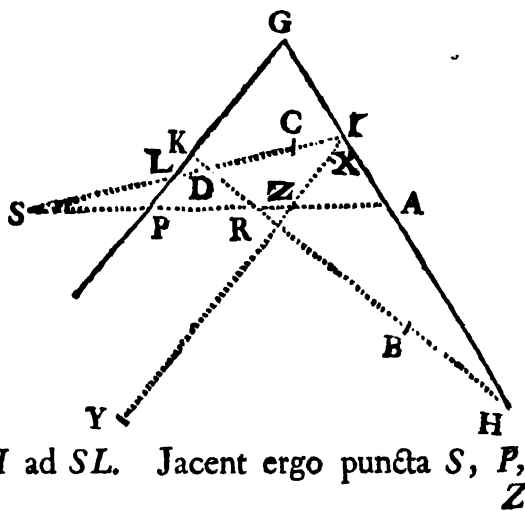


321. Coroll. 2. Coeuntibus punctis  $C$ ,  
 $P$ , recta  $IG$  fit tangens in  $C$  &  $GP$   
 $= GC$ ,  $CI = PI$ , adeoque  $CGP = GC^2$ ,  
&  $PIC = CI^2$ ; unde in hoc casu  $HA^2 :$   
 $AI^2 = GC^2 \times BHD : CI^2 \times DGB$ .  
Coeuntibus quoque punctis  $B$  &  $D$ , &  
secante  $GH$ , in tangentem  $gh$ , mutatâ  
erit  $hA^2 : AI^2 = gC^2 \times dh^2 : CI^2 \times$   
 $gd^2$ , ac proinde  $hA : AI = gC \times dh :$   
 $CI \times gd$ ; &  $hA \times CI \times gd = AI \times gC \times dh$ .  
Quare si ducantur tres rectæ sectionem  
conicam tangentes & inter se concurrentes  
in punctis  $I$ ,  $g$ ,  $h$ , facta ex tribus tan-  
gentium partibus inter concursum & con-  
tactuum puncta alternatim sumptis  $AI$ ,  
 $Cg$ ,  $dh$ , &  $Ah$ ,  $IC$ ,  $gd$ , sunt æ-  
qualia.

## PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

*Trajectoriam describere, quæ transibit per data tria puncta, & rectas duas positione datas continget.*

Dentur tangentes  $HI$ ,  $KL$  & puncta  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Per punctorum duo quævis  $B$ ,  $D$  age rectam infinitam  $BD$  tangentibus occurrentem in punctis  $HK$ . Deinde etiam per alia duo quævis  $C$ ,  $D$  age infinitam  $CD$  tangentibus occurrentem in punctis  $I$ ,  $L$ . Aetas ita seca in  $R$  &  $S$ , ut sit  $HR$  ad  $KR$  ut est media proportionalis inter  $BH$  &  $HD$  ad mediam proportionalem inter  $BK$  &  $KD$ ; &  $IS$  ad  $LS$  ut est media proportionalis inter  $CI$  &  $ID$  ad mediam proportionalem inter  $CL$  &  $LD$ . Seca autem pro lubitu vel inter puncta  $K$  &  $H$ ,  $I$  &  $L$ , vel extra eadem; dein age  $RS$  secantem tangentes in  $A$  &  $P$ , & erunt  $A$  &  $P$  puncta contactuum. Nam si  $A$  &  $P$  supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum  $H$ ,  $I$ ,  $K$ ,  $L$  quodvis  $I$ , in tangente alterutra  $HI$  situm, agatur recta  $IY$  tangenti alteri  $KL$  parallela, quæ occurrat curvæ in  $X$  &  $Y$ , & in ea sumatur  $IZ$  media proportionalis inter  $IX$  &  $IY$ , erit, ex conicis, (2) rectangulum  $XIY$  seu  $IZ$  quad. ad  $LP$  quad. ut rectangulum  $CID$  ad rectangulum  $CLD$ , id est (per constructionem) ut  $KI$  quad. ad  $SL$  quad. atque ideo  $IZ$  ad  $LP$  ut  $SI$  ad  $SL$ . Jacent ergo puncta  $S$ ,  $P$ ,  $Z$



(2) Erit ex Conicis rect.  $XIY$  ad  $LP^2$  ut rect.  $CID$  ad rect.  $CLD$ . Scilicet cum  $P$  supponatur punctum contactus alicubi in Tangente  $KL$  situm & cum linea  $IY$  sit

(per const.) parallela Tangenti  $KL$  & utraque secetur per lineam  $IL$ , illa in  $I$  hæc in  $L$  erit (per Lem. III. de Conic. p. 117.) rect. partium Parallelæ  $IY$  ab inter-

## 215

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

323. Coroll. 2. Si puncta D & C, coeant, (vid. fig. Newt.) ut ILS, tangens evadat in D, seu C, erit CI = DI, & CL = DL, adeoque  $IS^2 : LS^2 = DI^2 : DL^2$ , &  $IS : LS = DI : DL$ . h. e. si Tangens IL, terminata per duas alias Tangentes, secet in S lineam AB jungentem puncta contactus earum Tangentium, ejus partes à sectione S ad utramque Tangentem sumptæ, erunt inter se sicut ejus partes à puncto contactus ad easdem Tangentes terminatæ.

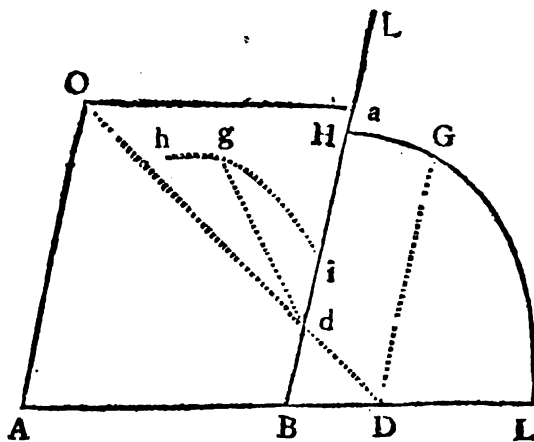
(b) 322. *Coroll.* 1. Hinc si duæ rectæ HG, PG (*vid. fig. New.*) concurrentes in G, sectionem conicam tangant in A & P, jungaturque AP & produca-

DE MOTU COR- In hâc propositione, & casu secundo propositionis superio-  
 PORUM. ris constructiones eadem sunt, sive recta  $XY$  trajectoriam secet in  
 LIBER  $X$  &  $Y$ , sive non secet; eæque non pendent ab hâc sectione.  
 PRIMUS. Sed demonstratis constructionibus ubi recta illa trajectoriam se-  
 cat, innotescunt constructiones, ubi non secat; iisque ultra de-  
 monstrandis brevitatis gratiâ non immoror.

## L E M M A X X I I.

*Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.*

Transmutanda sit figura quævis  $HGI$ . Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ  $AO$ ,  $BL$  tertiam quamvis positione datam  $AB$  secantes in  $A$  &  $B$ , & a figuræ puncto quovis  $G$ , ad rectam  $AB$  ducatur quævis  $GD$ , ipsi  $OA$  parallela. Deinde à puncto aliquo  $O$ , in linea  $OA$  dato, ad punctum  $D$  ducatur recta  $OD$ , ipsi  $BL$  occurrens in  $d$ , & à puncto occurfus erigatur recta  $dg$  datum quemvis angulum cum rectâ  $BL$  continens, atque eam habens rationem ad  $Od$  quam habet  $DG$  ad  $OD$ ; & erit  $g$  punctum in figurâ nova  $hgi$  puncto  $G$  respondens. Eâdem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum  $G$  motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum  $g$  motu itidem continuo percurreret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratiâ nominemus  $DG$  ordinatam primam,  $dg$  ordinatam novam;  $AD$  abscissam primam,



mam,  $ad$  abscissam novam;  $O$  polum,  $OD$  radium abscinden- DE Mo-  
tem,  $OA$  radium ordinatum primum, &  $Oa$  (quo parallelo- TU COR-  
grammum  $OABa$  completur) radium ordinatum novum. PORUM.

Dico jam quod, si punctum  $G$  tangit rectam lineam positione LIBER  
datam, punctum  $g$  tanget etiam lineam rectam positione da- PRIMUS.

tam. Si punctum  $G$  tangit conicam sectionem, punctum  $g$  tan-  
get etiam conicam sectionem. Conicis sectionibus hic circulum  
annumero. Porro si punctum  $G$  tangit lineam <sup>(c)</sup> tertii ordinis  
analytici, punctum  $g$  tanget lineam tertii itidem ordinis; & sic  
de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem  
semper ordinis analytici quas puncta  $G, g$  tangunt. <sup>(d)</sup> Etenim ut  
est  $ad$  ad  $OA$  ita sunt  $Od$  ad  $OD$ ,  $dg$  ad  $DG$ , &  $AB$  ad

$AD$ ; ideoque  $AD$  æqualis est  $\frac{OA+AB}{ad}$ , &  $DG$  æqualis est

$\frac{OA \times dg}{ad}$ . Jam si punctum  $G$  tangit rectam lineam, atque

ideo in æquatione quâvis, quâ relatio inter abscissam  $AD$  &  
ordinatam  $DG$  habetur, indeterminatæ illæ  $AD$  &  $DG$  ad uni-  
cam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione  
 $OA$

(c) 324. NEWTONUS lineas geometri-  
cas in ordines analyticos distinguit secun-  
dum numerum dimensionum æquationis quâ  
relatio inter ordinatas & abscissas definitur,  
vel (quod proinde est) secundum numerum  
punctorum in quibus à lineâ rectâ secari  
possunt; tot enim dimensiones habet æqua-  
tio ad curvam quot possunt esse illius curvæ  
& rectæ intersectiones; nam si intersec-  
tiones illæ seorsim querantur, quoniam eadem  
est omnium lex & conditio, idem erit cal-  
culus in casu unoquoque & propterea eadem  
semper conclusio, quæ igitur debet omnes  
intersectiones simul complecti & indifferen-  
ter exhibere, adeoque tot esse debent æqua-  
tionis radices ac proinde dimensiones quot  
sunt intersectiones. Hinc linea primis ordinis  
erit recta sola, lineæ secundi sive quadratici  
ordinis erunt sectiones conicæ & circulus,  
& lineæ tertii sive cubici ordinis parabola  
cubica, parabola Neiliana, Cissois veterum

& aliæ. Cum autem recta inter curvas  
non sit numeranda, curva primi generis  
eadem est cum lineâ secundi ordinis, &  
curva secundi generis eadem cum lineâ ter-  
tii ordinis, & linea ordinis infinitesimi ea  
est quam recta in punctis infinitis secare  
potest, qualis est spiralis, cyclois, quadra-  
trix & linea omnis quæ per radium vel rotæ  
revolutiones infinitas generatur.

(d) 325. Etenim ob similia triangula,  
 $a d O, A O D$ ,  $a d : OA = Od : OD$ ,  
( & per constr. )  $Od : OD = dg : DG$ ,  
& ob rectas  $AO, Bd$  parallelas  $Od :$   
 $OD = AB : AD$ , unde  $a d : OA = dg :$   
 $DG = AB : AD$ , atque adeo  $AD$   
 $= \frac{OA \times AB}{ad}$ , &  $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$ . Sit  
 $OA = a$ ,  $AB = b$ ,  $AD = x$ ,  $DG = y$ ,  
 $ad = z$ ,  $dg = u$ , & erit  $x = \frac{ba}{z}$ ,  $y = \frac{au}{z}$ .



# PRINCIPIA MATHEMATICA. 219

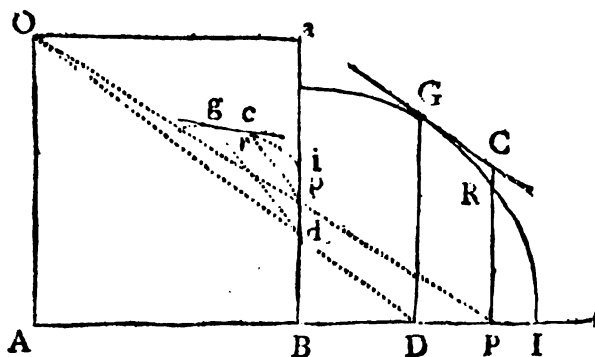
(h) Dico præterea, quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ; hæc recta eodem modo cum curvâ in figurâ novâ translata tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; & contra. Nam si curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figurâ primâ, puncta eadem translata accedunt ad invicem & coibunt in figurâ novâ; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, simul evadent curvarum tangentes in figurâ utrâque.

Componi possent harum assertionum demonstrationes more magis geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur

riebus factorum  $x, y, xy^2, xy^3$  &c. &  $x^2y, x^3y$  &c. & reductione ad communem denominatorem  $z^4$  factâ, habebuntur series  $\frac{z^2u, zu^2, zu^3}{z^4}$ , &  $\frac{zu, u^2}{z^4}$ . Porro æquatio omnis ex hujusmodi dignitatibus & factis composita est, & abjici potest communis omnium terminorum denominator qui hic est  $z^4$ , ergo hujusmodi

substitutionibus non mutatur gradus æquationis. Eadem quoque demonstrari possunt ex eo quod si linea recta curvam  $HGI$ , secet in quolibet punctis, eadem recta translata curvam  $hgi$  in totidem punctis interfecare debeat, quoniam singulæ nec plures intersectiones in novam figuram transferuntur.



(h) 326. Recta  $GC$  curvam  $GI$  tangat in  $G$ , transferatur punctum  $G$ , in  $g$ , & ductâ  $PC$  parallelâ  $DG$ , quæ curvæ occurrat in  $R$  & tangenti in  $C$ ; transferatur punctum  $C$ , in  $c$ , faciendo ut  $OP:PC = Op:pc$  parallelam  $dg$ , & recta  $gc$ , quæ puncta  $g$ , &  $c$ , jungit, novam curvam  $gi$ , tanget in  $g$ ; nam accedat  $PC$ , ad  $DG$ , & accedat correspondens  $pc$ , ad  $dg$ , & pun-

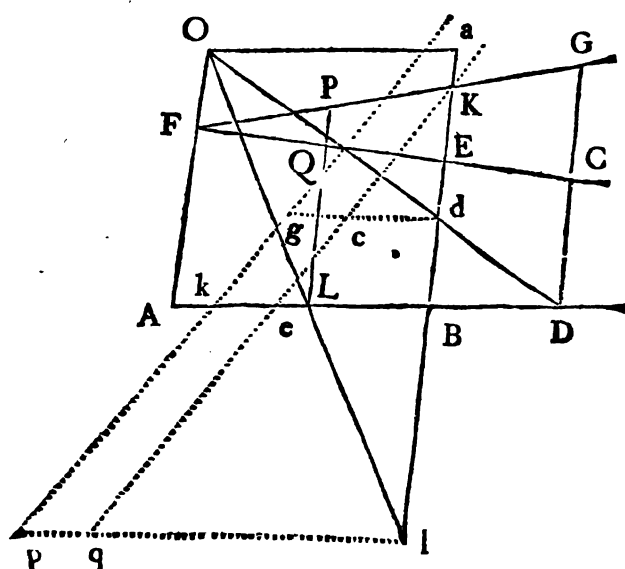
ctis  $C, R, G$ , coeuntibus, coibunt in figurâ novâ puncta  $c, r, g$ , adeoque lineæ  $gc$ , positione coincidit cum chordâ evanescente  $gr$ , hoc est cum tangente in  $g$ . Idem aliâ ratione potest demonstrari; quoniam enim  $PC^2:PR = PO:po = PR:pr$ , & proinde  $PC:PR = pc:pr$ , ergo punctum  $c$ ; non est in curvâ  $gi$ , nisi cum  $C$  reperitur in curvâ  $GI$ , hoc est, nisi  $C$  &  $G$  coeant.

E e 2



## 220 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO- Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit recta-  
TU COR- rum, à quibus conflatur, intersectiones transferre, & per eas-  
PORUM dem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvilineam trans-  
LIBER mutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes, & lineæ  
PRIMUS. rectæ, quarum ope curva linea definitur. Infervit autem hoc  
lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figu-  
ras propositas in simpliciores. Nam (i) rectæ quævis conver-  
gentes.



(i) 327. Radius ordinatus primus OA, per concursum F rectarum FG, FC transeat, ductâ GD radio OA parallelâ, transferantur puncta G, C, in g, c, & puncta K, E, in k, e, rectæ kg, ec, erunt parallelæ; nam ducta intelligatur OL radio OA infinite proxima, & rectas AD, a B secans in L & l, & actâ LQP radio OA, parallelâ, puncta P, Q in p, q, translata concipiantur, & erit OL:Ol=PL:pl=QL:ql. coeuntibus verò punctis P, Q, F erit Ol infinita & QL=FA=PL, adeoque pl=ql. Punctum igitur concursus F ad distantiam infinitam transfertur, & lineæ gp, cq, ad illud convergentes sunt parallelæ.

328. Coroll. 1. Puncta K & E, seu intersectiones linearum FG, FC cum a B, transferuntur capiendo in novâ ordinatâ Bk=BK, Be=BE; est enim (per constr.) BK:BO=Bk:BO. & BE:BO=Be:BO.

329. Coroll. 2. Si punctum F, cum puncto A, coincidat, erunt gk, ce, rectis OA, a B parallelæ; nam ob parallelas BK, DG, AO & (per constr.) AB:AD=Od:OD=dg:DG, & coeuntibus punctis F, A, AB:AD=BK:(Bk):DG, adeoque dg:DG=Bk:DG, ac proinde Bk=dg, undè gk lineæ Bd est parallela.

## 221

TU COR  
 PORUM.  
 LIBER  
 PRIMUS.

lum cujus diameter  $\frac{ba}{c}$ , ex tribus autem  
 rectis  $a, b, c$ , binæ  $a$  &  $b$ , vel  $a$  &  $c$ ;  
 possunt ad arbitrium assumi, & tertia de-  
 Ee 3 termin-

# 222 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

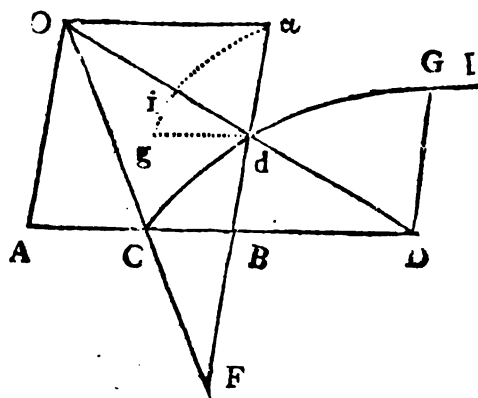
DE MO-terminatur per æquationem  $lc = bb$ , in  
TU COR. circulo.

PORUM. Si vertex C cum puncto A coeat, hoc est,  
LIBER si  $AC = c = 0$  æquatio ad novam curvam  
PRIMUS. erit  $b^2 u^2 - lbaz = 0$ , hoc est, curva gi,  
erit parabola; & eodem modo invenitur  
Ellipsim & Hyperbolam arque adeo Sectiones  
omnes conicas in parabolam transformari,  
dum diametri AD radio Oa parallelæ vertex C  
coincidit cum puncto A radii ordinati primi O A  
ordinatis ad diametrum paralleli.

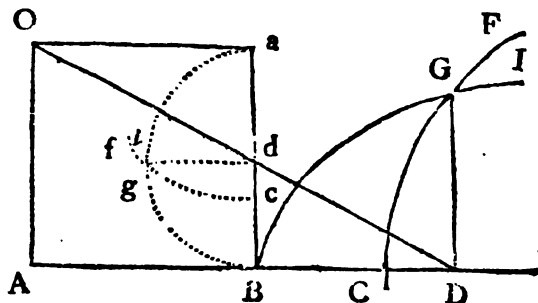
Si parabolæ vertex C cum puncto B coeat, erit  $b = c$ , adeoque Ellipsis vel circuli gi diameter  $\frac{ba}{c}$ , erit  $a = OA = aB$ .

Si curva CGI, fuerit hyperbola cujus sit diameter d, latus rectum l, manentibus cæteris denominationibus ut supra, erit ex naturâ hyperbolæ  $dy^2 = lx^2 - 2clx + dlx - ldc + lcc$ , & substitutis loco x & y, eorum valoribus & reductione ad communem denominatorem factâ producet.  $db^2u^2 + 2clbaz + ldcz^2 - lb^2a^2 = 0 - dlbaz - lc^2z$

nova æquatio ad parabolam vel hyperbolam aut Ellipsim prout assumitur linea c,



æqualis vel major vel minor diametro d, Ellipsis autem in circulum abit ponendo  $ldc - lc^2 = db^2$ , & angulum g d a, rectum, ut ex locorum geometricorum doctrinâ liquet. Eadem ratione transformatur Ellipsis.



333. His præmissis facillè intelligitur hujus lemmatis usus in solidorum aut etiam planorum problematum solutione. Nam sit quærenda interfectio G conicæ sectionis B G I cum alterâ sectione conicâ aut rectâ lineâ C G F positione datâ. transformetur (332.) sectio conica B G I in circulum B G a, & lineâ C G F, in lineam c g f, tum ex puncto interfectionis g, circuli B g a, & lineæ c g f, demittatur ad a B nova ordinata sive per-

pendicularis g d, & per punctum d, agatur radius abscindens O d D secans rectam A B in D, denique per D agatur G D radio ordinato primo O A parallelâ quæ sit ad O D ut g d, ad O d, & erit G punctum interfectionis quæsitum. Cum enim in puncto interfectionis duarum linearum B G I, C G F, communis sit ordinata G D manifestum est interfectionem illam transformari in interfectionem linearum B g a, c g f, & vice versâ (331).

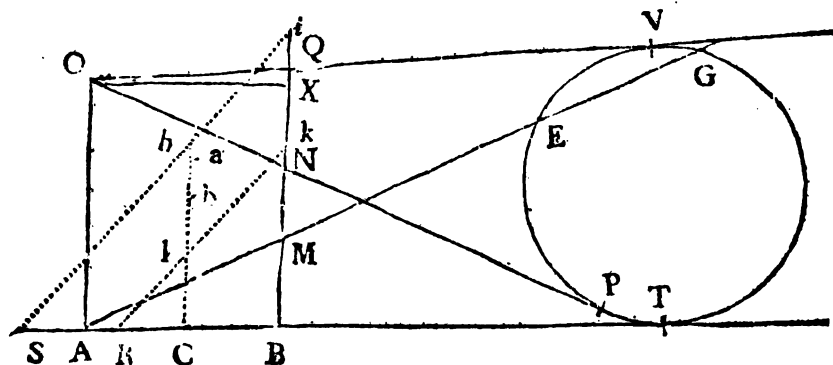
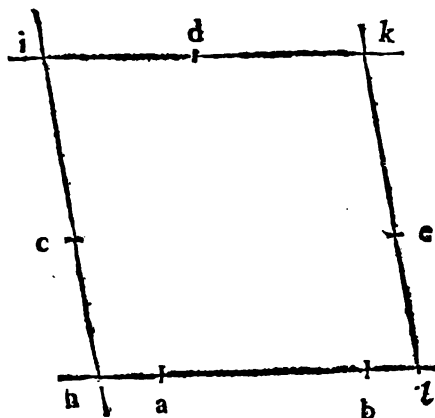
PRO-

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

*Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit, & rectas tres continget positione datas.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transibit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per lemma superius, in figuram novam. (m) In hac figurâ tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, & tan-



(m) 334. Sit O, concursus tangentium duarum OV, OP, A concursus tangentis tertiæ AT, cum rectâ AG, quæ per puncta duo E, G, data transibit, age rectam infinitam OA, eaque adhibita pro radio ordinato primo, & OX parallelâ AT, pro radio ordinato novo usurpatâ, transmutetur figura in figuram novam, quod facilissimum est, si ordinatæ novæ parallelæ sumantur radio ordinato novo OX, nam recta AT transformatur in rectam BXi (330), recta AG in rectam Ch ipsi BX parallelæ

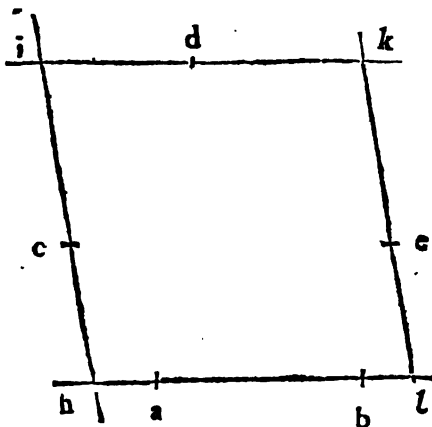
iam (329) & punctum illius C, reperitur, capiendâ BC = BM (328). rectæ OV, OP transmutantur in rectas parallelas Rk, Si (327); earumque puncta R, S, habentur capiendâ BR = BN, BS = BQ, & alia puncta duo (per Lem. XXII.) facillè reperiuntur. Puncta E, & G, transferantur in b, & a, & productis lineis parallelis B1 & Ch, Rk, & Si, donec sibi mutuo occurrant, compleatur parallelogrammum lhi k, & nova sectio conica transibit per puncta b, & a, & tangetur à rectis tribus hi, lh, ki (326).

\* Inter

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

gens tertia fiet parallela rectæ  
per puncta duo data transeunti.  
Sunto  $hi$ ,  $kl$  tangentes illæ duæ  
parallelae,  $ik$  tangens tertia,  
&  $hl$  recta huic parallela tran-  
siciens per puncta illa  $a$ ,  $b$ , per  
quæ conica sectio in hac figurâ  
novâ transire debet, & paral-  
lelogrammum  $hikl$  cõmplens.

(<sup>n</sup>) Secentur rectæ  $hi$ ,  $ik$ ,  
 $kl$  in  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , ita ut sit  $hc$  ad  
latus quadratum rectanguli  $ahb$ ,  
 $ic$  ad  $id$ , &  $ke$  ad  $kd$  ut est summa rectarum  $hi$  &  $kl$  ad  
summam trium linearum, quarum prima est recta  $ik$ , alteræ  
duæ sunt latera quadrata rectangulorum  $ahb$  &  $alb$ : & erunt  
 $c$ ,  $d$ ,  $e$  puncta contactuum. Etenim, ex conicis, sunt  $hc$  qua-  
dratum ad rectangulum  $ahb$ , &  $ic$  quadratum ad  $id$  quadra-  
tum, &  $ke$  quadratum ad  $kd$  quadratum, &  $el$  quadratum ad  
rectangulum  $alb$  in eâdem ratione; & propterea  $hc$  ad latus  
quadratum ipsius  $ahb$ ,  $ic$  ad  $id$ ,  $ke$  ad  $kd$  &  $el$  ad latus  
quadratum ipsius  $alb$  sunt in subduplicatâ illâ ratione, & com-  
positè, in datâ ratione omnium antecedentium  $hi$  &  $kl$  ad om-  
nes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli  $ahb$ , &  
recta  $ik$ , & latus quadratum rectanguli  $alb$ . Habentur igitur



\* (<sup>n</sup>) Inter  $ah$ ,  $hb$ , quærat media  
proportionalis quæ dicatur  $M$ , & inter  
 $al$ ,  $lb$ , media proportionalis  $N$ ; & deinde  
ita secentur rectæ  $hi$ ,  $ik$ ,  $kl$ , in  $c$ ,  $d$ ,  
 $e$ , ut sit  $hc$ , ad  $M$ ,  $ic$ , ad  $id$ , &  $ke$   
ad  $kd$ , ut est  $hi + kl$ , ad  $ik + M + N$ ,  
& erunt  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , puncta contactuum; Ete-  
nim si fuerint  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , puncta contac-  
tuum,  $ohl$  parallelam tangenti  $ik$ ,  
quæ cum alterâ tangente  $hi$ , concurrir  
in  $i$ , erit (per prop. 16. & 18. lib. 3.  
Conic. Apoll. sive per Corol. 2. Lem. III.  
de Conic. p. 118.)  $hc^2 : ah \times hb = ic^2 :$   
 $id^2$ , &  $ob, hi$ , occurrentem sectioni in so-  
lo puncto  $c$ , & parallelam tangenti  $lk$ ,  
quæ alteri tangenti  $ik$  occurrit in  $k$ ,  
erit (per eandem prop. Apoll.)  $ic \times ie$   
( $ic^2$ ):  $id^2 = ke^2 : kd^2$ , &  $ob, hl$ , paral-

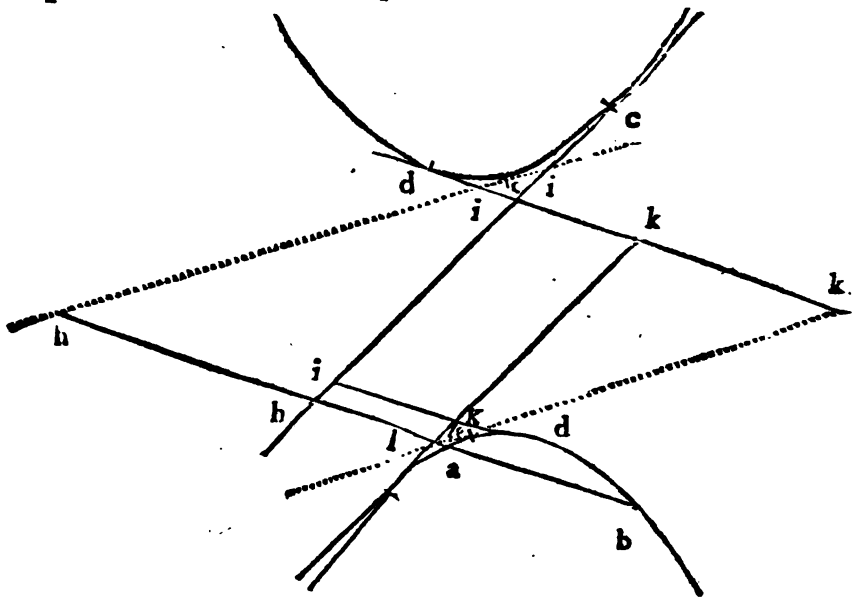
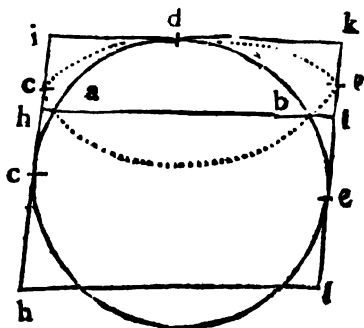
lelam tangenti  $ik$ , quæ cum alterâ tan-  
gente  $lk$ , convenit in  $k$ , erit (per eaf-  
dem prop. Apoll.)  $ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times$   
 $lb$ , adeoque  $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2$   
 $= ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$ , & propterea  
 $hc : \sqrt{ah \times hb} (M) = ic : id = ke : kd$   
 $= el : \sqrt{al \times lb} (N)$ , & composuè sum-  
ma omnium antecedentium est ad sum-  
mam omnium consequentium ut quilibet  
antecedens ad suum consequentem, hoc est  
 $hc : M = ic : id = ke : kd = el : N = hc$   
 $+ ic + ke + el (hi + kl) : M + id$   
 $+ kd + N (ik + M + N)$ . Habentur  
igitur (per constr.) ex datâ illâ ratione  
puncta contactuum  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , in figurâ no-  
vâ per inversas operationes (331.)

ex datâ illâ ratione puncta contactuum  $c, d, e$ , in figura nova. Per  
inversas operationes lemmatis novissimi transferantur hæc puncta  
in figuram primam, & ibi (*per prob. XIV.*) describetur trajectory.  
*Q. E. F.* (°) Cæterum perinde ut puncta  $a, b$  jacent vel inter  
puncta  $h, l$  vel extra, debent puncta  $c, d, e$  vel inter puncta  $h, i, k, l$   
capi, vel extra. Si punctorum  $a, b$  alterutrum cadit inter puncta  
 $h, l$  & alterum extra, problema impossibile est.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

PRO-

(°) 335. Quoniam duæ parallelæ  $hi$ ,  
 $lk$ , neque parabolam, neque hyperbo-  
lam simplicem contingere possunt, tan-  
gent hyperbolas oppositas vel ellipsim,  
circulo inter elliptes annumerato. Porro  
Ellipsis tota inter tangentes parallelas,  
& hyperbolæ oppositæ totæ extra easdem  
sunt; quare in Ellipsi puncta  $a, b$ , inter  
puncta  $h, l$  sita sunt; in hyperbolis ex-  
tra; atque adeo si punctorum  $a, b$ , al-  
terum cadit inter puncta  $h, l$  & alterum  
extra, problema impossibile est. In Ellipsi  
punctum contactus  $d$ , inter puncta  $i, k$ ,  
necessariò cadit; alia duo  $c, e$ , inter punc-



ta  $h$  &  $i$ ,  $l$  &  $k$ , vel aliquandò extra esse  
possunt; in hyperbolis oppositis contac-  
tum puncta duo ut  $c, d$ , extra puncta  
 $h, i, k, l$ , necessariò posita sunt, ter-  
tium ut  $e$ , vel extra vel intra esse po-

test, undè præscribit NEWTONUS ut punc-  
ta  $c, d, e$ , vel inter puncta  $h, i, k, l$ ;  
vel extra capiantur, perinde ut puncta  
 $a, b$ , jacent vel inter puncta  $h, l$ , vel ex-  
tra.

Tom. I.

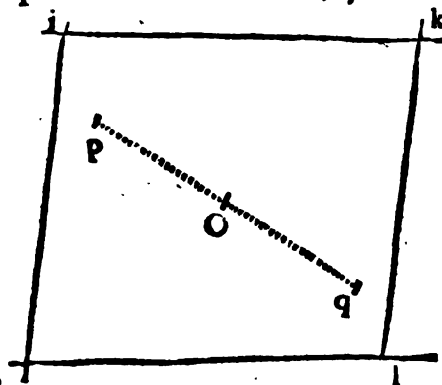
E f

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

*Trajectoriam describere, quæ transibit per punctum datum, & rec-  
tas quatuor positione datas continget.*

Ab interfectione communi duarum quarumlibet tangentium ad interfectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, transmutetur figura (per lem. xxii.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunt illæ  $hi$  &  $kl$ ,  $ik$  &  $hl$  continentes parallelogrammum  $hikl$ . Sitque  $p$  punctum in hac novâ figurâ puncto in figurâ primâ dato respondens. ( $p$ ) Per figuræ centrum  $O$  agatur  $pq$ , & existente  $Oq$  æquali  $Op$ , erit  $q$  punctum alterum per quod sectio conica in hac figurâ novâ transire debet. Per lemmatis xxii. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest trajectoria illa per problema xvii. Q. E. F.



L E M.

(p) 336. Parallelogrammi  $h, i, k, l$ ; sectioni conicæ circumscripti diagonales in sectionis centro  $O$ , se mutuo interfecant. Nam rectæ quæ opposita contactuum punc-

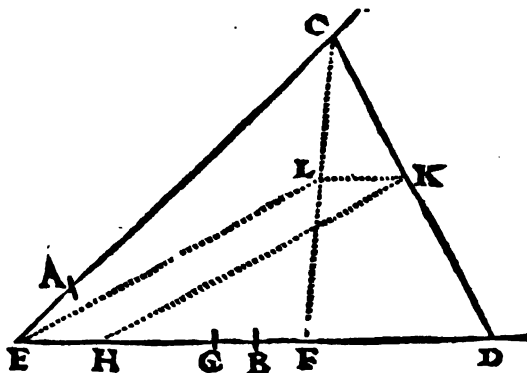
ta jungunt; sunt sectionis diametri centro  $O$  bisectæ (per prop. 27. & 31. Lib. 2. Conic. Apoll. utque sequitur ex Lem. IV. de Conic. p. 112).

LEMMA XXIII.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Si rectæ duæ positione datæ  $AC$ ,  $BD$  ad data puncta  $A$ ,  $B$ , terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta  $CD$ , quâ puncta indeterminata  $C$ ,  $D$  junguntur, secetur in ratione datâ in  $K$ : dico quod punctum  $K$  locabitur in rectâ positione datâ.*

(<sup>1</sup>) Concurrent enim rectæ  $AC$ ,  $BD$  in  $E$ , & in  $BE$  capiatur  $BG$  ad  $AE$  ut est  $BD$  ad  $AC$ , sitque  $FD$  semper æqualis datæ  $EG$ ; & erit ex constructione  $EC$  ad  $GD$ , hoc est, ad  $EF$  ut  $AC$  ad  $BD$ , ideoque in ratione datâ, & propterea dabitur specie triangulum  $EFC$ . Secetur  $CF$  in  $L$  ut sit  $CL$  ad  $CF$  in ratione  $CK$  ad  $CD$ ; & ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum  $EFL$ ; proindeque punctum  $L$  locabitur in rectâ  $EL$  positione datâ. Junge  $LK$ , & similia erunt triangula  $CLK$ ,  $CFD$ ; & ob datam  $FD$  & datam rationem  $LK$  ad  $FD$  dabitur  $LK$ . Huic æqualis capiatur  $EH$ , & erit semper  $ELKH$  parallelogrammum. Locatur igitur punctum  $K$  in parallelogrammi illius latere positione dato  $HK$ . *Q. E. D.*



*Corol.* Ob datam specie figuram  $EFLC$ , rectæ tres  $EF$ ,  $EL$ , &  $EC$ , id est  $GD$ ,  $HK$  &  $EC$ , datas habent rationes ad invicem.

LEM-

(<sup>1</sup>) Vid. not. 67. pag. 39.



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

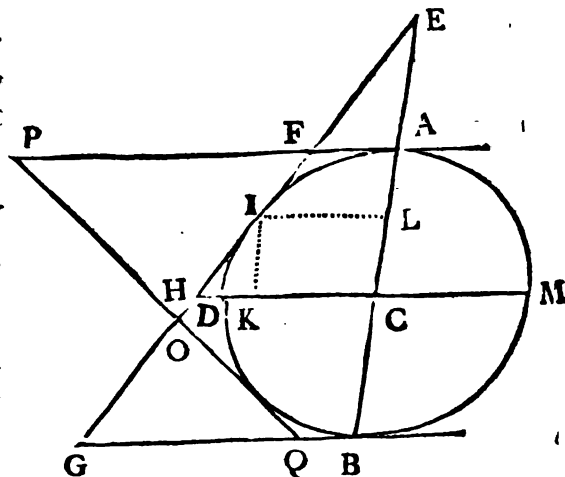
## L E M M A XXIV.

*Si rectæ tres tangant quamcunque conicsectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico quod sectionis semidiameter hisce duabus parallelæ, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.*

Sunto  $AF$ ,  $GB$  parallelæ duæ conicsectionem  $ADB$  tangentes in  $A$  &  $B$ ;  $EF$  recta tertia conicsectionem tangens in  $I$ , & occurrens prioribus tangentibus in  $F$  &  $G$ ; sitque  $CD$  semidiameter figuræ tangentibus parallelæ: dico quod  $AF$ ,  $CD$ ,  $BG$  sunt continuè proportionales.

Nam si diametri conjugatæ  $AB$ ,  $DM$  tangenti  $FG$  occurrant in  $E$  &  $H$  seque mutuo secant in  $C$ , & compleatur parallelogrammum  $IKCL$ ; (†) erit ex naturâ sectionum conicarum ut

$EC$  ad  $CA$  ita  $CA$  ad  $CL$ , & ita divisim  $EC - CA$  ad  $CA - CL$ , seu  $EA$  ad  $AL$ , & compositè  $EA$  ad  $EA + AL$  seu  $EL$  ut  $EC$  ad  $EC + CA$  seu  $EB$ ; ideoque, ob similitudinem triangulorum  $EAF$ ,  $ELI$ ,  $ECH$ ,  $EBG$ ,  $AF$  ad  $LI$  ut  $CH$  ad  $BG$ . Est itidem, ex naturâ sectionum conicarum,  $LI$  seu  $CK$  ad  $CD$  ut  $CD$  ad  $CH$ ; (†) atque ideo ex æquo perturbatè  $AF$  ad  $CD$  ut  $CD$  ad  $BG$ . Q. E. D.



Co-

(†) \* Erit ex naturâ sectionum conicarum &c. (per prop. 37. 38. Lib. 1. Conic. Apoll. vide cor. 2. Lem. V. de Conic. p. 121.).

(†) \* Cum sit  $EA:EL=EC:EB$ ; & ob similitudinem triangulorum  $EAF$ ,  $EIL$  sit  $EA:EL=AF:LI$ , seu  $CK$ , & ob similitudinem triangulorum  $ECH$ ,  $EBG$ ,

# PRINCIPIA MATHEMATICÆ. 239

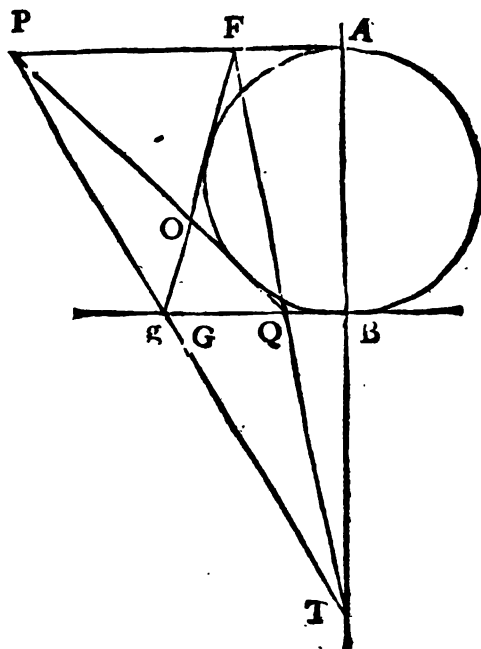
*Corol. 1.* Hinc si tangentes duæ  $FG$ ,  $PQ$  tangentibus paralle- De Mo-  
lis  $AF$ ,  $BG$  occurrant in  $F$  &  $G$ ,  $P$  &  $Q$ , seque mutuo secent TU COR-  
in  $O$ ; erit ex æquo perturbatè  $AF$  ad  $BQ$  ut  $AP$  ad  $BG$ , PORUM.  
(<sup>1</sup>) & divisim ut  $FP$  ad  $GQ$ , atque ideo ut  $FO$  ad  $OG$ . LIBER  
PRIMUS.

*Corol. 2.* (<sup>u</sup>) Unde etiam rectæ duæ  $PG$ ,  $FQ$ , per puncta  
 $P$  &  $G$ ,  $F$  &  $Q$  ductæ, concurrent ad rectam  $ACB$  per cen-  
trum figuræ & puncta contactuum  $A$ ,  $B$  transeuntem.

LEM:

$EBG$  sit  $EC:EB=CH:BG$ , erit  $AF:CK$  & similiter  $BQ:CD=CD:AP$ , seu  
 $=CH:BG$ , & quia (ex conic. loco cita-  $CD:BQ=AP:CD$ , adeoque  $AF \times$   
to)  $CK:CD=CD:CH$ , erit  $AF \times CK$   $CD:BQ=AP:CD$ , adeoque  $AF \times$   
 $CK \times CD=CH \times CD:BG \times CH$ , hoc est  $AF:BQ=AP:BG=AP-AE$ :  
hoc est,  $AF:CD=CD:BG$ .  $BG-BQ=FP:GQ=FO:OG$ , ob

(<sup>1</sup>) \* Est enim  $AF:CD=CD:BG$ , familia triangula  $FOP$ ,  $GOQ$ .

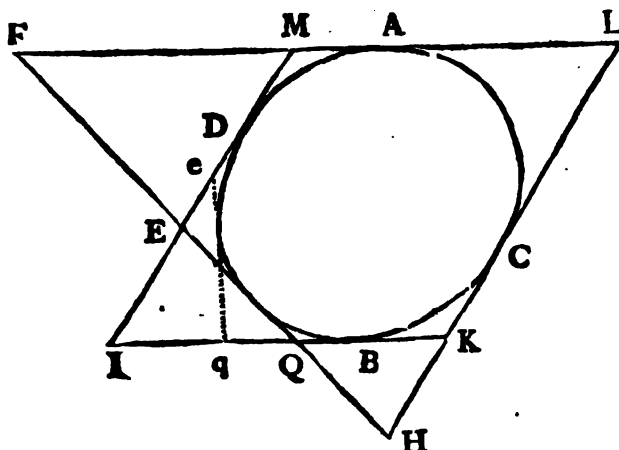


(<sup>u</sup>) \* Agatur enim recta  $FQ$ , ipsi  $AB$   $BT=AP:Bg$ , sed per coroll. 1.  $AF:$   
occurrens in  $T$ , & jungatur  $PT$ , rectam  $BQ=AP:BG$ , est igitur  $BG=Bg$  ac  
 $BG$ , tecans in  $g$ , erit  $AF:BQ=AT:$  proinde punctum  $g$ , cum  $G$  coincidit.  
F f 3

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant sectionem quamcunque conicam, & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud à quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium est ad abscissarum alteram.*

Tangant parallelogrammi *MLIK* latera quatuor *ML*, *IK*, *KL*, *MI* sectionem conicam in *A*, *B*, *C*, *D*, & secet tangens quinta *FQ* hæc latera in *F*, *Q*, *H* & *E*; sumantur autem laterum *MI*, *KI* abscissæ *ME*, *KQ*, vel laterum



*KL*, *ML*, abscissæ *KH*, *MF*: dico quod fit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*; & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per corollarium primum lemmatis superioris est *ME* ad *EI* ut *AM* seu *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. *Q. E. D.* Item *KH* ad *HL* ut (\*) *BK* seu *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q. E. D.*

*Corol. 1.* Hinc si datur parallelogrammum *IKLM*, circa datam sectionem conicam descriptum, dabitur rectangulum *KQ* × *ME*, ut & huic æquale rectangulum *KH* × *MF*. Æquantur enim rectangula illa ob similitudinem triangulorum *KQH*, *MFE*.

*Co-*

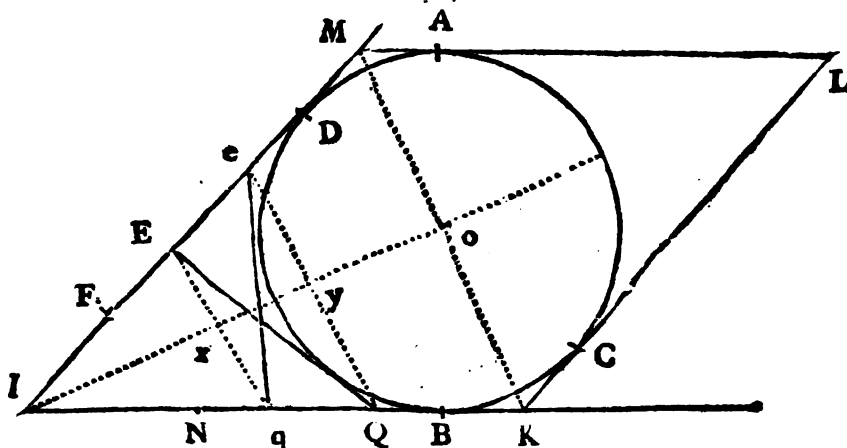
(\*) \* Nam si puncta contactuum *A*, & *B*, recta jungantur, hæc transibit per centrum commune sectionis conicæ & parallelogrammi, (336) adeoque erit *AM* = *BK*.

## 23 I

PORUM  
LIBER  
PRIMUS.

PRO.

(y) \* Nam rectangula  $KQ \times ME, Kq \times Me$ , æquantur rectangulo  $MI \times BK$ .



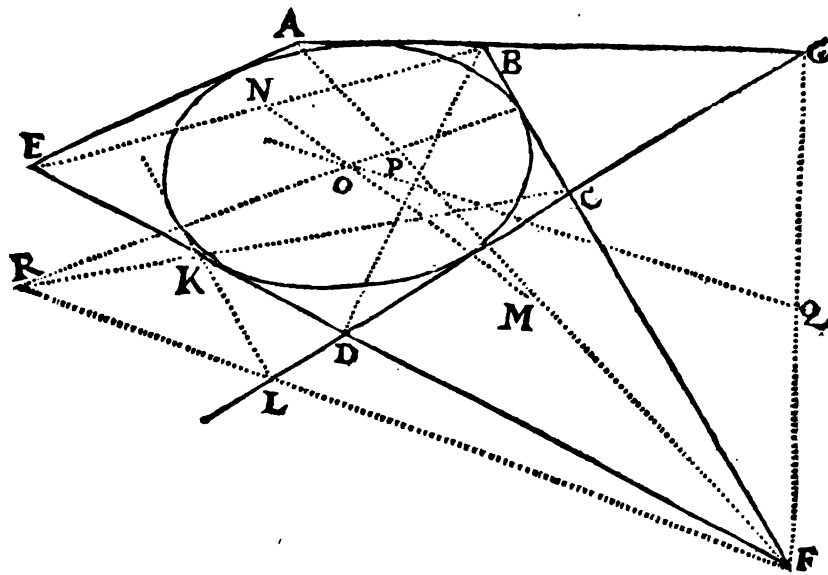
(a) Hinc si lineæ quatuor ut  $ED$ ,  $eQ$ ,  $EQ$ ,  $QB$  sectionem Conicam tangent & sibi mutuo occurrant in punctis  $e$ ,  $E$ ,  $q$ ,  $Q$  junganturque puncta opposita  $e$ ,  $Q$  &  $E$ ,  $q$ , bifariamque dividantur lineæ  $eQ$ ,  $Eq$ , lineæ eas bisequant erit lo-

cus centri figuræ : Idque semper verum  
erit quamcumque figuram faciant lineæ  
ED, e q, E Q, Q B five sese decussent  
five Trapezium constituant, Concipiatur  
illas Diametros duci quarum vertex est in  
puncto contactûs harum linearum donec  
occurrant curvæ altero suo vertice, Tan-  
gentes in eo vertice ductæ erunt paralle-  
læ prioribus : Dabuntur ergo Parallelæ  
duabus lineis ED, QB, quæ erunt Tan-  
gentes curvæ, ideoque fiet ut in Lemma-  
tis Hypothesi Parallelogrammum MIKL  
constans quatuor Tangentibus quarum op-  
positæ erunt inter se Parallelæ, & Tangen-  
tes E Q & e q considerari poterunt ut  
quinta & sexta Tangens de quibus agitur  
in hoc Lemmate, ideoque per ejus cor-  
ollarium 3. si bisecentur lineæ E q & Q &  
reflexa per bisecctionum puncta agatur transi-  
bit hæc per centrum Sectionis Conicæ &c.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

## PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

*Trajectoriam describere, quæ rectas quinque positione datas con-  
tinget.*



Dentur positione tangentes  $ABG$ ,  $BCF$ ,  $GCD$ ,  $FDE$ ;  $EA$ . Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibufvis contentæ  $ABFE$  diagonales  $AF$ ,  $BE$  biseca in  $M$  &  $N$ , & ( per corol. 3. lem. xxv. ) recta  $MN$  per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Rursus figuræ quadrilateræ  $BGDF$ , sub aliis quibufvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales ( ut ita dicam )  $BD$ ,  $GF$  biseca in  $P$  &  $Q$  : & recta  $PQ$  per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 233

go centrum in concursu bifecantium. Sit illud  $O$ . (<sup>b</sup>) Tangenti cuivis  $BC$  parallelam age  $KL$ , ad eam distantiam ut centrum  $O$  in medio inter parallelas locetur, & acta  $KL$  tanget trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas  $GCD$ ,  $FDE$  in  $L$  &  $K$ . Per harum tangentium non parallelarum  $CL$ ,  $FK$  cum parallelis  $CF$ ,  $KL$  concursus  $C$  &  $K$ ,  $F$  &  $L$  age  $CK$ ,  $FL$  concurrentes in  $R$ , & recta  $OR$  ducta & producta secabit tangentes parallelas  $CF$ ,  $KL$  in punctis contactuum. Patet hoc per corol. 2. lem. xxiv. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per construct. prob. xiv. trajectoriam describere. *Q. E. F.*

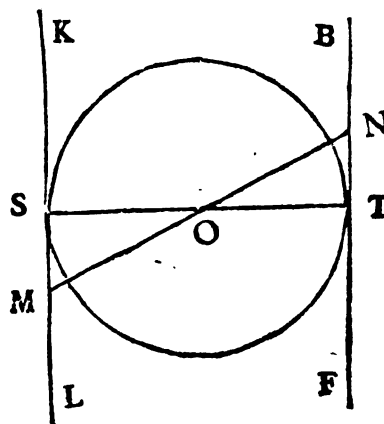
## Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel asymptoti, includuntur in præcedentibus. (<sup>c</sup>) Nam datis punctis & tangentibus unâ cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes à centro ex alterâ parte æqualiter distantes. Asymp-

(b) 337. Datis sectionis conicæ centro  $O$ , & tangente quâvis  $BF$ , altera tangens  $LK$  datæ parallela facile invenitur; Nam per centrum  $O$  ducatur recta quævis infinita  $MON$  tangenti datæ occurrens in  $N$ , & sumptâ  $OM=ON$  per  $M$  ducatur  $MK$  tangenti datæ  $FB$  parallela, erit  $MK$  tangens; si enim per punctum contactus  $T$  & centrum  $O$  agatur sectionis diameter  $TOS$ , erit  $SO=OT$  & tangens in  $S$  tangenti in  $T$  parallela lineam  $NOM$  ita secabit in  $M$ , ut sit  $MO=ON$ , ob,  $SO:OT=MO:ON$ .

(c) 338. Hinc datis præter centrum tribus tangentibus non parallelis vel duabus tangentibus convergentibus & puncto, vel tangente & punctis duobus, vel punctis tribus, dantur sex tangentes, vel tangentes quatuor & puncta duo, vel tangens & puncta quatuor, vel puncta sex, quibus datis trajectoria describi potest per prop. (27. 26. 25. 24. 23. 22.). Ex datis centro,

Tom. I.



alterutro axe, & duabus tangentibus non parallelis, vel tangente & puncto trajectoriarum Ellipticæ & Hyperbolicæ ex lemmatis sequentibus facile describuntur.

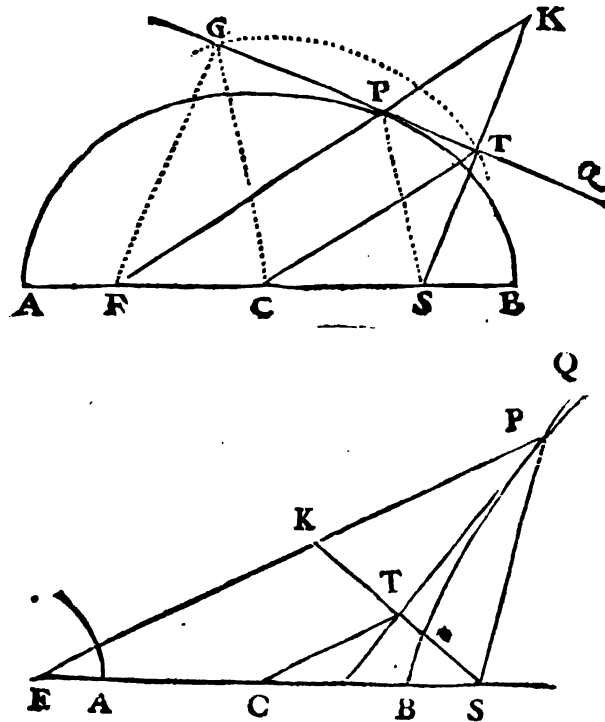
G g

339.

## 234 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

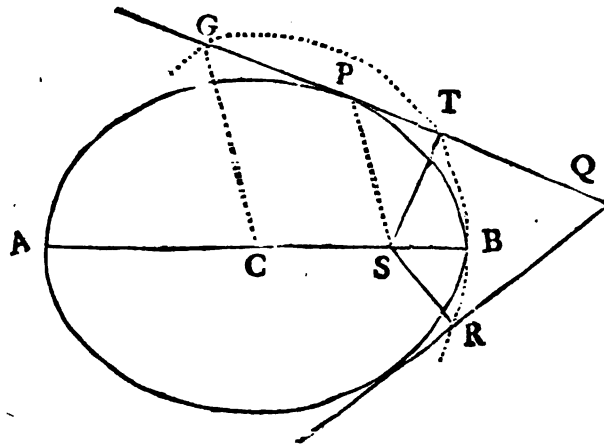
DE MO-  
TU COR-  
FORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

Afymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans ( si ita loqui fas sit ) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Afymptoton, atque constructiones problematum præcedentium vertentur in constructiones ubi Afymptotos datur.



339. *Lemma.* Si ex sectionis conicæ umbilico utrovis S demittantur ad tangentem PQ normales ST, FG, rectæ CT, CG centrum sectionis C & puncta intersectionum T, G jungentes æquales erunt semiaxi principali CB, & parallelæ lineis FP, SP ex altero umbilico F & S ad punctum contactus P ductæ. Prolocantur enim FP, ST, donec concurrant in K, & erit ( per Lem. XV.

*Newt.* )  $FK = 2CB$ ,  $KT = TS$ , cumque sit etiam  $FC = CS$ , erit  $ST : SK = SC : SF$ , & ideo quia latera SK SF secantur proportionaliter in T & C erit CT parallela FK sive FP, ideoque erit  $ST : SK = CT : FK$  & quia  $ST = \frac{1}{2} SK$  erit CT æqualis  $\frac{1}{2} FK$ , seu æqualis CB. Eodem modo probabitur, CG esse æqualem CB & parallelam lineæ PS.



340. Datis centro  $C$ , duabus tangentibus  $PQ$ ,  $EQ$  convergentibus & axe principali  $AB$ , describitur sectio conica. Nam si centro  $C$  & intervallo  $CB$  æqualis semiaxi principali describatur circulus tangentes secans in  $T$  &  $R$ , agantur tangentibus perpendiculares  $TS$ ,  $RS$ , concurrentes in  $S$ , erit punctum  $S$ , alteruter umbilicus quo dato cum centro  $C$ , dantur positio axis principalis  $CB$ , & ipsius longitudo ac umbilici duo.

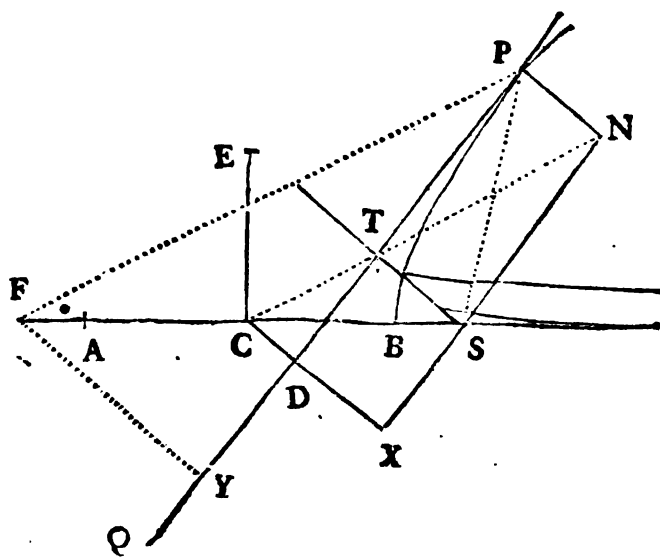
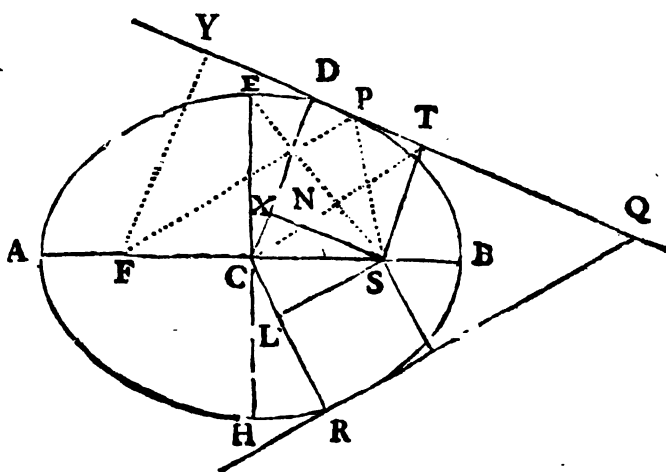
341. Datis centro  $C$ , tangente  $PQ$ , & puncto contactus  $P$ , cum axe principali, trajectory conica describitur. Centro enim  $C$ , & intervallo æquali semiaxi principali describatur circulus tangentem secans in  $T$  &  $G$ ; in  $T$  excitetur perpendicularum  $TS$ , & juncta  $CG$ , per punctum contactus ducatur  $PS$  ipsi  $CG$  parallela perpendicularo  $TS$  occurrens in  $S$ , erit  $S$  umbilicus (339).



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

342. Si ex centro  
C sectionis conicæ ad  
tangentem PQ, de-  
mittatur perpendicu-  
laris CD, & ex altero  
umbilico S ad CD  
agatur normalis SX,  
fisque CE semiaxis  
minùs principalis, erit  
in ellipsi  $CX^2 = CD^2$   
 $= CE^2$ , & in hyper-  
bolâ  $CX^2 = CD^2 +$   
 $CE^2$ , & demissa ex  
umbilico in tangentem  
perpendiculari ST,  
junctâque CT, rectam  
SX secante in N, erit in  
utrâque sectione XN  
æqualis DP distan-  
tiæ puncti contactûs P  
à perpendiculari CD;  
Nam in Ellipsi  $CS^2$   
 $= CI^2 (CB^2) - CE^2$ ,  
in Hyperbolâ  $CS^2 =$   
 $CT^2 + CE^2$ , & in  
utrâque sectione  $CS^2$   
 $= CX^2 + SX^2 = CX^2$   
 $+ DT^2$ ; Ergò in El-  
lipsi  $CX^2 + DT^2$   
 $= TT^2 - CE^2 = CD^2$   
 $+ DT^2 - CE^2$ , &  
hinc  $CX^2 = CD^2$   
 $- CE^2$ , & in hyper-  
bolâ  $CX^2 + DT^2$   
 $= CT^2 + CE^2 =$   
 $CD^2 + DT^2 + CE^2$ ,  
adeoque  $CX^2 = CD^2$   
 $+ CE^2$ . Q. e. r.

Ex altero umbilico  
F, in tangentem de-  
mittatur perpendicu-  
laris FY, & junctis FP,  
SP, similia erunt tri-  
angula FPY, SPT,  
ob angulos æquales (per natur. Tangentium  
& focorum) FPY, SPT, & STP, FYP  
rectos; & quoniam FP & CT, FY &  
CD sunt parallelæ, similia quoque erunt  
triangula CTD, FPY, ideòque duo trian-  
gula CTD, SPT sunt similia; quare  $CD:$   
 $DT = ST (DX): PT$ , & divisim  $CD:$   
 $DT = CD - DX: DT - PT$ , & compo-  
sitè  $CD:DT = CD + DX:DT +$



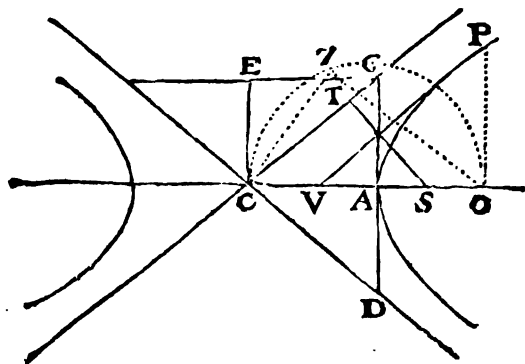
PT. Undè quoniam in Ellipsi  $CD - DX$   
 $= CX$ , &  $DT - PT = DP$ ; in hyper-  
bolâ verò  $CD + DX = CX$ , &  $DT +$   
 $PT = DP$ , erit in utrâque sectione  $CD:$   
 $DT = CX:DP$ . Verùm ob SX tangenti  
DT parallelam,  $CD:DT = CX:XN$ ,  
ergò  $XN = DP$ . Q. e. 2.

343. Hinc datis centro C, semiaxe mi-  
nùs principali CE, tangentibus duabus

non

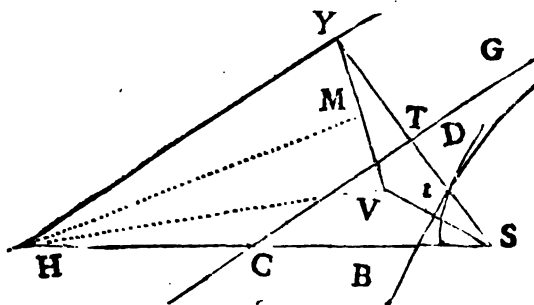


DE MOTU CORP. PORUM. lela est & positione data. Hinc facile erit problematum sectionis IV. constructiones ad hyperbolam transferre ubi asymptotus alterutra cum umbilico data est.



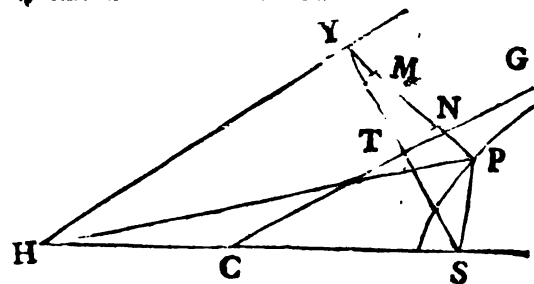
Datis umbilico S; axe principali, & asymptoto CG, invenitur axis positio, demittendo ex umbilico S ad asymptotum perpendicularem ST, & capiendo TC æqualem semiaxi dato, est enim C hyperbolæ centrum, CS axis principalis positio, TS semiaxis minus principalis (348).

Datis umbilico & asymptoto describitur hyperbola specie data, per constr. Caf. 3. Prop. XIX. vel brevius, observando datam esse TS semiaxem minus principalem, unde ob datam axium rationem, dabitur centrum & axium positio cum alterâ asymptoto, & hyperbola describitur (348).

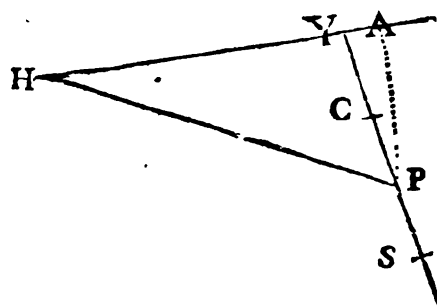


Datis asymptoto, umbilico & tangente; invenitur umbilicus alter ac proinde axis transversus positio & centrum. Sit enim asymptotus data CG, umbilicus S, tangens BD, ex umbilico S, ad asymptotum &

tangentem, demittantur perpendiculara ST; St, & producantur ad Y & V ut sint TY = ST, & V = St; per punctum Y, agatur YH, asymptoto parallela, & juncta YV, bisecetur in M, perpendicularo MH; perpendiculari huius & rectæ YH communis intersectio H, est umbilicus alter, recta enim HY, asymptoto parallela transit per punctum contactus asymptoti, adeoque ob TY = TS, transit etiam per umbilicum H; Porro rectæ YH, VH, per umbilicum H, ductæ sunt æquales axi principali hyperbolæ per Lem. XV., & ideo æquales inter se; quare perpendiculum HM, ex umbilico H in rectam YV demissum eam in M bifecat.



Datis asymptoto CG, puncto P, & umbilico S, invenitur umbilicus alter H, demisso ad asymptotum perpendicularo ST, &umptâ TY = ST, actâque YH asymptoto parallela jungatur YP, & in eâ capiatur MN = SP, & ita locetur ut sit YM = PN, hyperbola umbilicis Y, P, & axe principali MN, descripta, rectam YH secabit in altero umbilico H quæsito. Nam PS seu MN est rectarum HY, HP differentia, quæ semper æqualis est axi principali HY.



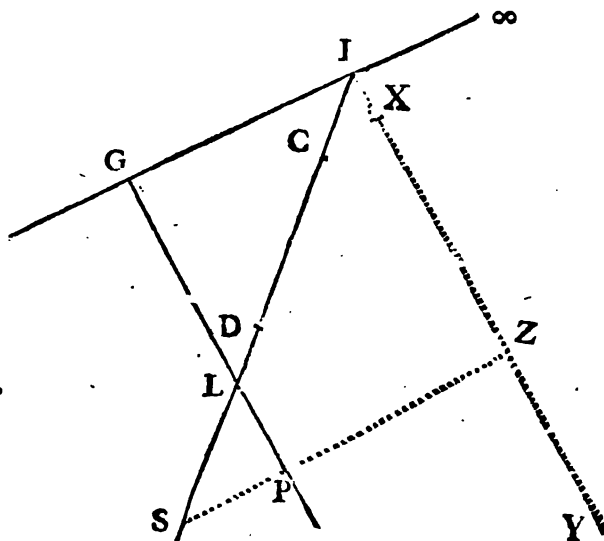
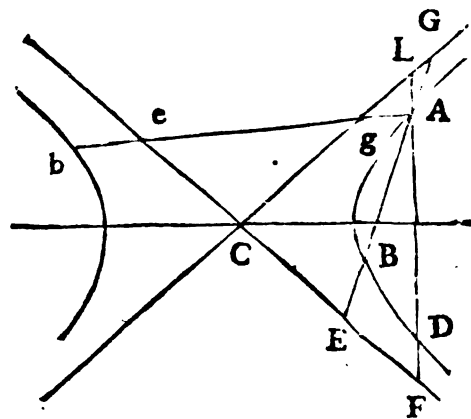
Aliter. Huc redit problema, datis in triangulo HYP latere PY, angulo Y, & latere HY, HP differentia PS, invenire

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

venire latera. Ex puncto P, in HY, demittatur perpendicularis PA, capiatur laterum HP, HY, differentia PC = PS, & fumatur YH ad CY, ut est YS ad SC  $\mp$  2YA, scribendo  $-2YA$ , si angulus HYP est obtusus, &  $+2YA$ , si acutus, & delendo  $\mp YA$ , si fuerit rectus, erit H punctum quæsitum, facilis est demonstratio ob angulum rectum A.

Sectionis V<sup>a</sup>. problemata, ubi asymptotus alterutra data est, ad sequentia revocantur.

deinde age SP aſymptoto GI parallelam, LIBER  
hæc ſecabit tangentem GI, in puncto PRIMUS.  
contactûs P; nam lî P ſupponatur eſſe punctum  
contactûs, & per punctum I agatur IY tan-  
genti GL parallela quæ occurrat hyperbolæ

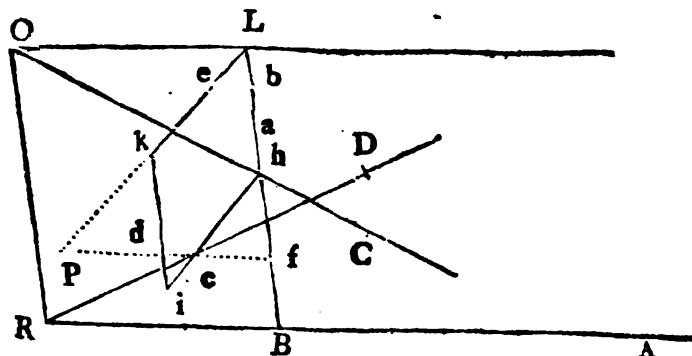


349. Data asymptoto CG, cum tribus punctis A, D, B, vel b, hyperbolam describere. Per punctum quodvis A, datum & alia duo D, B, vel b, agantur lineæ infinitæ AD, AB vel Ab, asymptoto datæ occurrentes in L & G, vel g; tum capiuntur FD = AL, BF = GA, vel be = gA, juncta FE, aut Fe, erit asymptotus altera (per prop. 8<sup>am</sup> lib. 2. Conic. Apoll. per Lem. I. de Conic. p. 115.) quare (346.) hyperbola describitur, cum facili inveniri possint quinque sectionis puncta, per angulos mobiles organicè potest describi.

350. Datis asymptoto  $GI$ , tangente  $GL$ , punctisque duobus  $C, D$ , Hyperbolam describere, constructio & demonstratio eadem ferè sunt ac problematis (XVI.).

Per puncta duo data C, D, age rectam infinitam CD, asymptoto & tangenti occurrentem in punctis I, L, aequidistans in S, ut sit IS ad LS, ut est media proportionalis inter CI & LD ad mediam proportionalem inter CL & LD,

in X & Y, & in ea fumatur IZ, media proportionalis inter IX & IY erit ( *per prop. 3. & 10. lib. 2. Conic. Apoll.* )  $IX \times IY$  five  $IZ^2 = PG^2$ , fit enim  $\infty$  punctum contactus Hyperpolæ & Afymptoti erit  $\infty$   $I^2 = \infty G^2 = IX \times IY : PG^2$  ( *per Cor. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.* ) fed cum  $\infty$  I &  $\infty$  G ſint lineæ infinitæ quantitate finitâ GI differentes, pro æqualibus habentur, ergo etiam  $IX \times IY$  five  $IZ^2 = PG^2$ , atque adeò  $IZ = PG$ , & conſequenter juncta PZ, parallela eſt afymptoto GI; recta ZP producta ſecet rectam IL, in puncto aliquo S, & ob ſimilia triangula SIZ, SLP, erit  $IZ^2 : LP^2 = IS^2 : LS^2$ ; verum ( *vid. Not. ad probl. X VI. aut Lem. III. de Conic. p. 117.* )  $XI \times IY (IZ^2) : LP^2 = CI \times ID : CL \times LD$ ; ergò  $IS^2 : LS^2 = CI \times ID : CL \times LD$ , quare ſi recta IL ita ſecetur in S, ut ſit  $IS^2 : LS^2 = CI \times ID : CL \times LD$ , & agatur SP, afymptoto GI parallela, erit P punctum contactus. Datis autem tribus punctis C, P, D, Hyperbola deſcribitur ( 349. )



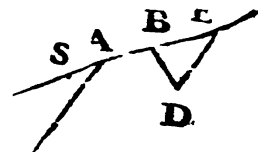
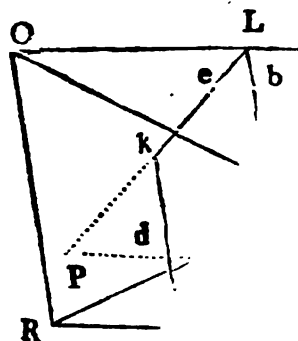
351. Datis asymptoto OL, duabus tangentibus OC, RD, & puncto A, Hyperbolam describere; ( solutio facile deducitur ex problemate XVII ).

Per concurrsum O asymptoti OL cum tangente OC, & concurrsum R tangentis alterius RD cum recta RA quæ per punctum datum A & punctum contactus asymptoti transit, seu quæ est asymptoto parallela; age rectam infinitam OR, eaque adhibita pro radio ordinato primo, OL verò pro radio ordinato novo usurpata, sumptisque ordinatis novis asymptoto parallelis ( ad majorem constructionis facilitatem ), transmutetur figura per Lem. XXII. in figuram novam, nimirum linea BA in lineam Ba, ( 330 ), punctum A in a, linea RD in ik ipsi BL parallelam ( 329 ) OC in ih, OL in kL ipsi ih parallelam ( 327 ) & punctum contactus asymptoti infinite distans transferetur in L; Nam punctum contactus asymptoti est communis intersectio Linearum RA, OL infinitarum, & idèd transfertur in L communem intersectionem rectarum kL, BL parallelogrammi h i k L; Tria ergo latera hi, ik, kL tangunt novam sectionem conicam quæ transire debet per punctum a, dicantur c & d puncta contactuum linearum hi, ik, sic invenietur punctum c, sumatur Radix quadrata facti  $hL \times ha$  & addatur

lineæ ik, illa summa erit ad duplum lineæ hi ut ea ipsa Radix quadrata ad portionem hc. Hoc est  $ik + \sqrt{hL \times ha} : zhi = \sqrt{hL \times ha} : hc$ . Nam ( per Cor. 2. & 3. Lem. III. de Conic. p. 118. ) est  $dk^2 : kL^2 = di^2 : ic^2 = hL \times ha : hc^2$  inde est  $dk : kL = di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$ ; & sumendo summam Antec. & Conseq. est  $dK + di + \sqrt{hL \times ha} : KL + ic + hc$  five  $ik + \sqrt{hL \times ha} : kL + hi (zhi) = \sqrt{hL \times ha} : hc$ : Invento autem puncto c invenitur punctum d, si quidem est  $di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$ : Construitur autem hæc solutio capiendo hf, æqualem mediæ proportionali inter Lh & ah, & producta Lk ad P, ut sit  $kP = kL$ , agendo per f & P rectam fP, illa fP latera hi, ik secabit in punctis quævis c, d; nam ob parallelas ch, PL & ik, fL est  $Lf(ik + \sqrt{ah \times hL}) : LP (2kL \text{ five } zih) = hf(\sqrt{ah \times hL}) : hc$ ; &  $hc : hf = ic : id$ ; per inversas operationes Lem. XXII. ( 331 ), transferantur puncta c, d, in figuram primam, nimirum in C, D, & data erunt tria hyperbolæ puncta D, C, A, cum asymptoto OL, quare describetur hyperbola ( 349 ).



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



351. Datis asymp-  
gentibus OC, RI  
bolam describere  
tur ex problema

Per concursu  
tangente OC  
alterius RD  
tum datum

toti transi-

age recte

pro radi-

dio or-

dina-

jore

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

m

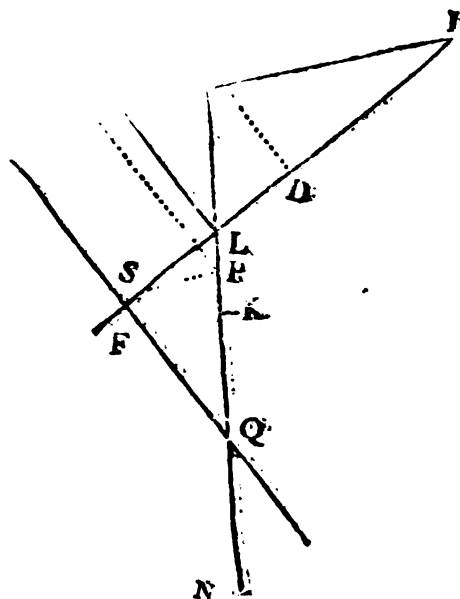
m

m

m

m

m

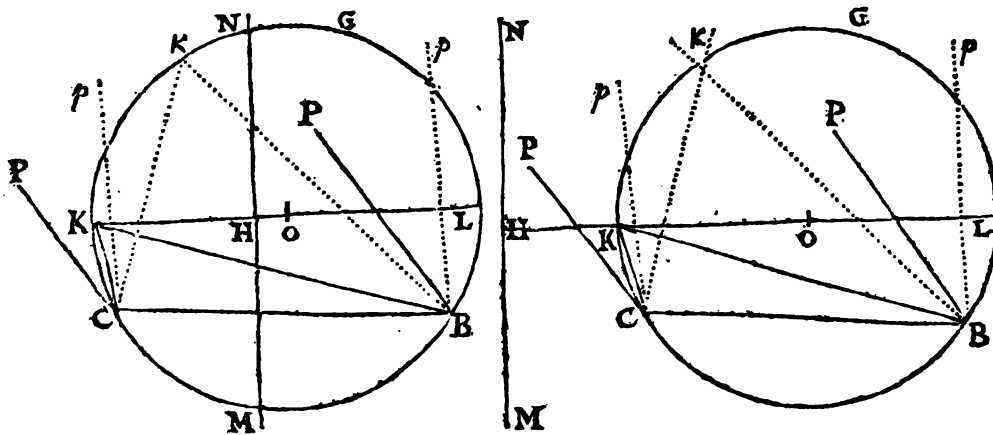


unctum contactus tangenti G Q. Nam  
si supponamus P, D esse puncta contac-  
tum, & C Q asymptotum alteram tan-  
genti G Q occurrentem in Q & alteri  
asymptoto in C, & ex punctis D, P dua-  
tas intelligatur rectæ DM, PR & PS,  
asymptotis CI & CQ parallelæ ac DM,  
PR asymptoto CI occurrant in M, R,  
PS verò tangenti FI in S, erit GR =  
RG, & CM = MI; & ob similia triangu-  
la GLI, PLS, GL:LP = I.L:LS, adeo  
quo componendo GP:LP = IS:LS, sed  
(321.) IS:LS = DI:LD; quare GP:  
LP = DI:LD, ac proinde GP + LP:  
GP = LI:DI. Porro in triangulis simi-  
libus I.LH, I.DM, LI²:HI x LH =  
DI²:DM x MI, & in triangulis simi-  
libus GLH, GRP, GH x LH:GL² =  
GR x RP:GP² = DM x MI:GP², ob  
MI x DM = CM x DM = CR x RP =

GR x RP ex natura hyperbolæ inter asymp-  
totos, quare per compositionem rationum  
LI² x GH x LH:GL² x HI x LH =  
DI²:GP² = LI² x GH:GL² x HI.  
Verum (per construct.) GH:HI = GL²:  
GL x LN, & GK² = GL x LN, ac  
proinde GH:HI = GL²:GK², unde  
DI²:GP² = LI² x GL²:GL² x GK² =  
LI²:GK², & DI:GP = LI:GK,  
atque adeo LI:DI = GK:GP; sed su-  
pra invenimus GP + LP:GP = LI:DI,  
ergo GK:GP = GP + LP:GP, atque

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 243

Postquam trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbilicos ejus hâc methodo. In constructione & figurâ lemmatis **TU COR-  
xxi.** fac ut angulorum mobilium  $PBN$ ,  $PCN$  crura  $BP$ ,  $CP$ , **LIBER  
PRIMUS.** quorum concursu trajectoria describebatur, sint sibi invicem parallela, eumque servantia situm revolvantur circa polos suos  $B$ ,  $C$  in figurâ illâ. Interea vero describant altera angulorum illorum crura  $CN$ ,  $BN$ , concursu suo  $K$  vel  $k$ , circulum  $BGKC$ .



Sit circuli hujus centrum  $O$ . Ab hoc centro ad regulam  $MN$ , ad quam altera illa crura  $CN$ ,  $BN$  interea concurrebant, dum trajectoria describebatur, demitte normalem  $OH$  circulo occurrentem in  $K$  &  $L$ . Et ubi crura illa altera  $CK$ ,  $BK$  concurrunt ad punctum illud  $K$  quod regulæ propius est, crura prima  $CP$ ,  $BP$  parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, si crura eadem concurrunt ad punctum remotius  $L$ . Unde si detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. (d) Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axiom

ita  $GK = GP + LP$ ; seu  $GL + LK = GL + 2LP$ , ac proinde  $LK = 2LP$ , &  $LP = \frac{1}{2}LK$ ; invento autem puncto contactus  $P$ , si capiatur  $PQ = PG$ , & per punctum  $Q$ , agatur  $QC$ , ipsi  $LH$  parallela, crit  $QC$  altera asymptotus, & hyperbola describetur (346).

(d). \* Vid. Not. 314.

Hh 2



(e) \* Vid. Not. 315.

gens circulum radio  $OH$  descriptum; etia. *N.M. regula* cujus ope transfloria distribuitur.  
(314).

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 245

$C, B$ , tertium dabit angulos mobiles,  $PCK, PBK$ ; his autem datis describi potest circulus  $BGKC$ . Tum ob datam specie trajectoriam, dabitur ratio  $OH$  ad  $OK$ , ideoque ipsa  $OH$ . Centro  $O$  & intervallo  $OH$  describe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & transfit per concursum crurum  $CK, BK$ , ubi crura prima  $CP, BP$  concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa  $MN$  cujus ope trajectoria describetur. (g) Unde etiam vicissim trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in datâ quâvis sectione conicâ inscribi potest.

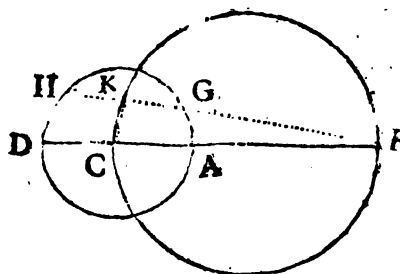
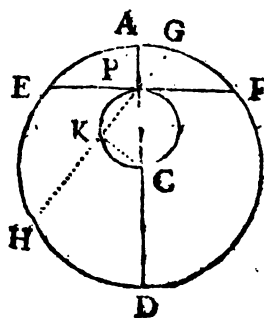
Sunt & alia lenimata quorum ope trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. (h) Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam conicâ sectionem in punctis duobus interfecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam conicâ sectionem ejusdem speciei cum priore, atque

Si describenda foret parabola, ducenda esset ex puncto  $R$  recta  $RN$ , circulum  $CKB$  tangens; nam in parabola punctum  $H$ , coïncidit cum puncto  $K$  (313).

Quoniam autem ex puncto  $R$ , duæ tangentibus ut  $RN$  duci possunt, patet duas trajectorias specie datas per data quatuor puncta posse describi.

(g) \* Nam si describatur trapezium quodvis specie datum, & huic circumscribatur sectio conica datæ similis Methodo in notâ præcedente expostâ, deinde in sectione conicâ datâ quatuor agantur lineæ in eâ similiter positæ ac quatuor trapezii latera in sectione trapezio circumscriptâ, habebitur trapezium specie datum in datâ sectione conicâ inscriptum.

(h) \* Hoc Lemma facillè demonstratur in circulo. Intra vel extra circulum  $A F D E$  datum sit punctum  $P$  per quod & per centrum circuli  $C$  agatur  $PD$ ; tum diametro  $PC$  describatur circulus  $PKCP$ , chorda quælibet  $GH$  per punctum  $P$  ducta, bisariam divisa est in puncto  $K$  ubi circulo  $PKC$  occurrit; Nam junctâ  $K C$ , erit angulus  $CKP$  rectus, ac proinde chorda  $HG$  bisecta in  $K$ .



Hh 3

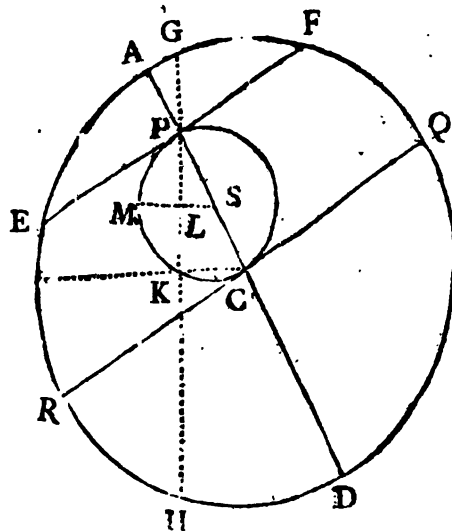
De Mc-atque axes habentem prioris axibus parallelas. Sed proporo ad  
TU COR- magis utilia.

## PORUM.

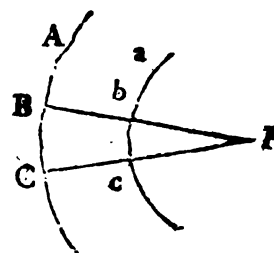
LIBER

**PRIMUS.**

**LEM.**



parallelæ; sed quia in triangulis similibus  $PSL, PCK$  est  $PS = SC$  erit quoque  $PL = LK$ , ac proinde  $PLK$  erit ordinata ad diametrum  $SM$ , adeoque  $GKH$  erit ordinata ad diametrum  $NC$ ; quare  $GK = KH$ . Ergo punctum bisectiōis  $K$  tanget curvam priori similem & axes habentem prioris axibus parallelas. Eadem est demonstratio, si punctum  $P$  extra sectionem sumat.

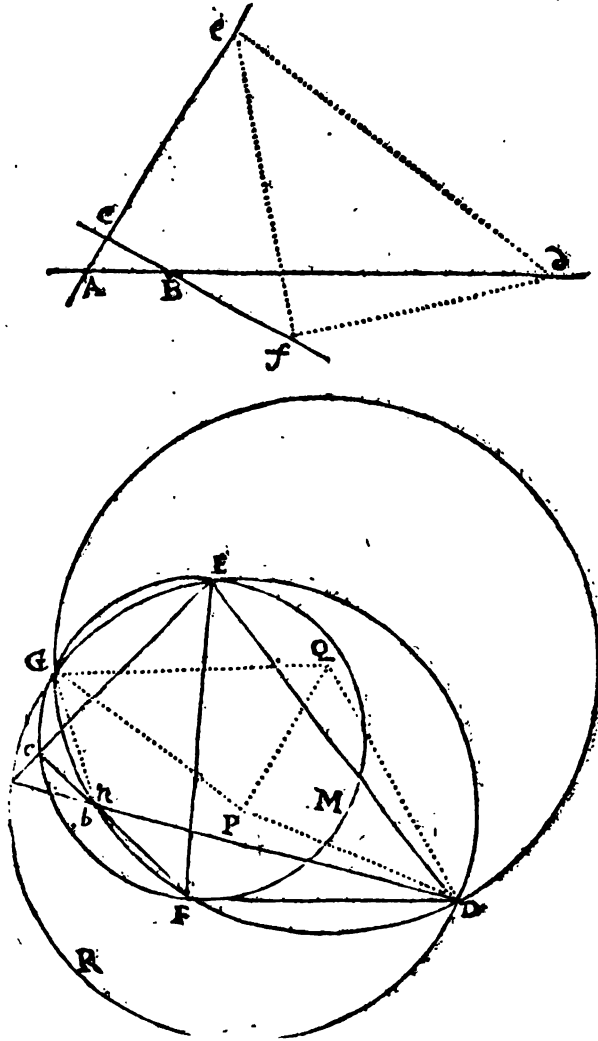


\* Idem Lemma pari facilitate in cæteris sectionibus conicis demonstratur. Datum sit punctum P, per hoc & per centrum C sectionis conicæ A F D E agatur diameter A D, tùm diametro P C, quæ similis sit diametro A D, describatur alia sectio conica P M K C, ejusdem speciei cum darâ, & diameter conjugata ipsius P C, similis erit & parallela diametro R Q, conjugatæ ipsius A D, & quia in duabus figuris similibus, si duo latera homologa parallela sint, cætera omnia latera similia sunt eam parallela, ambarum sectionum conicarum similes diametri omnes, adeoque & axes paralleli erunt; agatur nunc per punctum darum P, chorda quævis G P H, sectioni P M C occurrens in K, dico esse  $KH = KG$ . Nam jungatur C K, & producatur donec trajectory A H D occurrat in N, & per centrum S trajectory P K C, agatur S M parallela C K, chordæ P K occurrens in L & sectioni in B, erunt S M, N C diametri similes, & earum ordinatæ

354. *Adjungemus aliud Lemma maxime*  
*universale.* Si ex puncto quovis P dato du-  
 catur recta P B, curvæ cuilibet A B C oc-  
 currens in B, & recta illa P B ita dividat-  
 ur in b, ut sit semper P b ad P B in ra-  
 tione datâ, punctum b, tanget curvam a b c  
 ejusdem speciei & ordinis cum curvâ A B C,  
 atque lineas habentem similibus curvæ A B C  
 lineis parallelas. Nam si fuerit A B C poly-  
 gonum rectilineum cujus latus unum B C,  
 cum sit (*per hyp.*) P b : P B = P c : P C, si-  
 milia erunt triangula P B C, P b c, & latera  
 B C, b c, parallela & in datâ ratione P B, ad  
 P b, ac proinde totum polygonum A B C  
 simile polygono a b c, & eorum latera  
 homologa parallela erunt. Laterum poly-  
 goni A B C numerus augeatur in infinitum  
 & ipsorum longitudo in infinitum mi-  
 nuatur & duo polygona A B C, a b c mu-  
 tabuntur in curvas similes in quibus latera  
 homologa sunt parallela.

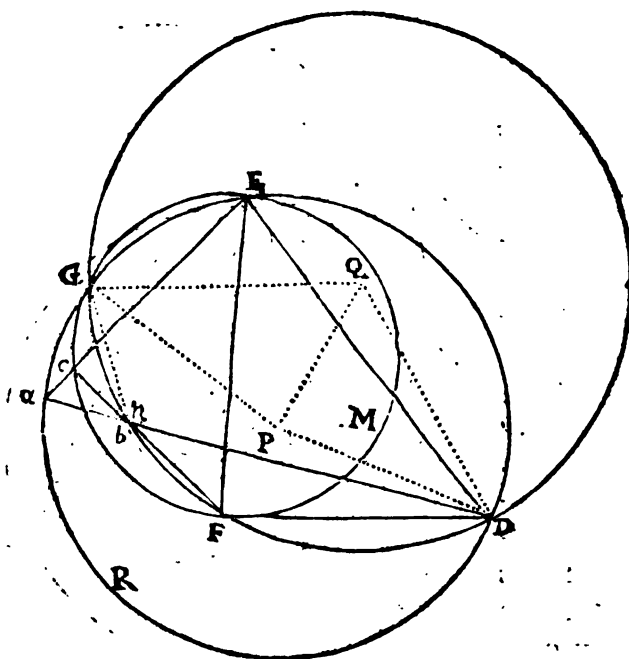
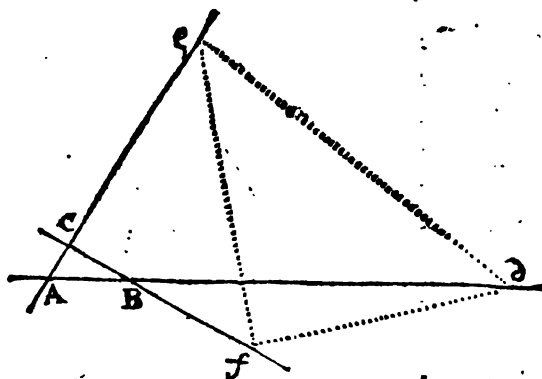
*Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.*

Dantur positione tres rectæ infinitæ  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ , & oportet triangulum  $DEF$  ita locare, ut angulus ejus  $D$  lineam  $AB$ , angulus  $E$  lineam  $AC$ , & angulus  $F$  lineam  $BC$  tangat. Super  $DE$ ,  $DF$  &  $EF$ , describentur circulorum segmenta  $DRE$ ,  $DGF$ ,  $EMF$ , quæ capiant angulos angulis  $BAC$ ,  $ABC$ ,  $ACB$  æquales respectivè. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum  $DE$ ,  $DF$ ,  $EF$ , ut literæ  $DRED$  eodem ordine cum literis  $BACB$ , literæ  $DGFD$  eodem cum literis  $ABCA$ , & literæ  $EMFE$  eodem cum



literis  $ACBA$  in orbem redeant; deinde compleantur hæc segmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in  $G$ , sintque centra eorum  $P$  &  $Q$ . Junctis  $GP$ ,  $PQ$ , cape  $G$  ad  $AB$  ut est  $GP$  ad  $PQ$ , & centro  $G$ , intervallo  $G$  a describe circulum, qui secet circulum primum  $DGE$  in  $a$ . Jungatur tum  $aD$  secans circulum secundum  $DFG$  in  $b$ , tam  $aE$  secans

DE MOLECANS circulum tertium  $EMF$  in  $c$ . Et jam licet figuram  
TU COR.  $ABCdef$  constituere similem & æqualem figuræ  $abcDEF$ .  
FORUM. Quo facto perficitur problema.  
LIBER  
PRIMUS.



. 'Agatur enim' *E* & ipsi *a* *D* occurrens in *n*, & jungantur *a* *G* *b* *G*, *Q* *G*, *Q* *D*, *P* *D*. Ex constructione est angulus *E a D* æqualis angulo *CAB*, & (i) angulus *acF* æqualis angulo *ACB*,

(i)\* *Angulus acF aequalis angulo ACB*,  
nam angulus *FcE* est anguli *acF* atque  
etiam anguli in segmento *EMF* comple-  
mentum ad duos rectos, quare angulus  
*acF*, est aequalis angulo quem capit seg-  
mentum *EMF*, hic autem angulus aequalis  
est angulo *ACB* (per constr.)

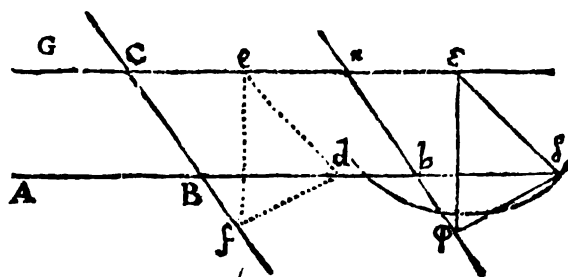
ideoque triangulum  $anc$  triangulo  $ABC$  æquiangulum. Ergo DE Mo-  
 angulus  $anc$  seu  $FnD$  angulo  $ABC$ , ideoque angulo  $FbD$  TO COR-  
 æqualis est; & propterea punctum  $n$  incidit in punctum  $b$ . Por- PORUM.  
 ro angulus  $GPQ$ , (k) qui dimidius est anguli ad centrum  $GP D$ , LIBER  
 æqualis est angulo ad circumferentiam  $GaD$ ; & angulus  $GQP$ , PRIMUS.  
 qui dimidius est anguli ad centrum  $GQD$ , æqualis est com-  
 plemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam  $GbD$ , ideo-  
 que æqualis angulo  $Gba$ ; suntque ideo triangu-  
 la  $GPQ$ ,  $Gab$  similia; &  $Ga$  est ad  $ab$  ut  $GP$  ad  $PQ$ ; id est (ex con-  
 structione) ut  $Ga$  ad  $AB$ . Æquantur itaque  $ab$  &  $AB$ ; &  
 propterea triangu-  
 la  $abc$ ,  $ABC$ , quæ modo similia esse proba-  
 vimus, sunt etiam æqualia. Unde cum tangant insuper trian-  
 guli  $DEF$  anguli  $D$ ,  $E$ ,  $F$  trianguli  $abc$  latera  $ab$ ,  $ac$ ,  
 $bc$  respectivè, compleri potest figura  $ABCdef$  figuræ  $abc$   
 $DEF$  similis & æqualis, atque eam complendo solvetur pro-  
 blema. Q. E. F.

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine da-  
 tæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe trian-  
 gulum  $DEF$ , puncto  $D$  ad latus  $EF$  accedente, & lateribus  
 $DE$ ,  $DF$  in directum positis, mutari in lineam rectam, cu-  
 jus pars data  $DE$  rectis positione datis  $AB$ ,  $AC$ , & pars  
 data  $DF$  rectis positione datis  $AB$ ,  $AC$ , interponi debet;  
 &

(k) \* Angulus  $GPQ$  dimidius est an-  
 guli ad centrum  $GP D$ , recta enim  $PQ$ ,  
 quæ circulorum  $DRGD$ ,  $DGFD$  centra  
 jungit, perpendicularis est ad rectam  $GD$ ,  
 quæ puncta intersectionum circulorum jun-  
 geret adeoque angulum  $GP D$  bisecat.

355. Si trium rectarum  $GC$ ,  $AB$ ,  $CB$   
 positione datarum duæ  $GC$ ,  $AB$  sint pa-  
 rallelæ & oporteat triangulum datum  
 $DEF$  ita locare ut angulus ejus  $D$  lineam  
 $AB$ , angulus  $E$  lineam  $GC$ , & angulus  
 $F$  lineam  $BC$  tangat, centro quovis  $i$  in  
 lineâ  $GC$ , ad arbitrium sumpto & radio  
 $i d$ , æquali  $ED$ , describatur circulus rec-  
 tæ  $AB$ , occurrens in  $d$ ; super basi  $i d$   
 construatur triangulum  $i d \phi$  simile & æ-  
 quale triangulo dato  $EDF$ , & ex  
 angulo illius  $\phi$  agatur  $\phi u$  rectæ  $EC$   
 parallela secans  $GC$  in  $u$ , &  $AB$  in  $b$ ,

Tom. I.



& compleatur figura  $CBfd$  e similis  
 & æqualis figuræ  $u b \phi d$ , patet fa-  
 ctum. Si recta  $ED$  minor sit paral-  
 lelarum  $GC$ ,  $AB$  distantia, problema  
 impossibile est; si major fuerit cir-  
 culus radio  $i d$ , descriptus, rectam  
 $AB$  in duobus punctis secabit, &  
 duæ erunt rectæ  $i d$  positiones.

I i



TU COR-

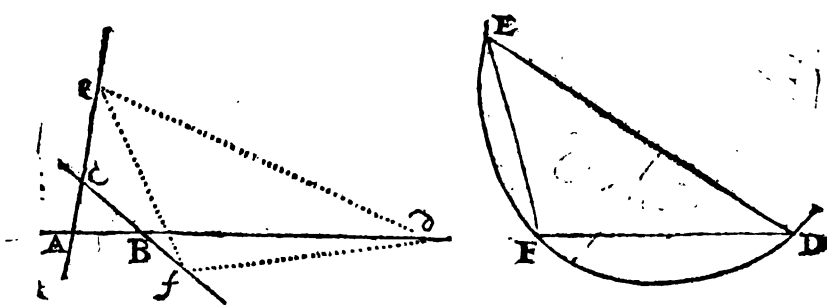
**LIBER**

PRIMUS.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

*Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes  
datae rectis tribus positione datis interjacebunt.*

Describenda sit trajectory, quæ sit similis & æqualis lineæ curvæ  $DEF$ , quæque à rectis tribus  $AB, AC, BC$  positione



dati, in partes datis hujus partibus  $DE$  &  $EF$  similes & æquales  
fecabitur.

Age rectas  $DE$ ,  $EF$ ,  $DF$ , & trianguli hujus  $DEF$  pone  
angulos  $D$ ,  $E$ ,  $F$  ad rectas illas positione datas (*per lem. xxvi.*)  
(<sup>1</sup>) dein circa triangulum describe trajectoriam curvæ  $DEE$   
fimilem & æqualem.  $Q. E. F.$

**LEM-**

(1) \* Si enim data sit curvæ DEF; triangulo dato EFD circumscripta, dabitur diametrorum & axium ejusdem curvæ positio ad trianguli EFD latera, & hinc

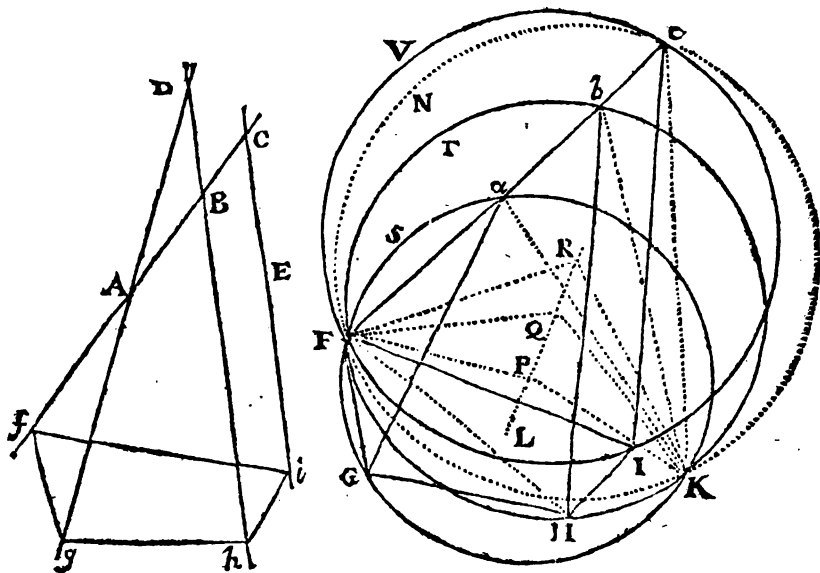
habebitur positio diametrorum & axium  
curvæ similis & æqualis circa triangulum  
e. f. d. describendæ.

LEMMA XXVII.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

*Trapezium specie datum describere, cujus anguli ad rectas quatuor positione datas, quæ neque omnes parallelæ sunt, neque ad commune punctum convergunt, singuli ad singulas consistant.*

Dentur positione rectæ quatuor  $ABC$ ,  $AD$ ,  $BD$ ,  $CE$ ; quarum prima secet secundam in  $A$ , tertiam in  $B$ , & quartam in  $C$ : & describendum sit trapezium  $fhgi$ , quod sit trapezio  $FGHI$  simile; & cujus angulus  $f$ , angulo dato  $F$  æqualis, tan-

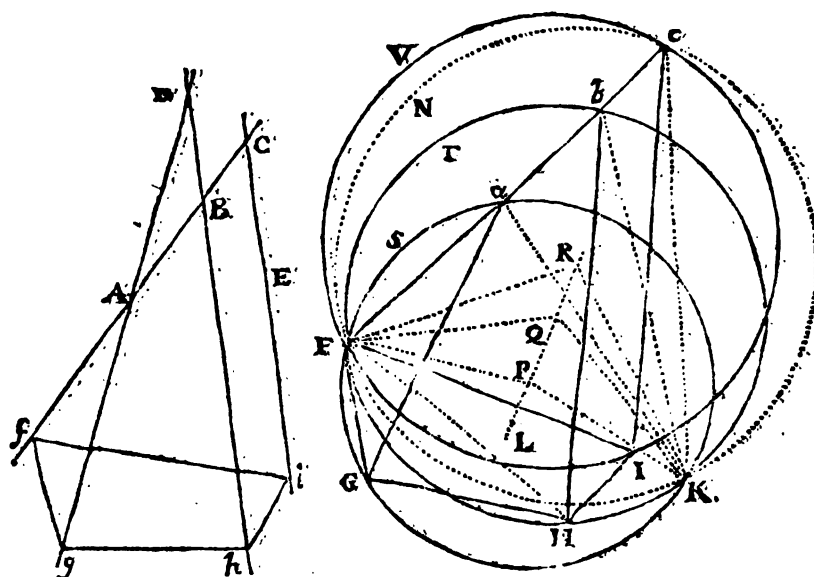


gat rectam  $ABC$ ; cæterique anguli  $g$ ,  $h$ ,  $i$ , cæteris angulis datis  $G$ ,  $H$ ,  $I$  æquales, tangant cæteras lineas  $AD$ ,  $BD$ ,  $CE$  respectivè. Jungatur  $FH$  & super  $FG$ ,  $FH$ ,  $FI$  describantur totidem circulorum segmenta  $FSG$ ,  $FTH$ ,  $FVI$ ; quorum primum  $FSG$  capiat angulum æqualem angulo  $BAD$ , secundum  $FTH$  capiat angulum æqualem angulo  $CBD$ , ac ter-



DE MOTU CORP. FORUM. LIBER PRIMUS.

tium  $FVI$  capiat angulum æqualem angulo  $ACE$ . Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum  $FG$ ,  $FH$ ,  $FI$ , ut literarum  $FSG$  eodem sit ordo circularis qui literarum  $BADB$ , utque literæ  $FTHF$  eodem ordine cum literis  $CBDC$ , & literæ  $FVIF$  eodem cum literis  $ACEA$  in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulos integros; sitque  $P$  centrum circuli primi  $FSG$ , &  $Q$  centrum secundi  $FTH$ . Jungatur & utrinque producat  $PQ$ , & in eâ capiatur  $QR$  in eâ ratione



ad  $PQ$  quam habet  $BC$  ad  $AB$ . Capiatur autem  $QR$  ad eas partes puncti  $Q$  ut literarum  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  idem sit ordo atque literarum  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , centroque  $R$  & intervallo  $RF$  describatur circulus quartus  $FNc$  secans circulum tertium  $FVI$  in  $c$ . Jungatur  $Fc$  secans circulum primum in  $a$ , & secundum in  $b$ . Agantur  $aG$ ,  $bH$ ,  $cI$ , & figuræ  $abcFGHI$  similis constitui potest figura  $ABCfghi$ . Quo facto erit trapezium  $fghi$  illud ipsum, quod constituere oportebat.

Secent enim circuli duo primi  $FSG$ ,  $FTH$  se mutuo in  $K$ . Jungantur  $PK$ ,  $QK$ ,  $RK$ ,  $aK$ ,  $bK$ ,  $cK$ , & producat  $QP$  ad  $L$ . Anguli ad circumferentias  $FaK$ ,  $FbK$ ,  $FcK$  sunt semisses.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 253

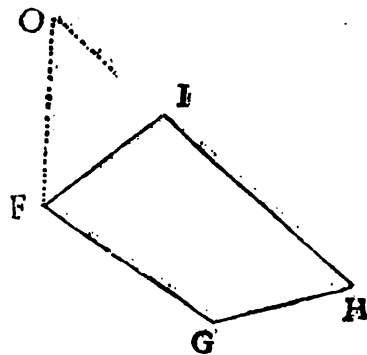
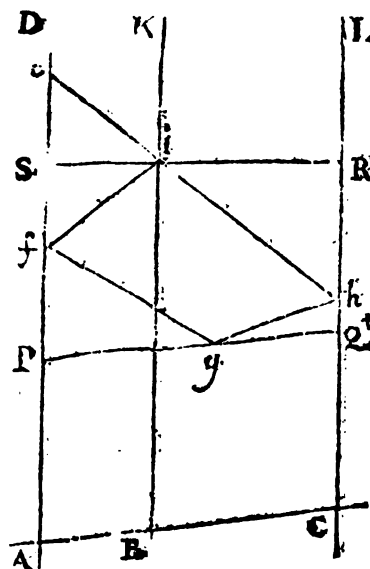
misses angulorum  $FPK, FQK, FRK$  ad centra, ideoque angulorum illorum dimidiis  $LPK, LQK, LRK$  æquales. (m) Est ergo figura  $PQRK$  figuræ  $abcK$  æquiangula & similis, & propterea  $ab$  est ad  $bc$  ut  $PQ$  ad  $QR$ , id est, ut  $AB$  ad  $BC$ . Angulis insuper  $FaG, FbH, FcI$  æquantur  $fAg, fBh, fCi$  per constructionem. Ergo figuræ  $abcFGHI$  figura similis  $ABCfghi$  compleri potest. Quo facto trapezium  $fghi$  constituetur simile trapezio  $FGHI$ , & angulis suis  $f, g, h, i$  tanget rectas  $ABC, AD, BD, CE$ . Q.E.F.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

(m)\* Est enim angulus  $Kab = KPR$ , angulus  $Kba = KQP$ , ac proinde triangulum  $aKb$ , simile triangulo  $PQK$ , & similiter patet triangulum  $bKc$ , esse simile triangulo  $QKR$ , adeoque totam figuram  $abcK$ , similem esse figuræ  $PQRK$ .

\* Si ex quatuor rectis positione datis duæ vel tres fuerint parallelæ manet eadem constructio. Potest tamen hæc alia adhiberi quæ etiam valet, ubi quatuor sunt parallelæ. Datæ sint res parallelæ  $AD, BK, CL$  quas quarta  $AC$  in  $A, B, C$  secat & oporteat describere trapezium simile trapezio  $FIHG$  & cuius anguli angulis  $F, I, H, G$  æquales, rectas  $AD, BK, CL, AC$ , tangant per punctum quodvis  $i$ , rectæ  $BK$ , agatur  $SiR$ , parallelis  $AD, BK, CL$  normalis, iisque occurrent in  $S, & R$ , producat  $HI$ , ad  $O$ , ut sit  $HI$  ad  $IO$  ut est  $Ri$  ad  $iS$  junganturque  $FO$ ; tum ex puncto  $i$ , agatur  $if$ , parallelam  $AD$  secans in  $f$ , ita ut sit angulus  $fiB$  seu  $ifD$ , æqualis angulo  $IFO$ , & super latere  $fi$ , simili  $FI$  construat trapezium  $fihg$  simile trapezio  $FIHG$ , ac per angulum  $g$  agatur recta  $PQ$  ipsi  $AC$  parallela, & tandem super recta  $AC$ , construat figura similis figuræ  $PQhihg$ . Dico factum.

Demonstrandum est angulum  $h$  esse in parallelâ  $CL$ ; si punctum  $h$ , non est in lineâ  $CL$  producat  $ih$  donec rectæ  $CL$  occurrant in  $t$ , & producat  $ti$ , donec occurrat rectæ  $AD$  in  $o$  & erit  $HI : IO = hi : io = Ri : iS$ , ob figuras  $oifh, OIFH$ , (per constr.) similes; sed ob similia triangula  $tR, ois, ti : io = Ri : iS$ , ergo  $hi : io = ti : io$ , atque adeo  $hi = ti$ , quare punctum  $t$ , cum  $h$ , coincidit.



Fi 3

## 254 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

*Corol.* Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli  $FGH$ ,  $GHI$  usque eo, ut rectæ,  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$  in directum jaceant, & in hoc casu construendo problema ducetur recta  $fghi$ , cujus partes  $fg$ ,  $gh$ ,  $hi$ , rectis quatuor positione datis  $AB$  &  $AD$ ,  $AD$  &  $BD$ ,  $BD$  &  $CE$  interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$ , eundemque servabunt ordinem inter se. Idem verò sic fit expeditius.

Producantur  $AB$  ad  $K$ , &  $BD$  ad  $L$ , ut sit  $BK$  ad  $AB$  ut  $HI$  ad  $GH$ ; &  $DL$  ad  $BD$  ut  $GI$  ad  $FG$ ; & jungatur  $KL$  occurrens rectæ  $CE$  in  $i$ . Producat  $iL$  ad  $M$ , ut sit  $LM$  ad  $iL$  ut  $GH$  ad  $HI$ , & agatur tum  $MQ$  ipsi  $LB$  parallela, rectæque  $AD$  occurrens in  $g$ , tum  $gi$  secans  $AB$ ,  $BD$  in  $f$ ,  $h$ . Dico factum.

Secet enim  $Mg$  rectam  $AB$  in  $Q$ , &  $AD$  rectam  $KL$  in  $S$ , & agatur  $AP$  quæ sit ipsi  $BD$  parallela & occurrat  $iL$  in  $P$ , & erunt  $gM$  ad  $Lh$  ( $gi$  ad  $hi$ , <sup>(n)</sup>  $Mi$  ad  $Li$ ,  $GI$  ad  $HI$ ,  $AK$  ad  $BK$ ) &  $AP$  ad  $BL$  in eadem ratione. Secetur  $DL$  in  $R$  ut sit  $DL$  ad  $RL$  in eadem illâ ratione, & ob proportionales  $gS$  ad  $gM$ ,  $AS$  ad  $AP$ , &  $DS$  ad  $DL$ ; erit, <sup>(o)</sup> ex æquo, ut  $gS$  ad  $Lh$  ita  $AS$  ad  $BL$  &  $DS$  ad  $RL$ ; & mixtim,  $BL - RL$  ad  $Lh - BL$  ut  $AS - DS$  ad  $gS - AS$ . Id est  $BR$  ad  $Bh$  ut  $AD$  ad  $Ag$ , ideoque ut  $BD$  ad  $gQ$ . Et vicissim  $BR$  ad  $BD$  ut  $Bh$  ad  $gQ$ , seu  $fh$  ad  $fg$ . Sed ex constructione linea  $BL$  eadem ratione secta fuit in  $D$  &  $R$  atque linea  $FI$  in  $G$  &  $H$ : ideoque est  $BR$  ad  $BD$  ut  $FH$  ad  $FG$ . Ergo  $fh$  est ad  $fg$  ut  $FH$  ad  $FG$ . Cum igitur sit etiam  $gi$  ad  $hi$  ut  $Mi$  ad  $Li$ , id est, ut  $GI$  ad  $HI$ , patet lineas  $FI$ ,  $fi$  in  $g$  &  $h$ ,  $G$  &  $H$  similiter sectas esse. *Q. E. E.*

In

(n) \* Nam (per constr.)  $LM:iL = GH:HI = AB:BK$ , ac proinde componendo consequentes cum antecedentibus  $Mi:Li = GI:HI = AK:BK = AP:BL$  ob parallelas.

(o) \* Quoniam enim

$gM:Lh = AP:BL = DL:RL$   
&  $gS:gM = AS:AP = DS:DL$

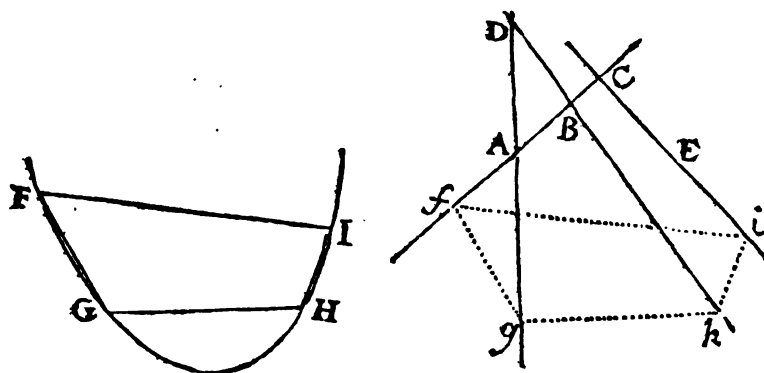
patet esse  $gS:Lh = AS:BL = DS:RL$ , & consequenter  $gS - AS:Lh - BL = AS - DS:BL - RL = gS:Lh$ ; unde invertendo permutando & alternando  $BL - RL:Lh - BL = AS - DS:gS - AS$  id est  $BR:Bh = AD:Ag = BD:gQ$ , ob similia triangula  $ADB$ ,  $AgQ$ .



## PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

*Trajectoriam specie datam describere, quæ à rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datas.*

Describenda fit trajectoria, quæ similis sit lineæ curvæ  $FGHI$ , & cujus partes, illius partibus  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$  similes & proportionales, rectis  $AB$  &  $AD$ ,  $AD$  &  $BD$ ,  $BD$  &  $CE$  positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$ ,  $FI$  describatur (per



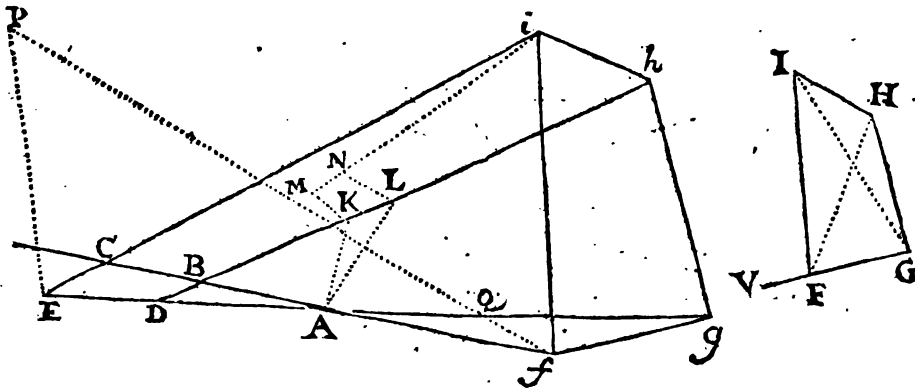
*lem. xxviii.* ) Trapezium  $fg hi$ , quod sit trapezio  $FGHI$  simile, & cujus anguli  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $i$  tangant rectas illas positione datas  $AB$ ,  $AD$ ,  $BD$ ,  $CE$ , singuli singulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium describatur trajectoria curvæ lineæ  $FGHI$  confimilis.

*Scholium.*

Construi etiam potest hoc problema ut sequitur. Junctis  $FG$ ,  $GH$ ,  $HI$ ,  $FI$  produc  $GF$  ad  $V$ , jungeque  $FH$ ,  $IG$ , & angulis  $FGH$ ,  $VFH$  fac angulos  $CAK$ ,  $DAL$  æquales. Concurrent  $AK$ ,  $AL$  cum recta  $BD$  in  $K$  &  $L$ , & inde agantur  $KM$ ,  $LN$ , quarum  $KM$  constituat angulum  $AKM$  æqualem angulo  $GHI$ , sitque ad  $AK$  ut est  $HI$  ad  $GH$ ; &  $LN$  constituat angulum  $ALN$  æqualem angulo  $FHI$ , sitque ad  $AL$

# PRINCIPIA MATHEMATICÁ. 257

*AL* ut *HI* ad *FH*. Dūcantur autem *AK*, *KM*, *AL*, *LN* De Mō-  
ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, <sup>TU COR-</sup>  
*ALKA*, *DALND*, eodem ordine cum literis *FGHIF* in <sup>FORUM.</sup>  
orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac an- <sup>LIBER</sup>  
gulum *iEP* æqualem angulo *IGF*, sitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad <sup>PRIMUS.</sup>  
*GI*; & per *P* agatur *PQf*, quæ cum rectâ *ADE* contineat  
angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat

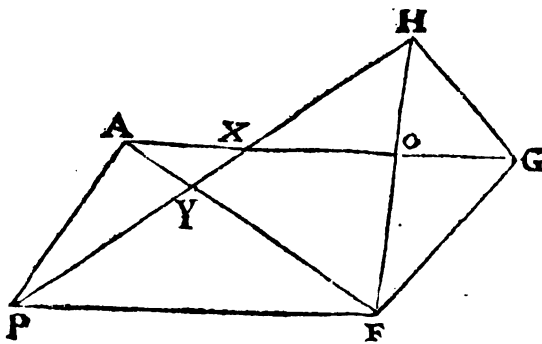


in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas par-  
tes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem  
sit ordo circularis qui literarum *FGHIF*; & si super lineâ *fi*  
eodem quoque literarum ordine constituatur trapezium *fg hi* tra-  
pezio *FGHI* simile, & circumscribatur trajectory specie data,  
solvetur problema. (r) Hac-

(r) Hæc nova constructio hoc præmis-  
so Lemmate demonstratur.

*Lemma.* Si ex puncto *A* extrâ triangulum  
*FGH* dato, agatur ad angulum *F* recta *AF*,  
& ad angulum *G* recta *AG*, secans latus  
oppositum *HF* in *O*, & super rectam *AF*,  
construatur triangulum *FAP*, simile trian-  
gulo *FGH*, jungaturque *PH* secans *AG*  
in *X*, & *AF* in *Y*, similia erunt triangu-  
la *PHF*, *AGF*, & anguli *HXG*, *HFG*  
æquales; quoniam enim anguli *AFP*, *HFG*  
sunt æquales (per hyp.) æquales quoque  
erunt anguli *PFH*, *AFG*; & quoniam  
duo trianguia *PFA*, *HFG*, similia sunt  
(per hyp.) erit  $PF:AF = HF:FG$ ,  
adeoque trianguia *AFG*, *PFH*, quorum  
latera proportionalia æqualem angulum  
continent sunt similia, & hinc anguli *HPF*,  
GA *F* æquantur; cumque anguli oppositi

Tom. I.



*PYF*, *AYX*, sint etiam æquales, liquet  
angulum *AXY* five *HXG*, æqualem esse  
angulo *AFP* = *HFG*. Q. e. D.

K k

357.

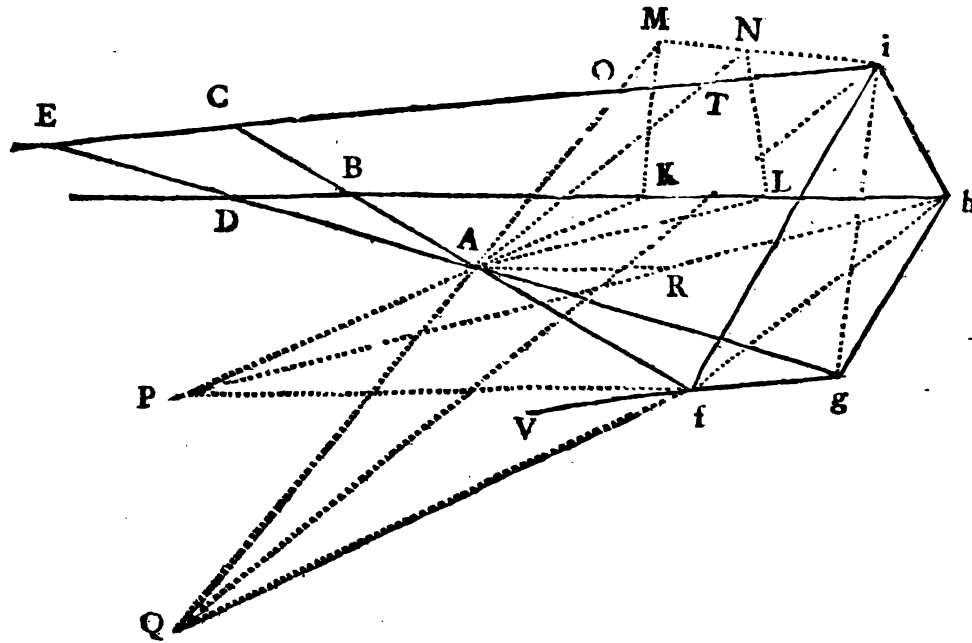
DE Mo- Haftenus de orbibus inveniendis. Superest ut motus corpo-  
TU COR- rum in orbibus inventis determinemus.

PORUM.

LIBER

PRIMUS.

S E C.



357. Hoc itaque posito, demonstratur Newtoniana constructio. Trapeziifghi, anguli quatuor tangent rectas Ci, Bh, Ag, Af. Super rectâ Af, construatur triangula fAP, fAQ, triangulis fgh, fgi, similia; jungantur Ph, Qi, & latera PA, QA, producantur, ut rectis Bh, Ci, occurrant in K, & O; erunt anguli BAK, BAO, æquales angulis datis fgh, fgi; agantur AL, AT, rectis Ph, Qi parallelæ, & producto latere gf, ad V, erit angulus DAL, æqualis angulo Vfh; angulus enim DAL = DAB + BAK + KAL = fAg + PAf + hPA; sed (per constr.) PAf = fgh, & fPA = fhg; cumque sit triangulum fPh, simile triangulo fAg (356.), angulus fPh = fAg, adeoque hPA + fAg + hPA + fPh = fPA = fhg; quare DAL = fgh + fhg = Vfh (per 32. 1. Elem.). Et similiter ostenditur. angulum DAT, esse

æqualem Angulo Vfi, ob triangula fAQ, fQi, triangulis fgi, fAg, similia. Agantur rectæ KM, LN, quæ cum rectis AK, AL constituent angulos AKM, ALN angulis ghi, fhi æquales, rectisque AO, AT productis occurrant in M & N, & triangula AKM, ALN similia erunt triangulis ghi, fhi, (unde juxta constructionem NEWTONI erit KM: AK = hi: hg, & LN: AL = hi: hf). Etenim angulus MAK = PAQ = PAf - QAf = fgh - fgi = igh, (per constr.) quare cum sit quoque (per constr.) angulus AKM = ghi, triangula AKM, ghi sunt similia, angulus verò NAL = DAL - DAT = Vfh - Vfi (per Dem.) sed Vfh - Vfi = ifh, ergo triangula ifh, NAL similia sunt. jungatur MN, demonstrandum est hanc lineam productam transire per angulum i, quo trapezium tangit lineam ECi, ex puncto A, ad rectam Ph, agatur AB rectæ

SECTIO VI.

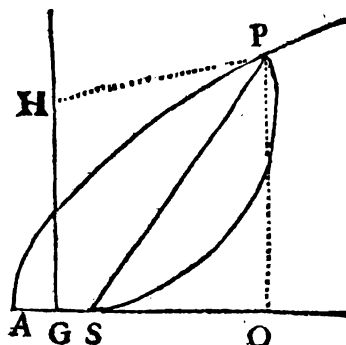
*De inventione motuum in orbibus dotis.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

*Corporis in datâ trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum. (†).*

(†) Sit  $S$  umbilicus &  $A$  vertex principalis parabolæ, sitque  $4 AS \times M$  æquale areæ parabolicæ abscindendæ  $APS$ , quæ radio  $SP$ , vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsus ejus ad verticem de-



rectæ  $Bh$ , parallela, ob similia triangula  $fg h$ ,  $fAP$  erit.....  $fg : hg = Af : PA$  ob sim. tri.  $fg i$ ,  $fAQ$ ....  $gi : fg = QA : Af$  ob sim. tri.  $g h i$ ,  $AKM$ ....  $h g : gi = AK : AM$  ob sim. tri.  $AKL$ ,  $PAR$ ....  $AK : AL = PA : PR$  ob sim. tri.  $fQi$ ,  $fPh$ ....  $fh : fi = Ph : Qi$ ; sed ob sim. tri.  $fhi$ ,  $ALN$ ,  $fh : fi = AL : AN$ .

ergo  $AL : AN = Ph : Qi$  &  $AL : AN = Ph : AL : Qi : AN$  & quia  $AL = Rh$  est  $AL : AN = PR : Qi$  —  $AN$  undè per compositionem rationum & ex æquo,  $AK : AN = QA \times AK : AM \times (Qi - AN)$  quare  $AK \times AM : AN \times AM = QA \times AK : AM \times Qi - AN$ , ac proindè  $AM : AN = QA : Qi - AN$ , adeoque  $AM : AN = QM$  seu  $QA + AM : Qi$  seu  $Qi - AN + AN$ . Quoniam igitur rectæ  $AN$ ,  $Qi$ , sunt parallelæ) per constr.) patet puncta  $M$ ,  $N$ ,  $i$ , esse in unâ rectâ, atquè hæc est prima pars constructionis *Newtonianæ* quæ erat demonstranda.

2<sup>a</sup>. illius pars facile ostenditur. Nam (vid. fig. *Newt.*) junctâ  $Pi$ , erit (per constr.) triangulum  $PiE$ , super rectâ  $Ei$  constructum simile triangulo  $fig$ , ad cujus angulos  $i$  &  $g$ , ductæ sunt ex puncto  $E$ , rectæ  $Ei$ ,  $Eg$ ; quare (356), si per

punctum  $P$  agatur recta  $PQ$ , quæ cum rectâ  $Eg$ , contineat angulum  $PQE$  æqualem angulo  $fig$ , recta illa  $PQ$ , producta tanget angulum  $f$ , trianguli  $fig$ , seu trapezii  $fg hi$ . Q. e. D.

(†) 358. *NEWTONUS* in hac tota sectione supponit corpus in trajectoriâ conicâ datâ itâ moveri, ut radiis ad trajectoriæ umbilicum ductis areæ seu sectores describat temporibus proportionales; eâ enim lege planetas omnes in orbitis conicis revolvi ex phænomenis lib. 3<sup>o</sup>. ostendit. Præterea supponit notum esse tempus quo corpus ex puncto trajectoriæ dato v. g. ex vertice illius principali ad aliud ejusdem trajectoriæ punctum datum pervenit, datamque esse aream seu trajectoriæ sectorem huic tempori correspondentem, atque ex his datis quærit locum mobilis in trajectoriâ ad aliud quodvis tempus datum, aut contrâ quærit tempus quo mobile datum quodvis trajectoriæ punctum attingit; nam cum sint areæ temporibus proportionales, dato tempore quovis, datur area hoc tempore descripta, & vicissim datâ areâ descriptâ datur tempus quod describitur.

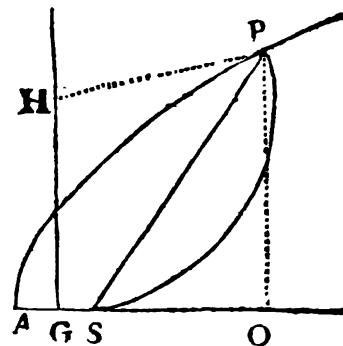
(†) \* Sit  $S$  umbilicus, &  $A$ , vertex principalis parabolæ, datumque sit tempus quo

K k 2 cor-



# 260 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO- scribenda est. Innotescit quantitas  
TU COR- areæ illius abscindendæ ex tempo-  
FORUM. re ipsi proportionali. Biseca  $AS$  in  
LIBER  $G$ , erigeque perpendiculum  $GH$   
PRIMUS. æquale  $\frac{3}{4} M$ , & circulus centro  $H$ ,  
intervallo  $HS$  descriptus secabit pa-  
rabolam in loco quæsito  $P$ . Nam,  
demissâ ad axem perpendiculari  $PO$   
& ductâ  $PH$ , (<sup>u</sup>) est  $AGq + GHq$



(= (<sup>x</sup>)  $HPq = AO - AG : quad. + PO - GH : quad.$ ) =  $AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$ . (<sup>y</sup>). Unde  $2GH \times PO (= AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{1}{4}POq$ . Pro  $AOq$  scribe  $AO \times \frac{POq}{4AS}$ ; & applicatis terminis omnibus ad  $\frac{3}{4}PO$  ductisque in  $2AS$ , fiet  $\frac{2}{3}GH \times AS (= \frac{1}{3}AO \times PO + \frac{1}{3}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO = \text{areæ } \overline{APO - SPO})$   
= areæ  $APS$ . Sed  $GH$  erat  $\frac{3}{4}M$ , & inde  $\frac{2}{3}GH \times AS$  est  $\frac{1}{2}AS \times M$ . Ergo area abscissa  $APS$  æqualis est abscindendæ  $\frac{1}{2}AS \times M$ . Q. E. D.

Co-

corpus in parabolâ motum, ut modò exposuimus (358.) ex vertice  $A$  ad punctum  $P$ , aut ex puncto  $P$  ad verticem  $A$  pervenit, seu datum sit tempus quo sector quilibet  $APS$  describitur.

(<sup>u</sup>) \* Est  $AG^2 + GH^2 = HP^2$ ; nam  $AG = GS$ ,  $HP = HS = HA$ , & angulus  $G$  rectus (per constr.) quare  $HA^2 = HP^2 = AG^2 + GH^2$ .

(<sup>x</sup>) \*  $HP^2 = AO - AG^2 + PO - GH^2$  Nam ex puncto  $H$ , ad rectam  $PO$  demissa intelligatur perpendicularis, hæc erit æqualis ipsi  $GO = AO - AG$ , & pars rectæ  $PO$  inter perpendicularem & punctum  $P$  intercepta æqualis erit  $PO - GH$ .

(<sup>y</sup>) \* Unde (sublatis utrinque quadratis  $AG^2 + GH^2$ , & addito utrinque rectangulo  $2GH \times PO$ , est  $2GH \times PO = AO^2 + PO^2 - 2GAO$ ; quoniam autem in parabolâ latus rectum  $= 4AS = 3AG$ ,

est  $3AG \times AO$  five  $3GAO = PO^2$ , &  $2GAO = \frac{1}{4}PO^2$ , &  $PO^2 - 2GAO = \frac{3}{4}PO^2$ . Cum verò sit  $4AS \times AO = PO^2$ , adeoque  $4AS \times AO^2 = AO \times PO^2$ , &  $AO^2 = \frac{AO \times PO^2}{4AS}$ , erit igitur

$$2GH \times PO = \frac{AO \times PO^2}{4AS} + \frac{3}{4}PO^2,$$

& dividendo utrinque per  $\frac{3}{4}PO$ , fiet  $\frac{2}{3}GH \times AS = \frac{AO \times PO}{12AS} + \frac{1}{4}PO$ , ductisque omnibus terminis in  $2AS$ , fiet  $\frac{2}{3}GH \times AS$

$$= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO =$$

$$\frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO$$

ob

# PRINCIPIA MATHEMATICÆ. 261

*Corol. 1.* Hinc  $GH$  est ad  $AS$ , ut tempus quo corpus descripsit arcum  $AP$  ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem  $A$  &  $(a)$  perpendicularum ad axem ab umbilico  $S$  erectum.

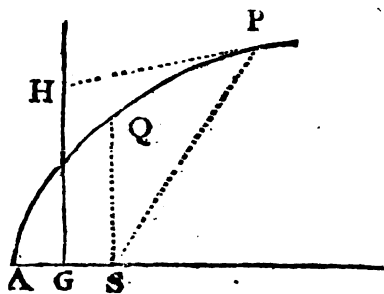
*Corol. 2.*  $(b)$  Et circulo  $ASP$  per corpus motum  $P$  perpetuo transeunte, velocitas puncti  $H$  est ad velocitatem quam corpus

DE MOTU CORP-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

ob  $AS = AO - SO$  unde est  $3 AS = 3 AO - 3 SO$ . Verum  $\frac{4 AO \times PO}{6}$

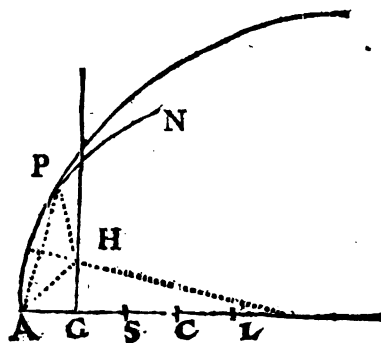
feu  $\frac{2}{3} AO \times PO$ , est area parabolica  $APOA$ , (*Archimed. prop. 17. quadr. Parab. sup. Theor. IV. de Parab. pag. 133.*) &  $\frac{3 SO \times PO}{6}$  feu  $\frac{1}{2} SO \times PO$ , est area trianguli  $PSO$ , ergo area sectoris Parabolici  $APS$ , æqualis est  $\frac{4AO - 3SO}{6}$

$\times PO$ , quare  $\frac{1}{3} GH \times AS = \text{areæ APS}$ ; sed  $GH = 3 M$ , (*per constr.*) &c.



$(a)$  \* Sit perpendicularum illud  $SQ$ , erit area  $ASP$ , ad aream  $ASQ$ , ut  $\frac{1}{3} GH \times AS$ , ad  $\frac{2}{3} AS \times SQ$  (*Theor. IV. de Par. p. 133.*), sed ex natura Parabolæ (*Vid. Cor. 2. Theor. I. de Par. p. 131.*)  $SQ$  æqualis dimidio lateris recto  $= 2 AS$ , ergo area  $ASP$  est ad aream  $ASQ$ , seu tempus per  $AP$  ad tempus per  $AQ$ , ut  $\frac{1}{3} GH \times AS$  ad  $\frac{2}{3} AS^2$ , hoc est, ut  $GH$  ad  $AS$ . Dato igitur tempore quo

describitur arcus  $AQ$ , & tempore quo describitur  $AP$ , per simplicem proportionem invenitur  $HG$ , & inde punctum  $P$  habetur.



$(b)$  \* Jungatur  $A.P$ , & ad medium ejus punctum  $q$ , erigatur perpendicularum  $qL$ , axem secans in  $L$ , & quoniam (*ex Dem.*) est semper  $HP = HA$ , ideoque est  $AP$  chorda circuli cujus centrum est  $H$ . Itaque (*per 1. 3<sup>ta</sup> Elem.*) perpendicularum illud  $qL$ , rectæ  $GH$ , occurrit in  $H$ ; & ob similitudinem triangulorum  $LGH$ ,  $LqA$ , est  $GH : qA$  seu  $\frac{1}{2} AP = LG : Lq$ . Sumatur  $AC = 2 AS$  dimidio nempe lateris recti parabolæ & centro  $C$ , & intervallo  $CA$ , describatur circulus  $AN$ , hic parabolam osculatur in  $A$  (*241*); coeuntibus vero punctis  $P$  &  $A$ ,  $H$  &  $G$ , coeunt etiam  $L$  &  $C$ , fitque  $Lq = LA = CA = 2 AS = 4 GS$ , &  $LG = CG = 3 GS$ , atque arcus  $AP$  æqualis chordæ  $AP$ , (*Lem. VII.*); unde cum in proportionem superiori sit  $GH : \frac{1}{2} AP = LG : Lq$  erit in hoc casu  $GH : \frac{1}{2} AP = 3 GS : 4 GS$

Kk 3; hoc

## 262 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

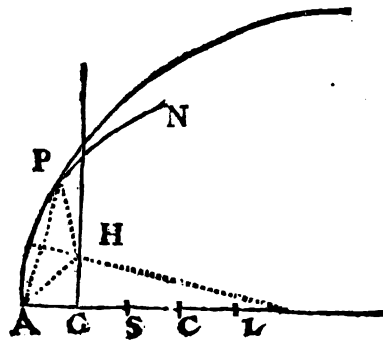
De Mo- pus habuit in vertice  $A$  ut 3 ad 8 ; ideoque in eâ etiam ra-  
 TU COR- tione est linea  $GH$  ad lineam rectam quam corpus tempore  
 PORUM. motus sui ab  $A$  ad  $P$ , eâ cum velocitate quam habuit in  
 LIBER vertice  $A$ , describere posset.  
 PRIMUS.

*Corol. 3.* Hinc etiam vice versâ inveniri potest tempus quo cor-  
 pus descripsit arcum quemvis assignatum  $AP$ . Junge  $AP$  & ad  
 medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ  $GH$  occurrens  
 in  $H$ .

### L E M M A XXVIII.

*Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa ;  
 possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas  
 generaliter inveniri.*

( $c$ ) Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu  
 polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu ,  
 & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo , per-  
 gat-



hoc est ,  $GH : AP = 3 : 8$ . Ve-  
 rum ob motum æquabilem & æquidistanti-  
 um per nascentes  $AP$ ,  $GH$ , velocitas  
 puncti  $H$  in  $G$ , est ad velocitatem corpo-  
 ris  $P$  in  $A$  ut  $GH$  ad  $AP$ , & quoniam  
 (*ex Dem.*) est semper  $\frac{4}{3} AS \times GH$  æqua-  
 lis areæ  $AP S$ , &  $\frac{4}{3} AS$ , est quantitas

constans, erit semper  $GH$ , ut area  $AP S$ ,  
 hoc est, ut tempus quo punctum  $H$ , per-  
 currit  $GH$ , estque proinde motus illius æ-  
 quabilis & velocitas ubique eadem. Qua-  
 re velocitas puncti  $H$ , est ubique ad ve-  
 locitatem quam habet corpus  $P$  in  $A$ , ut  
 nascens  $GH$ , ad nascentem  $AP$ , hoc est,  
 ut 3. ad 8. Q. e. D.

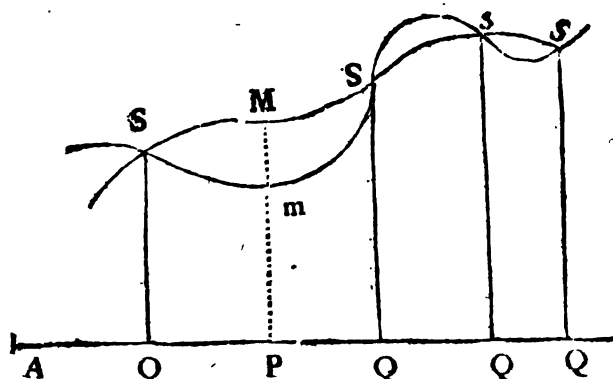
( $c$ ) 359. Intra ovalem  $ACBA$  detur  
 punctum quodvis  $P$ , circa quod ceu po-  
 lum revolvatur perpetuo linea recta infinita  
 $PS$ , uniformi cum motu , ita ut pun-  
 ctum datum  $A$  illius lineæ circuli  $Aa m X$   
 arcus æquales æqualibus temporibus de-  
 scribat, & interea in recta illa  $PS$ , exeat  
 punctum mobile  $p$  de polo  $P$ , pergatque  
 semper in eadem recta  $Pf$  cum velocitate  
 quæ sit ut rectæ illius inrâ ovalem qua-  
 dratum, hoc est, cum linea  $PS$  pervenit  
 ad situm  $Pf$ , & punctum mobile  $p$  ad  $p$ ,  
 velocitas puncti  $p$  sit ut quadratum rectæ  
 $PQ$  inter polum  $P$  & ovalem  $AQCB$   
 contentæ, hoc motu punctum illud  $p$ ,  
 describet spiralem  $PpnZ$ , gyris infinitis.



DE MO- finitam inveniri possunt : & propterea rectæ cujuscvis positione  
TU COR- datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquatio-  
PORUM. nem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem se-  
LIBER cat in punctis, numero infinitis, & (e) æquatio, quâ intersec-  
PRIMUS. tio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectio-  
nes omnes radicibus totidem, ideoque ascendit ad tot dimen-  
siones

ea ex naturâ ovalis A Q C B, datur alia æquatio inter PH & QH, inveniuntur ergò quatuor æquationes finitæ quæ simul quinque tantum variables, nimirum Pp, PF, pF, PH, QH continent, quæque proinde ad unicam æquationem finitam poterunt reduci in quâ duæ tantum variables PF, pF reperientur, adeoque per hanc æquationem finitam omnia spiralis puncta inveniri poterunt, & propterea rectæ cujuscvis S p positione datæ intersectio p

cum spirali inveniri etiam poterit per æquationem finitam; cum enim duæ rectæ Sp, SB positione datæ sint, linea SP magnitudinæ & triangulum SPF specie datur, & hinc datur ratio lineæ SF seu SP  $\mp$  PF ad Fp, & nova invenitur æquatio inter PF & Fp; per hanc igitur æquationem & per alteram quæ ad spiralem est, determinabuntur PF, & Fp, punctumque intersectionis p invenietur per æquationem finitam.



(e) 362. Lineæ duæ SMS, Sm s se mutuo interfecantes in punctis S, s ad eandem rectam A Q positione datam referantur, sintque A Q, A P abscissæ communes, & QS, PM, Pm ad eas ordinatæ; quoniam in communibus linearum SMs, Sm s, intersectionibus S, s, ordinatæ PM, Pm sunt æquales, si in duabus ad lineas SMs, Sm s æquationibus, manente abscissâ communi, loco ordinarum PM, Pm, eadem scribatur littera, v. gr. y, & deinde ex illis æquationibus eliminetur littera quæ abscissam communem exprimit, obtinebitur æquatio ex solâ y, & constantibus composito. Porro hæc ultima æquatio non magis primam ordinatam communem S Q,

seu primam intersectionem S, quam secundam aut tertiam &c. determinabit, cum sit eadem omnium lex & conditio idemque calculus; hæc igitur æquatio debet omnes communes ordinatas QS, omnesque intersectiones S, simul complecti & indifferenter exhibere, & ita tot radices seu ipsius y valores reddere quot sunt communes ordinatæ seu intersectiones, æquatio autem tot dimensiones habet quot radices; Si itaque linearum SMs, Sm s, intersectiones S, s, sunt numero finitæ, æquatio quoque quæ illas determinat finita est; at si fuerint intersectiones numero infinitæ, erit æquatio numero dimensionum & radicum infinita.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 285

fiones quot sunt interfectiones. Quoniam circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, interfectio una non invenietur nisi per æquationem duarum dimensionum, quâ interfectio altera etiam inveniat. (f) Quoniam duarum sectionum conicarum quatuor esse possunt interfectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, quâ omnes simul inveniantur. Nam si interfectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoque, & propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes interfectiones simul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam interfectiones sectionum conicarum & curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, & interfectiones duarum curvarum tertiæ potestatis; quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. (g) Id nisi necessario fieret, reducere liceret, problemata omnia solida ad plana, & plusquam solida, ad solida. (h) Loquor hîc de

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

(f) \* Exempli causâ. Sint  $ap + px = yy$ , &  $bx - xx = yy$ , æquationes ad parabolam & circulum, & invenietur  $x = \frac{yy - ap}{p}$ , &  $\frac{byy - bap}{p^2} + \frac{2apyy - aapp}{p^2}$

$= yy$ , æquatio quatuor dimensionum, quoniam quatuor esse possunt parabolæ & circuli interfectiones. Sint  $ap^2 + p^2x = y^3$ , &  $bx - xx = y^2$  æquationes ad parabolam 3. potestatis & ad circulum, erit  $x = \frac{y^3 - ap^2}{p^2} \div \frac{by^3 - bap^2}{p^2}$

$\frac{y^6 + 2ap^2y^3 - a^2p^4}{p^2} = yy$  æquatio sex dimensionum quod esse possunt interfectiones sex, & ita de cæteris. Generatim vero tot esse possunt curvarum duarum interfectiones quot sunt unitates in facto ex potestatis curvæ unius indice seu exponente in alterius exponentem; index autem potestatis curvæ idem est cum numero dimensionum æquationis ad illam curvam.

(g) \* Nam in solidorum problematum constructione duæ adhibentur sectiones co-

Tom. I.

nicæ quarum interfectiones; seu ordinatæ duabus coni sectionibus communes, problematis solutionem seu ultimæ æquationis radices suppeditant. Quare si huiusmodi interfectiones vel ordinatæ communes generaliter possent per æquationem quadraticam inveniri, problemata solida per æquationes duarum dimensionum solvi ac construi possent, atque ita ad plana reducerentur, eademque ratione plus quam solida ad solida, indeque ad plana revocarentur.

(h) Nonnunquam proposita ad curvam æquatio ad inferiorem potestatem aut in duas æquationes inferioris potestatis resolvi potest. Sic æquatio  $ax^3 - a^2x^2 - bx^2y + axy^2 + abxy - by^3 = 0$  resolvi potest in duas  $xx - ax + yy = 0$ , &  $ax = by = 0$  quarum prior est ad circulum, posterior ad parabolam. Parabolæ autem & circuli cum lineâ quâvis interfectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt.

LI



diculum illud unà cum secante revolvatur circa polum, inter-  
sectiones spiralis transibunt in se mutuo, quæque prima erat seu  
proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas ter-  
tia, & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mu-  
tata magnitudine quantitatum per quas positio secantis determi-  
natur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones re-  
deunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam pri-  
mam, ideoque una eademque exhibebit intersectiones omnes,  
& propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes  
exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & spiralis per  
æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat  
ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æqua-  
tionem generaliter exhiberi.

(<sup>k</sup>) Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo spi-  
ralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportio-  
nale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam  
æqua-

DE MO-  
TU COE-  
LORUM.  
LIBER I  
PRIMUS

tione; constantes sunt rectæ  $SF$ ,  $FP$ ;  $SP$ , quibus illa positio determinatur, & demissa ex  $I$  ad  $PM$  perpendiculari  $Im$  datur æquatio aliqua inter  $Pm$  vel  $Im$  & datas  $SP$ ,  $FP$ ,  $SF$ , quæ intersectio  $I$  exhibetur; ubi verò secans  $SI$ , pervenit ad situm  $s$   $i$   $2$ , manente secantis  $s$   $i$   $2$  positione, datur æquatio inter  $im$  vel  $Pm$  & datas  $sP$ , seu  $SP$ ,  $Pf$ ,  $sf$ , & æquatio hæc à priori diversa non est, nisi ratione quantitatum  $FPFS$ , quæ mutatae sunt in  $fP$ ,  $fs$ , per quas secantis  $s$   $i$   $2$ , positio determinatur, cum utraque æquatio in situ  $SI$ , & situ  $s$   $i$   $2$ , ab æquatione ad spiralem quæ eadem semper manet & ab æquatione secantis positionem determinante diducantur. Quoniam igitur lineæ  $fs$ ,  $fP$  post primam revolutionem ac proinde post singulas redeunt ad magnitudines pri-

mas  $FS$ ,  $FP$  intersectione primâ in se eundam transeunte, secundâ in tertiam, & sic deinceps, æquatio inter  $Im$ , vel  $Pm$ , & datas  $PF$ ,  $PS$ ,  $SF$ , redibit ad formam primam quam habebat æquatio inter  $Im$ , vel  $Pm$ , & easdem datas quantitates  $PF$ ,  $PS$ ,  $SF$ , adeoque una eademque æquatio exhibebit intersectiones omnes  $I$ ,  $II$ , &c. seu valores  $Im$ ,  $II$ , &c. propterea radices exhibebit numero infinitas quibus omnes exhiberi possunt.

(<sup>k</sup>) \* Eâ enim ratione spiralis describetur gyris infinitis ad quam proinde æquatio erit numero dimensionum infinita, quæ quidem finita deberet esse, si longitudo perimetri ovalis pro lubitu abscissæ seu intervallum puncti spiralem describentis & poli, per finitam æquationem generaliter exhiberi posset.

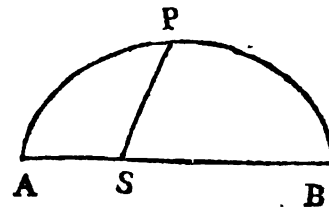
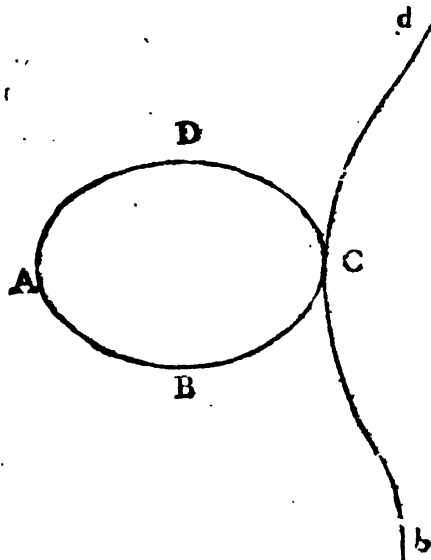


DE MO-æquationem generaliter exhiberi. (1) De ovalibus autem hic  
TU COR- loquor quæ non tanguntur à figuris conjugatis in infinitum per-  
PORUM. gentibus.  
LIBER  
PRIMUS.

*Corollarium.*

(<sup>m</sup>) Hinc area ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Curvas geometricè rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquatio-

tam novæ hujus figuræ aream, nec gyris perpetuis ac infinitis simplicem spiralem describi.



(1) \* Ovalem ABCD tangat in C curva conjugata bcd, cujus rami Cb, Cd in infinitum pergant, pro hujusmodi ovalibus non valet NEWTONI demonstratio. Supponit enim circà punctum datum in ovali perpetuò revolvi lineam rectam uniformi cum motu quæ sit ad peripheriam ovalis terminata, & abscindat areas sibi proportionales; si autem ovalis tangatur à figurâ conjugatâ bcd, cujus rami in infinitum pergunt, evidens est lineâ rectâ ipsâ ovalem revolvente non percurri to-

(<sup>m</sup>) 363. Sit Ellipseos APB, axis AB, umbilicus S, radius vector SP, dataque sint totius Ellipsis area & tempus periodicum, sique tempus periodicum ad tempus per arcum AP, ita area totius ellipseos ad aream sectoris APS, obtinebitur æquatio inter aream APS, & tempus quo illa describitur. Unde si postea inveniri posset æquatio finita inter aream indefinitam APS & radium vectorem SP ac datas quantitates, inveniretur quoque æquatio finita inter tempus per arcum quemvis AP, & radium vectorem SP, qui ita ex dato tempore per æquationem finitam prodiret; Et viceversâ, si ex tempore quo arcus AP describitur, radii vectoris SP longitudo per æquationem finitam posset determinari, ope hujus æquationis & superioris proportionis inter tempora & areas obtineretur æquatio finita inter aream quamlibet APS & radium vectorem SP ac datas quantitates; quod impossibile esse demonstratum est; & propterea longi-

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 269

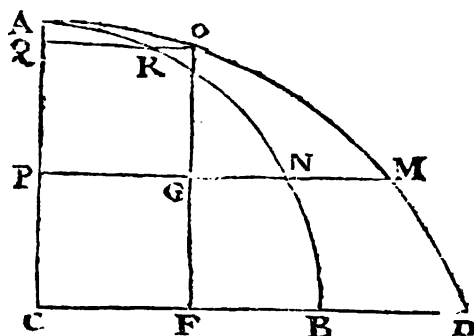
tionibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut spirales, quadratrices, trochoides) geometricè irracionales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) sunt arithmeticè rationales vel irracionales. Aream igitur ellipseos tempori proportionalem abscindo per curvam geometricè irracionalem ut sequitur.

DE MOTU  
CORPORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

PRO-

tudo (ac proinde positio quæ ex longitudine data est) radii vectoris  $SP$ , per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Sunt autem curvæ geometricè rationales in quibus ordinarum & abscissarum rectarum relatio æquatione finitâ exprimi potest, quarumque proinde puncta omnia per harum rectarum linearum rationes complicatas determinari possunt. Si in æquatione ad curvam  $ax^m + by^n + \&c. = 0$  numerus terminorum finitus sit & exponentes  $m, n$ , rationales fuerint, curva erit geometricè rationalis contra si numerus terminorum infinitus fuerit, & summari nequeant, aut si exponentes aliquis irrationalis fuerit, curva est geometricè irrationalis.

364. Circuli (adeoque & Ellipsis) quadraturam seu rectificationem indefinitam finitâ æquatione exhiberi non posse demonstravit Saurinus in Commentariis Parisiensibus an. 1720. illius demonstrationem ut potè facilem & brevem referemus. Sit quadrans circuli  $CAB$ , & ex puncto quovis  $N$  arcus  $AB$  demittatur ad radium  $AC$  perpendicularis  $NP$ , demonstrandum est arcus  $AN$ , & rectarum  $AP, PN$  relationem nullâ æquatione finitâ posse exprimi. Descripta intelligatur curva  $AOMD$  cujus hæc sit natura ut recta  $MP$  ex puncto quovis  $M$  ad radium  $AC$  perpendiculariter demissa, sit æqualis arcui abscisso  $AN$ ; ope curvæ  $AOMD$  arcus  $AN$  in ratione quâvis datâ rectæ  $PG$  ad  $PM$  dividi potest in  $R$ ; nam si per punctum  $G$  agatur recta  $Go$ , ipsi  $PM$  normalis & curvæ  $AOMD$  occurrens in  $o$ , atque ex puncto  $o$ , ducatur ad  $C$  perpendicularis  $oQ$  arcum  $AN$  secans in  $R$ , erit  $AR + Qo$ , adeoque  $AR : AN = PG : PM$ . Verùm demonstravit Clariss. Hospitalius art. 443. lib. 10. Sectionum Conicarum,



quod si arcus  $AN$  sit in partes æquales dividendus quarum una sit  $AR$ , æquatio quâ determinatur partis unius Chorda  $AR$ , tot dimensiones obtinet quot sunt in arcu  $AN$ , partes æquales, atque adeò si dividendus sit arcus  $AN$  in ratione indefinitâ rectæ  $PG$  ad  $PM$ , æquatio illa finitâ esse nequit. Ergò curva  $AOMD$ , quâ arcus quilibet  $AN$  in ratione quâvis  $PG$  ad  $PM$  per eandem semper constructionem dividitur geometricè, rationalis non est; sed si arcus  $AN$  & rectarum  $AP, PN$  relatio posset æquatione finitâ exprimi, eadem æquatio exhiberet quoque relationem abscissæ  $AP$  ad ordinatam  $PM$ , ac proinde curva  $AOMD$  esset geometricè rationalis. Ergò rectificatio arcus  $AN$ , æquatione finitâ generaliter exhiberi non potest. Q. E. D.

365. Hinc patet curvas omnes quarum descriptio pendet à quadraturâ vel rectificatione circuli & ovalium indefinitâ, quales sunt spirales, quadratrices, trochoides esse geometricè irracionales. Ex demonstratis autem minimè sequitur, circuli & ovalium quadraturam vel rectificationem determinatam seu quadraturam vel rectificationem totius ovalis aux portionis illius determinatæ impossibilem esse.

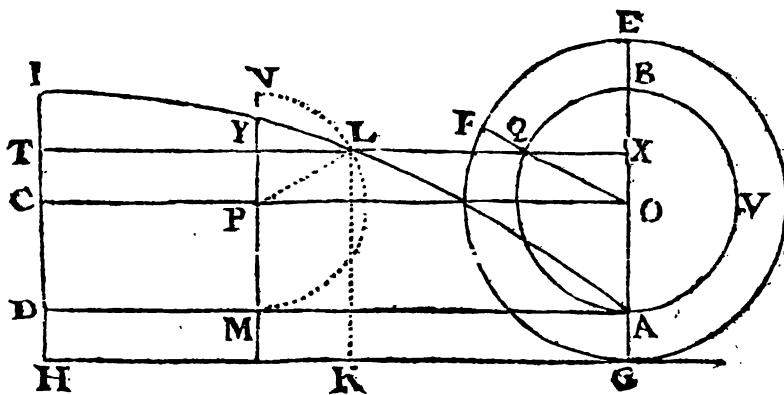
L. I. 3



## 271

DE ME-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

le erit triangulo contento sub radio  $OQ$  sinu & cosinu arcus  $AQ$ ; unde erit  $SR$  ad sinum arcus  $AQ$ , in datâ ratione  $OS$  ad  $OQ$  seu  $OA$ ; sed (per constr.)  $OS : OA = O A : OG$ , &  $OA$  ad  $OG$  ut arcus  $AQ$  ad arcum  $GF$ , & dividim  $AQ = SR$  est ad  $GF$  — sinu arcus  $AQ$  ut  $SR$  ad sinum arcus  $AQ$ , five in datâ ratione  $OS$  ad  $OA$ . Est igitur differentia inter arcum  $AQ$ , & rectam  $SR$ , adeoque & area  $AP S$ , ut differentia inter  $GF$ , & sinum arcus  $AQ$ .



femiperipheriz CFE, & HT æqualis & parallela rectæ GB; Per puncta A, O, E agantur rectæ AD, OC, XT parallelæ & æquales rectæ GH, & trochois descripta intelligatur duplici motu circuli A V B Q.

lipſi A P B vi tendente ad umbilicum S quem ſol occupat , ſitque linea apſidum , ſeu axis major A B , centrum O , ac proinde excentricitas ſeu diſtantia centri O à ſole S , S O ; B aphelion ſeu punctum in orbita à ſole remotiſſimum , A perihelion ſive punctum ſoli proximum , locus planetæ in P ; centro O radio O B deſcribatur circulus B Q A qui dicitur circulus excentricus , & per P agatur recta Q R axi A B normalis & circulo occurrens in Q , junganturque S P ( quæ dicitur intervallum ) & S Q . Ex demonſtratis ( 251 ) maniſeſtum eſt aream SQB eſſe ad aream totius circuli ut eſt area S P B ad aream totius ellipſeos . Quare ſi area circuli B Q A recta S Q ex foco S ducta in datâ ratio-

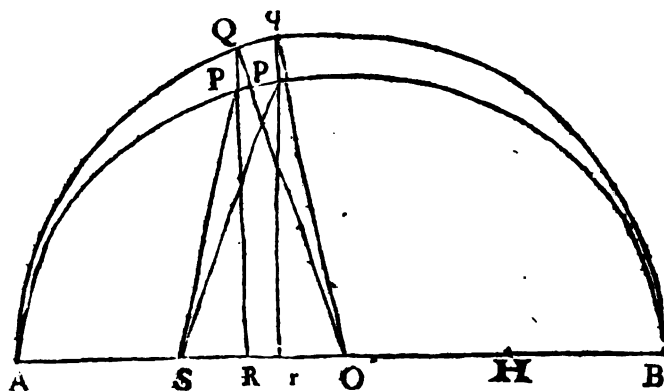




*Scholium.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

(1) Cæterum, cum difficilis sit hujus curvæ descriptio; præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam  $B$ , qui sit ad angulum graduum  $57.29578$ , quem

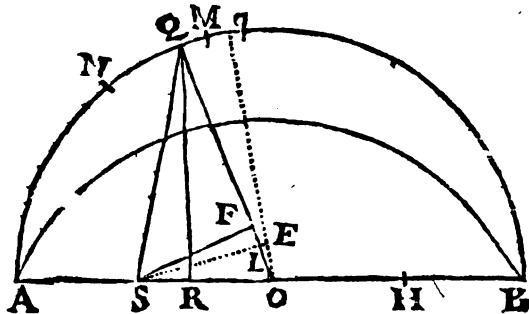


arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia  $SH$  ad ellipseos diametrum  $AB$ ; tum etiam longitudo quædam  $L$ , quæ sit ad radium in eadem ratione inversè. Quibus semel in-

ven-

angulus  $QSO$ , & sumptâ  $SR$  pro sinu toto, erit  $QR$  ad  $PK$  seu axis major ad minorem, ut tangens anguli dati  $QSB$  ad tangentem anguli ad solem  $PSB$ , qui ita obtinebitur.

Hæc latis sunt in orbitis planetarum non valde excentricis, sed in orbitis Mercurii & Martis quarum major est excentricitas ita invenitur arcus  $NQ$ . Ex datis in triangulo  $SNO$ , lateribus  $SO, NO$ , & angulo  $SON$ , inveniuntur latus  $SN$ , & angulus  $SNO$ ; deinde quæritur in partibus decimalibus radii  $ON$  differentia inter arcum qui metitur angulum  $SNO$ , & ejus sinum quæ citrà errorem sensibilem supponi potest æqualis rectæ  $SH$ , seu differentiæ inter arcum  $NQ$  anguli  $NOQ$  mensuram & ejus sinum  $NE$ . Sitque ille decimalium numeri  $A$ . Invenietur numerus decimalium radii  $SN$  quem eadem linea  $SH$  continet dicendo ut  $SN$  ad  $NO$  sic  $A$  ad numerum quæsitum  $B$ , & quoniam in triangulo rectangulo  $SHN$  est  $SN$  ad sinum totum ut  $SH$  sive  $B$  ad sinum anguli  $SNH$ , inveniatur ergo angulus  $SNH$ , ex angulo invento  $SNO$  subducendus; ut relinquatur angulus  $HNO$ , seu æqualis  $NOQ$ , sive arcus  $NQ$ .



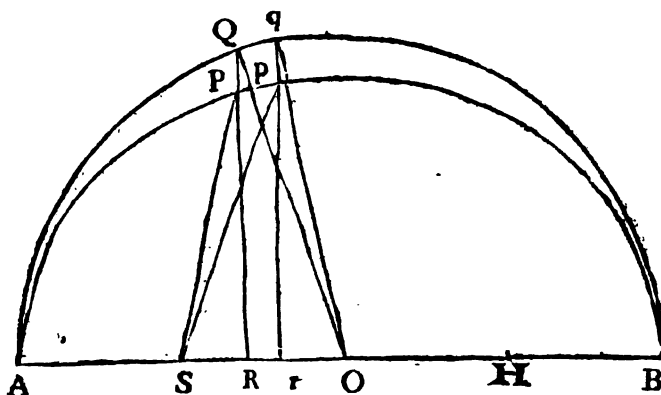
(1) 373. Sit axis major ellipseos  $AB$ , centrum  $O$ , umbilici  $S$  &  $H$ , & feratur planeta à perihelio  $A$  ad aphelium  $B$ , radio  $AO$  describatur circulus excentricus  $AQB$ ; quoniam radius circuli æqualis est arcui graduum  $57.29578$ , si fiat  $AB$  ad  $SH$  seu  $QO$  ad  $SO$ , ut arcus vel angulus  $57.29578$ , ad arcum  $B$ , erit  $B$  arcus æqualis rectæ  $SO$ . Cognoscitur arcus  $AN$  tempori proportionalis, & dicatur  $N$ ; deinde per methodum *Wardi* aut *Cassini*, vel aliâ ratione inveniamur arcus

$Mm$  2  $AQ$ ,



# 276 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

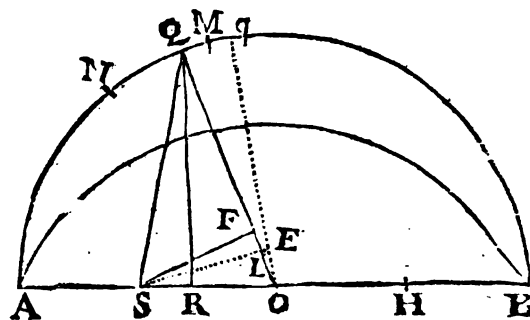
DE Mo- ventis, problema deinceps confit per sequentem analyfin. Per  
TU COR- constructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo,  
FORUM. cognoscatur corporis locus  $P$  proximus vero ejus loco  $p$ . De-  
LIBER missâque ad axem ellipseos ordinatim applicatâ  $PR$ , ex propor-  
PRIMUS. tione diametrorum ellipseos, dabitur circuli circumscripti  $AQB$   
ordinatim applicata  $RQ$ , quæ sinus est anguli  $AOQ$  existente  
 $AO$  radio, quæque ellipsin secat in  $P$ . Sufficit angulum illum



rudi calculo in nameris proximis invenire. Cognoscatur etiam  
angulus temporis proportionalis, id est, qui fit ad quatuor rec-  
tos, ut est tempus, quo corpus descripsit arcum  $Ap$ , ad tem-  
pus

$AQ$ , proximè æqualis anomaliz excentri  
à perihelio  $A$  sumptæ, erit arcus  $NQ$   
æqualis rectæ  $SF$  ex umbilico  $S$  in ra-  
dium  $QO$  perpendiculariter demissæ (369).  
fiat ut  $SH$  ad  $AB$  five ut  $SO$  ad  $QO$ ,  
itâ radius  $R$  ad longitudinem quandam  
 $L$ , & erit  $QO = \frac{SO \times L}{R}$ . & quoniam

triangulum  $SO F$ , simile est triangulo  
 $QOR$  erit  $QO : QR = SO : SF$ , hoc  
est, radius ad sinum anguli  $QOA$ , ut  
arcus  $B$  ad alium arcum  $D$  qui erit æqua-  
lis rectæ  $SF$ : Si itaque arcus  $AQ$  rectè  
assumptus fuisset foret arcus  $D$  æqualis ar-  
cui  $NQ$  (369): Si verò arcus  $AQ$  ac-  
curatus non est, capiatur  $NM = D$ , pun-  
ctum  $M$  cadet supra vel infra punctum  $Q$ .  
Sit anomaliz excentri accurata (quæ est  
incognita)  $Aq$ , & in radium  $qO$  cad-  
dat perpendicularum  $SE$  erit æquale  $Nq$



(369.) undè  $SE = SF$ , hoc est ferè  $LE =$   
 $Nq - NM = Mq = Qq - QM$ . Quoniam  
verò angulus  $QOq$ , parvus est, erit  $OE :$   
 $Oq$  five  $OQ = LE : Qq = Qq - QM :$   
 $Qq$ . Undè  $OQ - OE : OQ = QM : Qq$ .  
Sed

pus revolutionis unius in ellipsi. Sit angulus iste N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli  $AOQ$  ad radium, & angulus E ad angulum  $N - AOQ + D$ , ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli  $AOQ$  diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B; ut est sinus anguli  $AOQ + E$  ad radium, tum angulus G ad angulum  $N - AOQ - E + F$  ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli  $AOQ + E$  diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli  $AOQ + E + G$  ad radium; & angulus I ad angulum  $N - AOQ - E - G + H$ , ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli  $AOQ + E + G$  diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus  $AOq$  æqualis angulo  $AOQ + E + G + I + \&c.$  Et (f) ex cosinu

DE MOTU CORP. LIBER PRIMUS.

Sed OE, est ferè æqualis OF, ergò  $OQ = OF : OQ = QM : Qq$ . Porro  $OQ$ , est ad  $RO$ , seu radius ad cosinum anguli  $AOQ$ , ut  $SO$ , ad  $OF$ , adeoque  $OF = \frac{SO \times \cos. AQ}{R}$ . Crescentibus  $AN$ ,

$AQ, QR$ , decrescit  $RO$ , & evanescit ubi  $AQ$  est circuli quadrans, ac tandem fit negativa ubi  $AQ$  quadrante major est. Quare cum sit  $+OQ : +SO = RO : OF$ ,  $OF$  idem signum  $+$  vel  $-$  habere debet cum  $RO$ ; adeoque si angulus  $AOQ$ , seu arcus  $AQ$  est quadrante minor,  $OF$  est quantitas affirmativa; Si  $AQ$  quadrans est,  $OF$  evanescit; Si  $AQ$  est quadrante major,  $OF$  fit negativa. Est igitur  $OQ = \frac{SO \times \cos. AQ}{R}$ :

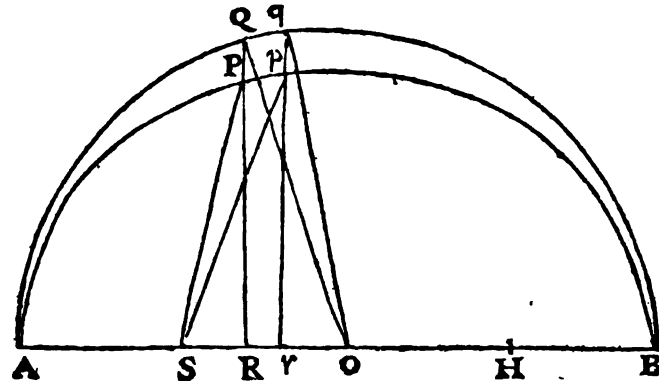
$OQ = QM : Qq$ , seu ob  $QO = \frac{SO \times L}{R}$ , est  $SO \times L = SO \times \cos. AQ : \frac{SO \times L}{R}$ , si-

ve  $L = \cos. AQ : L = QM : Qq$ , si fuerit  $AQ$  minor quadrante, &  $L + \cos. AQ : L = QM : Qq$ , si fuerit  $AQ$  major quadrante. Est autem arcus  $QM = AN - AQ + NM = N - AQ + D$ , quare si

arcus  $Qq$ , dicatur  $E$ , erit  $E : N - AQ + D = L : L \mp \cos. AQ \& AQ + E$ , erit æqualis  $Aq$ ; invento itaque  $E$  per ultimam proportionem, si loco  $AQ$  capiatur arcus accuratior  $Aq$ , seu angulus  $AOQ + E$ , & instituatur processus priori similis, capiendò arcum  $F$ , ad arcum  $B$ , ut est sinus arcus  $AQ + E$  seu  $Aq$  ad radium, & arcum  $G$  ad arcum  $N - AQ + F$ , seu  $N - AQ - E + F$ , ut est longitudo  $L$ , ad longitudinem eandem cosinu anguli  $AOq$  seu  $AOQ + E$  diminutam ubi angulus  $AOq$  recto minor est, auctam ubi major, erit  $AQ + E + G$ , seu  $Aq + G$ , arcus magis verus, & similiter si loco arcus  $Aq$ , usurpetur arcus  $Aq + G$  & idem repetatur processus, inveniatur novus arcus  $AQ = E + G + I$ , seu  $Aq + G + I$ , accuratior arcu  $Aq + G$ , & sic pergere licet in infinitum & quantumvis proximè ad veritatem accedere.

(f) \* Ex cosinu Or. Est enim radius ad cosinum anguli inventi  $AOq$ , ut  $qO$  ad  $Or$ , inveniuntur ergò punctum  $r$ , & ordinata  $qr$ . Deinde si fiat ut axis major ad minorem, ità  $qr$  ad  $pr$ , habebitur locus corporis  $p$ .

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.



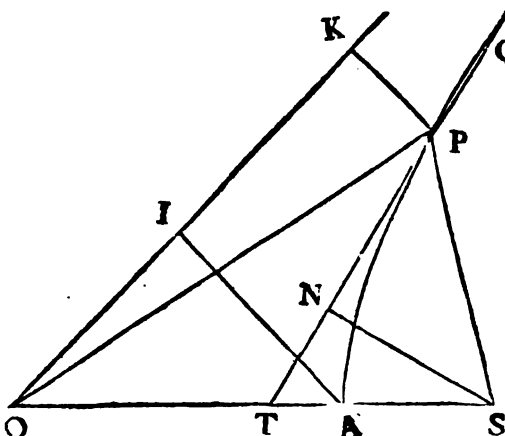
finu ejus  $Or$  & ordinata  $pr$ , quæ est ad sinum ejus  $qr$  ut ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus  $p$ . (†) Si quando angulus  $N - AOQ + D$  negativus est, debet signum  $+$  ipsius  $E$  ubique mutari in  $-$ , & signum  $-$  in  $+$ . Idem intelligendum est de signis ipsorum  $G$  &  $I$ , ubi anguli  $N - AOQ - E + F$ , &  $N - AOQ - E - G + H$  negativi prodeunt. Convergit autem series infinita  $AOQ + E + G + I + \&c.$  quam celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum  $E$ . Et fundatur calculus in hoc theoremate, quod area  $APS$  sit ut differentia inter arcum  $AQ$  & rectam ab umbilico  $S$  in radium  $OQ$  perpendiculariter demissam,

Non

(†) \* Si quando angulus  $N - AQ + D$ , seu arcus  $QM$ , (vid. fig. Nor.) negativus est, seu si punctum  $M$ , cadit infra punctum  $Q$ , debet signum ipsius  $+E$ , ubique mutari in  $-$ , & signum  $-$  in  $+$ . Quoniam enim supra invenimus  $E : N - AQ$

$+D = L : L \mp \cos. AQ$ , si fuerit arcus  $N - AQ + D$ , negativus, debet quoque arcus  $E$  esse negativus, & arcus  $AQ$  erit  $AQ - E$ . Idem intelligendum est de signis ipsorum  $G$  &  $I$  &c. ob eandem rationem.

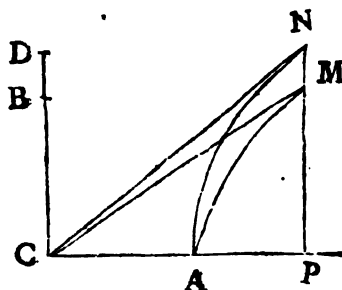
Non dissimili calculo conficitur problema in hyperbolâ. Sit ejus centrum  $O$ , vertex  $A$ , umbilicus  $S$  & asymptotos  $OK$ . Cognoscatur quantitas areæ abscindendæ tempore proportionalis. Sit ea  $A$ , & fiat conjectura de positione rectæ  $SP$ , quæ aream  $APS$  abscindat veræ proximam.



Jungatur  $OP$ , & ab  $A$  &  $P$  ad asymptoton agantur  $AI$ ,  $PK$  asymptoto alteri parallelæ, & (a) per tabulam logarithmorum dabitur area

(a) 374. Diximus superius (*Theor. IV. de Hyp. p. 124.*) aream inter asymptotum, Hyperbolam, ordinatam in vertice erectam & aliam ordinatam comprehensam, esse Logarithmum abscissæ, idem verò, more veterum demonstrare & ad hanc Propositionem propius accommodare hic non pigebit.

*Lemma.* Sint duæ hyperbolæ  $AM$ ,  $AN$  quarum centrum  $C$ , semidiameter communis  $AC$ , semidiametri conjugatæ  $CB$ ,  $CD$ , per punctum quodvis  $P$  agatur  $PMN$  ordinatim ad diametrum  $CP$  applicata, hyperbolis occurrens in punctis  $M$  &  $N$ , junganturque  $CM$ ,  $CN$  spatia hyperbolica  $AMP$ ,  $ANP$  & sectores  $AMC$ ,  $ANC$  sunt ad invicem in ratione semidiametrorum conjugatarum  $CB$ ,  $CD$ , vel etiam ordinarum  $PM$ ,  $PN$ . Nam ex naturâ hyperbolæ (*Theor. II. de Hyp.*)  $PM^2 : CB^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$ , &  $PN^2 : CD^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$ ; undè  $PM^2 : CB^2 = PN^2 : CD^2$ , &  $PM^2 : PN^2 = CB^2 : CD^2$ , ac  $PM : PN = CB : CD$ , cùmque idem semper eveniat quâcumque in parte cadat ordinata  $PMN$ , liquet spatia hyperbolica  $AMP$ ,  $ANP$  esse inter se ut  $CB$  ad  $CD$ , vel  $PM$



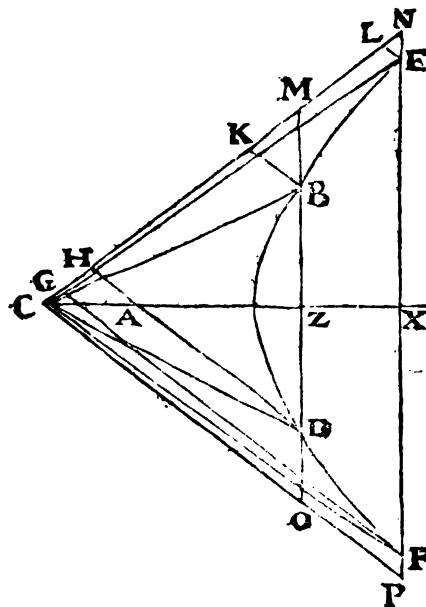
ad  $PN$ , sed triangula  $CPM$ ,  $CPN$  sunt ad invicem ut  $PM$  ad  $PN$  vel  $CB$  ad  $CD$ ; ergò  $CPM - AMP : CNP - ANP = AMC : ANC = PM : PN = CB : CD$ . Q. e. D.

375. *Coroll.* Si duæ semidiametri conjugatæ  $CA$ ,  $CD$  fuerint æquales, hyperbola  $AN$  erit æquilatera; quare inventâ quadraturâ spatiorum hyperbolicorum  $ANP$  vel  $ANC$  in hyperbolis æquilateris, habebitur etiam quadratura spatiorum hyperbolicorum  $AMP$  vel  $AMC$  in aliis quibuscumque hyperbolis.

# 280 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO. 376. *Lemma.* Si super hyperbolæ E B D F  
TU COR- asymptoto C N sumantur quatuor partes  
PORUM. CG, CH, CK, CL, ut sit CG : CH  
LIBER = CK : CL ducantur autem rectæ GF,  
PRIMUS. HD, KB, L E alteri asymptoto CP pa-  
rallelæ, & hyperbolæ occurrentes in punctis F, D, B, E, junganturque semidiametri CF, CD, CB, CE, sectores hyperbolici CBE, CDF erunt æquales. Agantur enim rectæ BD, EF asymptotis occurrentes in punctis M, O, N, P, & ob parallelas KB, HD, CO erit MB : MK = DO : CH, & ob parallelas LE, GF, CP erit etiam NE : NL = FP : CG; sed, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos ( *Lem. I. de Conic. pag. 115.* ) MB = DO, & NE = FP, unde MK = CH & NL = CG; Porro CG : CH = CK : CL ( *per hyp.* ) hoc est, NL : MK = CK : CL = LE : KB, ex naturâ hyperbolæ intrâ asymptotos ( *Theor. IV. de Hyp. p. 124.* ) rectæ igitur NE, MB, hoc est, EF, BD erunt parallelæ, ac proindè, linea per earum medium X, Z ducta erit Diameter, transibitque per centrum C; ( *Lem. IV. de Conic. p. 119.* ) unde facile deducitur trapezia MXZN, OXZP forte æqualia ut & areæ mixtilineæ BXZE, DXZF, unde singulis ex correspondenti trapezio subtractis relinquentur areæ MBEN & OD FP æquales, quibus addantur Triangula MBC, ODC, æqualia ob bases æquales MB, OD in eadem linea positas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, erunt æquales areæ CMNEBC, COPFDC, ex quibus denique subtractis Triangulis NEC, PFC quæ æqualia sunt ob bases æquales NE, PF in eadem lineâ positas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, supererunt sectores hyperbolici CBE, CDF inter se æquales. Q. e. D.

377. *Lemma.* Si per puncta quævis asymptoti CL, agantur duæ rectæ GF, HD alteri asymptoto CP parallelæ, & hyperbolæ occurrentes in F & D, junganturque semidiametri CF, CD, trapezium hyperbolicum GF D H æquatur sectori CFD. Nam, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos, triangula CHD, CGF, æquantur ob æquales angulos G & H & latera reciproca ( *per Theor. IV. de Hyp. p. 124.* ) adeoque sublato communi trian-



gulo CGA, residua spatia GADH, CAF erunt æqualia, quibus si addatur idem spatium hyperbolicum DAF, tummæ GFDH, CFD erunt æquales. Q. e. D.

378. *Coroll. 1.* Hinc iisdem positis quæ (num. 376.) trapezia hyperbolica GFDH, KBEL sunt æqualia.

379. *Coroll. 2.* Si asymptoti partes CG, CH, CK fuerint continuè proportionales, duo sectores CFD, CDB & duo trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, æquantur Eadem enim ratione quâ num. 376. ostenditur rectam BF tangentem per punctum D ductâ esse parallelam. Undè si super asymptoto CL sumantur partes quocumque CG, CH, CK, CL &c. in continuâ progressionem geometricâ, & ex punctis G, H, K, L &c. agantur rectæ GF, HD, KB, LE &c. alteri asymptoto parallelæ, trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, KBEL erunt æqualia; & vicissim si trapezia illa æquantur, erunt rectæ CG, CH, CK, CL &c. in continuâ progressionem geometricâ.

380. Coroll. 3. Sit hyperbola  $F D B E$  æquilatera, cujus centrum  $C$ , asymptotus  $CL$ , semiaxis transversus  $CF$ , capiantur in asymptoto partes  $CG, CH, CK, CL$ , &c. in continuâ progressionē geometricā, aganturque  $GF, HD, KB, LE$  &c., alteri asymptoto  $CP$  parallelæ, trapezia hyperbolica  $GFDH, HDBK, KBEL$  &c. erunt æqualia; quare eorum summæ, scilicet  $o, GFDH, GFBK, GFEL$ , &c. erunt in continuâ progressionē arithmetica. Si itaque  $CG$  sit unitas,  $CH, CK, CL$ , &c. numeri, erunt  $o, GFDH, GFBK, GFEL$ , illorum numerorum logarithmi.

381. Coroll. 4. Itaque per logarithmorum hyperbolicorum tabulas, inveniri possunt trapeziorum quorumvis  $GFDH, BGFK$ , &c. areæ; Sumptâ enim  $CG$  pro unitate, quærantur in numeris valores rectarum  $CH, CK$ , &c. & horum numerorum logarithmi exhibebunt trapezia hyperbolica  $GFDH, GFBK$ , &c.

382. Coroll. 5. Sit  $CG = 1, GH = x, CH = 1 + x, HD = y$ , & erit, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos  $1 + x \times y = 1$ ,

adeoque  $y = \frac{1}{1+x}$ , & trapezii  $GFDH$

elementum  $DHQM$  seu  $y dx = \frac{dx}{1+x}$ ; Si

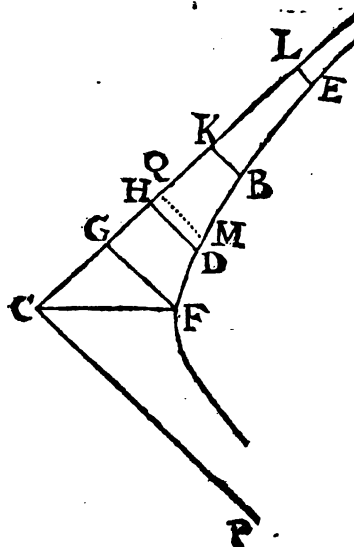
igitur  $L. 1+x$ , denotet logarithmum numeri  $1+x$ , erit  $L. 1+x = GFDH$ ; & elementum logarithmi seu  $d. L. 1+x$

$= y dx = \frac{dx}{1+x}$ . Et similiter elementum

logarithmi numeri cujusvis  $x$  seu  $d. L. x$

$= \frac{dx}{x}$ .

383. Coroll. 6. Cum sit  $y = \frac{1}{1+x}$ , si peragatur divisio, erit  $y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$  &c. in infinitum, ac proinde  $y dx = dx - x dx + x^2 dx - x^3 dx$  &c. in infinitum, & sumptis utrinque fluentibus  $S. y dx = GFDH = L. 1+x = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$  &c. in infinitum. Si autem numerus propositus sit unitate minor, seu  $1-x$ , eodem modo invenietur ipfius



DE MOTU  
CORPORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXI.

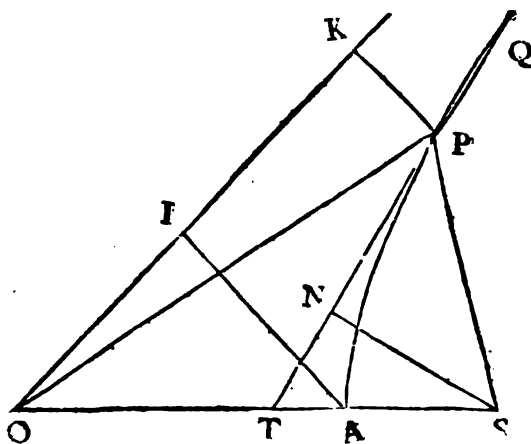
logarithmus  $S. -y dx = L. 1-x = -x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$  &c.

384. Scholium. Observandum est logarithmos hyperbolicos Neperi à logarithmis Briggsii quibus vulgò utimur differre; verum cum hyperbolici sint semper ad Briggsianos seu vulgares in eadem constanti ratione, nimirum logarithmus hyperbolicus numeri denarii 2. 302585 est ad logarithmum Briggsianum numeri denarii 1. 000000, ut quilibet logarithmus hyperbolicus ad ejusdem numeri logarithmum Briggsianum, facile est hyperbolicos ad Briggsianos & contrà Briggsianos ad hyperbolicos reducere, adeoque hyperbolarum quadraturam per logarithmos etiam vulgares invenire. Si dividatur 1. 000000, per 2. 302585 &c., quotiens 0. 4342948 &c. per logarithmum quemvis Hyperbolicum multiplicatus, dabit logarithmum vulgarem, & viceversâ, si logarithmus quilibet vulgaris per 0. 43429481 & dividatur, quotiens erit logarithmus hyperbolicus.

\* Et per tabulam. (381, 384.)

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER.  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXI.

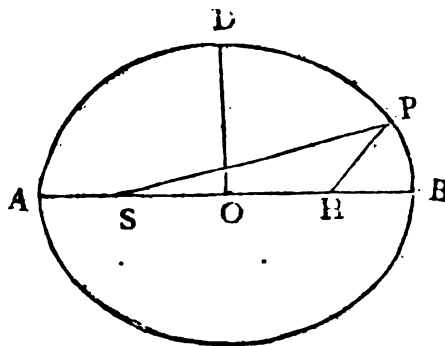
*AIKP*, (b) eique æqualis area *OPA*, quæ subtracta de triangulo *OPS* relinquet aream abscissam *APS*. Applicando areæ abscindendæ *A* & abscissæ *APS* differentiam duplam  $2 APS - 2 A$  vel  $2 A - 2 APS$  ad lineam *SN*, quæ ab umbilico *S* in tangentem *TP* perpendicularis est, (c) orietur longitudo



chordæ  $PQ$ . Inscribatur autem chorda illa  $PQ$  inter  $A$  &  $P$ , si area abscissæ  $APS$  major sit area abscindendâ  $\hat{A}$ , secus ad puncti  $P$  contrarias partes; & punctum  $Q$  erit locus corporis accuratior. Et computatione repetitâ invenietur idem accuratior in perpetuum.

Atque his calculis problema generaliter confit analyticè. Verùm  
 uſibus aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis qui  
 ſequitur. Exiſtentibus  $AO$ ,  $OB$ ,  $OD$  ſemiaxiſibus ellipſeos.  
 &  $L$  ipſius latere recto, ac  $D$   
 differentia inter ſemiaxem mi-  
 norem  $OD$  & lateris recti ſe-  
 miſſem  $\frac{1}{2} L$ ; quære tum angu-  
 lum  $Y$ , cujus ſinus ſit ad radium  
 ut eſt rectangulum ſub differen-  
 tia illa  $D$ , & ſemiſumma axium  
 $AO + OD$  ad quadratum axis  
 majoris  $AB$ ; tum angulum  $Z$ ,  
 cujus ſinus ſit ad radium ut eſt

The diagram shows an ellipse with a horizontal major axis labeled  $AB$  and a vertical minor axis labeled  $LD$ . The center of the ellipse is marked as  $O$ . On the major axis, there are two additional points:  $S$  located between  $A$  and  $O$ , and  $H$  located between  $O$  and  $B$ . A point  $P$  is marked on the upper right portion of the ellipse. Two line segments are drawn from the points on the major axis to the point  $P$ : one from  $S$  to  $P$  and another from  $H$  to  $P$ . The vertical axis  $LD$  is also shown, with  $L$  at the top and  $O$  at the center.



\* (b) Eique equalis area  $O P A$  (377):

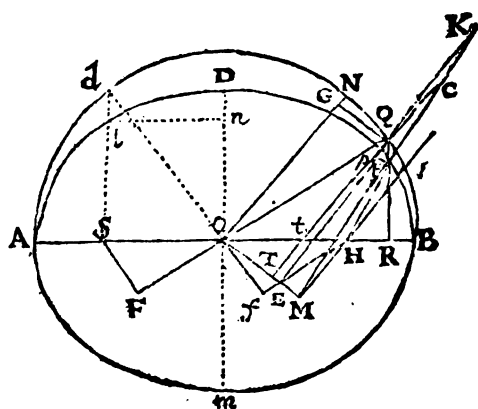
\* (c) *Oritur longitudo*. Nam cum ar-  
 xus: P Q exiguus sit, accipi potest pro chor-  
 da: P Q seu parte R Q tangentiis T P pro-  
 ductis; unde, triangulum rectilineum S Q P,  
 quam. proximè: æquatur differentie spatio-  
 rum hyperbolicorum. A P S, A S Q seu A,  
 sed, triangulum rectilineum S Q P =  $\frac{PQ \times SN}{2}$

$$\begin{aligned} \text{ergo } \frac{PQ \times SN}{2} &= A - APS, \text{ vel } = APS. \\ \text{— } A, \text{ ac proinde } PQ &= \frac{2A - 2APS}{SN} \text{ vel} \\ &= \frac{2APS - 2A}{SN}; \text{ prout area } A \text{ major vel} \\ \text{minor est. area } APS. \end{aligned}$$

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 283

duplum rectangulum sub umbilicorum distantia  $SH$  & differen- DE MO-  
tia illâ  $D$  ad triplum quadratum semiaxis majoris  $AO$ . His an- TU COR-  
gulis semel inventis, locus corporis sic deinceps determinabitur. PORUM.  
Sume angulum  $T$  proportionalem tempori quo arcus  $BP$  de- LIBER  
scriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & an- PRIMUS.  
gulum  $V$ , primam medii motus æquationem, ad angulum  $XXXL$   
 $Y$ , æquationem maximam primam, ut est sinus dupli anguli  $T$   
ad radium; atque angulum  $X$ , æquationem secundam, ad an-  
gulum  $Z$ , æquationem maximam secundam, ut est cubus sinus  
anguli  $T$  ad cubum radii. Angulorum  $T, V, X$  vel summæ  
 $T+X+V$ , si angulus  $T$  recto minor est, vel differentiæ  $T+X-V$ ,  
si is recto major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum  
 $BHP$ , motum medium æquatum; & si  $HP$  occurrat ellipsi in  $P$ ,  
actâ  $SP$  abscindet aream  $BSP$  tempori proportionalem quam proxi-  
mè. Hæc praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum  
perexiguorum  $V$  &  $X$ , in minutis secundis, si placet, positorum;  
figuras duas tresve primas invenire sufficit. Sed & satis accu-  
rata est ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ip-  
sius, cujus æquatio centri maxima est graduum decem, error  
vix superabit minutum unum secundum. Invento autem an-  
gulo motus medii æquati  $BHP$ , angulus veri motus  $BSP$   
& distantia  $SP$  in promptu sunt per methodum notissimam. (d)  
Hactè

(d) 385. Ellipseos quam Planeta de-  
scribit sit Centrum  $O$ , umbilici  $S, H$ ,  
& semiaxes  $OB, OD$ ; Sole in  $S$  pos-  
ito umbilicus alter  $H$  erit ferè centrum  
medii motus Planetæ, (372) id est, si ex  
umbilico  $H$  agatur linea  $HI$ , quæ cum  
lineâ apsidum  $OB$ , constituat angulum  $IHB$   
anomaliz mediz æqualem, recta illa  $HI$ ,  
ferè transibit per locum Planetæ in orbi-  
tâ ellipticâ parum excentricâ revolvantis,  
transeat autem  $HP$ , per locum verum  
Planetæ  $P$  & erit angulus  $PHI$ , ano-  
maliz mediz  $IHB$ , addendus (vel de-  
trahendus) ut motus medius æquatus  $BHP$   
habeatur, & angulus  $PHI$  aut ipsi æqui-  
pollens dicetur æquatio tota medii motus;  
quam in duas partes dividit NEWTONUS,  
quarum unam primam æquationem & al-



N n 2

teram





neam ME; Dicatur autem angulus anomaliz  
mediæ T erit ( per construct. ) HOM ejus  
complementum ad duos Rectos, fiatque ut  
Radius ( qui in toto hoc calculo sumitur æ-  
qualis OB ) ad Cos. T sic OH ad MH.

$$\frac{OH \times \text{Cos. } T}{OB}; \text{ Præterea arcus } NQ = SF,$$

& est OQ ( five OB ) ad QR ut est OS ( five  
OH ) ad SF ideoque SF five NQ =  $\frac{OH \times QR}{OB}$

unde proportio superius inventa OB : NQ  
= MH : ME in hanc vertitur OB :  $\frac{OH \times QR}{OB}$

$$= \frac{OH \times \text{Cos. } T}{OB} : ME = \frac{OH^2 \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^3}$$

five quia ( per nat. Ellips. )  $OH^2 =$   
 $OB^2 - OD^2 = OB + OD \times OB$   
 $- OD$  ( per 6. 2. Elem. ) est ME  
 $= \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^3}$

Radius verò KM hac ratione determina-  
tur: Ducatur ex P linea Pp, perpendicu-  
laris in TQ ac proinde parallela lineæ  
ME, ejus portio terminata in linea EK  
est quidem ita proximè æqualis ipsi Pp,  
ut Pp pro illa sumi possit, est verò ob pa-  
rallelas ME: Pp = KM: KP.

Facile autem determinatur ratio ME ad  
Pp, nam angulus TQR est complemen-  
tum anomaliz mediæ QtR, unde est,  
Radius OB, ad Cos. T sicut QP ad Pp

$$= \frac{\text{Cos. } T}{OB} \times QP, \text{ est autem } QP \text{ differentia}$$

inter QR & PR, est verò QR ad PR  
ut semiaxis major OB ad minorem OD,

$$\text{est ergo } PR = \frac{OD \times QR}{OB} \text{ \& } QP = QR:$$

$$= \frac{OD \times QR}{OB} = \frac{QR}{OB} \times OB - OD, \text{ ita}$$

$$\text{que } Pp = \frac{\text{Cos. } T \times QR}{OB^2} \times OB - OD,$$

ideoque ME ad Pp sicut

$$\frac{OA + OD \times OB - OD \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^3} :$$

$$\frac{OB - OD \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^3} :$$

utroque autem termino multiplicato per  
OB, superest. ra-

$$\frac{OE - OD \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^2}$$

tio OB + OD ad OB, æqualis rationi  
ME ad Pp five KM ad KP, unde con-  
vertendo est OD : OB + OD = KM  
— KP ( MP ) : KM; five quia OB + OD  
est ferè 2 OB, est OD : 2 OB = MP : KM.

Erit autem MP proximè æqualis lineæ  
Tp, hæc verò lineæ Qt, cum enim par-  
va sit excentricitas, Qp compensat ferè  
partem neglectam Tt, est verò Qt  
parallela NO, ideoque est QtR æqua-  
lis anomaliz mediæ, ergo est sinus anoma-  
liz mediæ ad radium ut QR ad Qt, si-  
ve sin. T : OB = QR : Qt =  $\frac{OB \times QR}{\text{sin. } T}$

= MP unde cum sit OD ad 2 OB  
sicut MP five  $\frac{OB \times QR}{\text{sin. } T}$  ad KM erit KM

$$= \frac{2 \times OB^2 \times QR}{OD \times \text{sin. } T}, \text{ sed inventa erat ME}$$

$$= \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^3}$$

multiplica ergo valores KM & ME per  
2 sin. T x OD

QR eritque KM ad ME five ra-  
dius ad sinum anguli K ut 4OB<sup>2</sup> ( five AB<sup>2</sup> ) ad  
2OD x OB + OD x OB — OD x sin. T x Cos. T

$$OB^3$$

& cum sit semi latus rectum  $\frac{1}{2} L = \frac{OD^2}{OB}$ , erit

$$OD - \frac{1}{2} L = OD - \frac{OD^2}{OB} = \frac{OD}{OB} \times OB - OD$$

— OD, vocetur D ea differentia semi-  
axis minoris & semilatis recti, & substi-

$$\text{tuto } D \text{ loco } \frac{OD}{OB} \times OB - OD \text{ erit Ra-}$$

dus ad sinum anguli K ut AB<sup>2</sup> ad D x

$$OB + OD \times \frac{2 \text{ Cos. } T \times \text{sin. } T}{OB^2}$$

387. Ergo in quovis gradu anomaliz  
mediæ erit, est semper Radius ad AB<sup>2</sup>

ut sin. Anguli K, ad D x  $\frac{OB + OD}{OB}$

$$2 \text{ Cos. } T \times \text{sin. } T$$

cum verò ratio Radii ad  
AB<sup>2</sup> sit constans, hæc altera etiam erit con-

stans, ideoque in omni casu sin. Anguli K  
ubi anomalia media est T, erit ad ejus sinum  
ubi anomalia media erit t, ut D x  $\frac{OB + OD}{OB}$

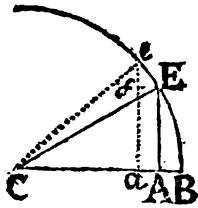
$$\frac{2 \text{ Cos. } T \times \text{sin. } T}{OB^2}$$

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER

PRIMUS  
PROP.

XXXL



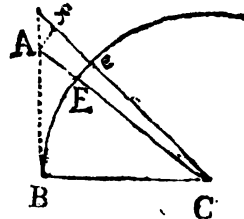


rectus ut & angulus C E e quia circulus est perpendicularis in radium, & dempto communi C E f remanent C E A & f E e æquales, & ob rectos in f & A, angulus tertius f e E æqualis erit tertio E C A unde habetur hæc proportio, C A ad C E ut e F ad e E, five  $\sqrt{rr - xx} : r = dx : dv$  unde est  $dv = \frac{r dx}{\sqrt{rr - xx}}$  &  $dv^2 = \frac{rr dx^2}{rr - xx}$  five  $rr^2 - xx^2 = \frac{rr dx^2}{dv^2}$ .

Iam verò supponatur valorem x hac serie exprimi,  $x = Av + Bv^2 + Cv^3$  &c. erit  $dx = A dv + 2Bv dv + 3Cv^2 dv$  &c. &  $dx^2 = A^2 dv^2 + 4ABv dv^2 + 6ACv^2 dv^2 + 4B^2 dv^2 + 12BCv^3 dv^2 + 6C^2 dv^3$  &c. &  $xx = A^2 v^2 + 2ABv^3 + 2BBv^4 + 2ACv^4$  &c. unde  $rr - xx = rr - A^2 v^2 - 2ABv^3 - 2BBv^4$  &c. &  $\frac{rr dx^2}{dv^2} = rr A^2 + 4rr ABv + 6rr ACv^2 + 4rr B^2 v^2 + 12rr BCv^3 + 6rr C^2 v^3$  &c.

unde hæc duæ series æquales sunt, & terminorum A, B, C &c. valor ex comparatione terminorum correspondentium harum serierum eruitur, erit ergo  $-rr = A^2 v^2 - 2ABv^3 + 6rr ABv^3 + 9rr BBv^4 + 10rr ACv^4$  &c. unde erit  $rr = rr AA$ , ideoque  $A = 1$ .  $-A^2 v^2 = 6rr ABv^3$ , unde  $-1 = 6rr B$  &  $B = \frac{-1}{6rr}$ .  $-2ABv^3 = 9rr BBv^4 + 10rr ACv^4$  five substitutione facta & terminis per v. divisus  $+\frac{2}{6rr} = \frac{9}{36rr} + 10rr AC$ , five  $10rr AC = \frac{3}{36rr}$  &  $C = \frac{3}{10 \times 36rr} = \frac{1}{120rr}$  &c. unde series  $Au + Bv + Cv$  &c. = radii

hancredit  $x = v - \frac{v^3}{2 \times 3r^2} + \frac{v^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5r^4}$  &c. quæ series facile continuatur, & arcu existente parvo citissime convergit.



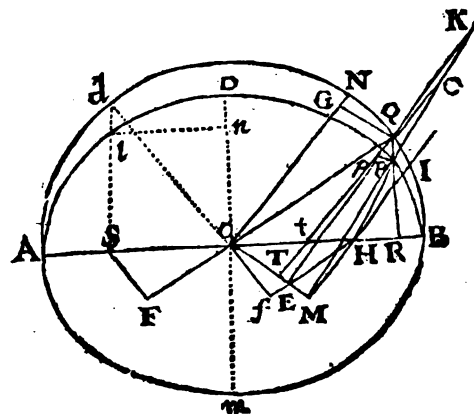
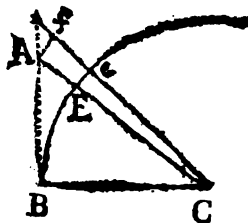
Lemma II. Dato arcu invenire secantem. Sit ut prius radius C B, r, secans quæsitæ C A, y, Tangens B A  $\sqrt{yy - rr}$ , Arcus datus B E, v, ejus fluxio E e, dv. Ducatur ex centro secans C a, proxima propositæ, & radio C A centro C, describatur arcus A f erit f A fluxio secantis quæsitæ five dy, erunt autem arcus E e & A f ut eorum radii C E, C A ideoque est r : y =

$dv : A f = \frac{y dv}{r}$ ; præterea Triangula ACB, a A f sunt similia, nam ob angulum rectum f A C angulus f A a est complementum anguli C A B five est æqualis angulo A C B, anguli verò B & f sunt ambo æquales uti pote recti, est ergo C B : B A = A f : f a, five  $r : \sqrt{yy - rr} = \frac{y dv}{r} : dy$  & quadrando,  $rr : yy - rr = \frac{yy dv^2}{rr} : dy^2$  five  $r^2 \frac{dy^2}{dv^2} = y^4 - r r y^2$ , Fingatur ergo esse  $y = A + Bv^2 + Cv^4 + Dv^6$  &c. est  $dy = 2Bv dv + 4Cv^3 dv + 6Dv^5 dv$  &c. &  $dy^2 = 4B^2 v^2 dv^2 + 16BCv^4 dv^2 + 16C^2 v^6 dv^2 + 24DBv^6 dv^2$  &c. &  $y^2 = A^2 + 2ABv^2 + 2ACv^4 + BBv^4 + B^2 v^4 + 4AB^2 v^4 + 4A^2 C v^4$  &c.

est ergo  $\frac{r^2 dy^2}{dv^2} = 4r^2 B^2 v^2 + 16r^2 BCv^4 + 16r^2 C^2 v^6 + 24r^2 DBv^6$  &c. &  $y^4 - r r y^2 = A^4 + 4A^2 Bv^2 + 6A^2 B^2 v^4 - r^2 A^2 - 2r^2 ABv^2 + 4A^2 Cv^4 - r^2 A^2 Cv^4 - r^2 B^2 v^4$  &c.

DE METU CORP. LIBER PRIMUS. PROP. XXXI.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXI.



Unde collatis terminis correspondē-  
tibus harum serierum est  $A + r^2 A^2$   
 $= 0$ , ideoque  $A^2 = r^2$ , &  $A = r$ ; est  
 $4r + B^2 v^2 = 4A + Bv^2 - 2r^2 ABv^2$ ,  
sive divis omnibus terminis per  $Bv^2$  &  
posito loco  $A$ ;  $4r + B = 4r - 2r^2$

ideoque est  $B = \frac{1}{2r}$ ,

est  $16r + B^2 v^4 = 6A^2 Bv^4 + 4A + C v^4$   
 $= 2r^2 A C v^4 - r^2 B B v^4$ , quæ divisa  
per  $v^4$  substitutisque valoribus  $A$  &  $B$   
dant

$8r + C = \frac{6}{4} + 4r + C - 2r + C - \frac{1}{4}$  unde est  
 $6r + C = \frac{5}{4}$  &  $C = \frac{5}{2 \times 1 \times 4r}$  &c.

Series ergo ad secantis valorem expri-  
mendū  $A + Bv^2 + Cv^4$  &c. in hanc  
vertitur  $r + \frac{v^2}{2r} + \frac{5v^4}{2 \times 3 \times 4r}$  &c.

Quæ satis prompte convergit si modo ar-  
cus  $v$  sit exiguus, ut isto in casu.

His positis, inveniuntur commodè par-  
tes lineæ  $TE$ , five sinus secundæ æquatio-  
nis, ea enim constat ex differentia inter ar-  
cum  $NQ$  & ejus sinum (dato radio  $OB$ )  
& ex differentia inter eum ipsum arcum  
 $NQ$  sumptum ut radium in angulo  $FOE$  &  
illius anguli secantem.

Primum ergo differentia inter arcum  $NQ$   
& ejus sinum, ex primâ serie inveni-  
tur, sit enim  $v = NQ$  &  $r = OB$ , sinus  
arcus  $NQ$  per eam seriem invenitur

$NQ - \frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$  &c. & omittis reliquis termi-  
nis seriei, hic admodum exiguis, liquet dif-  
ferentiam inter arcum  $NQ$  & ejus sinum  
esse terminum  $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$  qui erat in ea

serie ex arcu  $NQ$  tollendus ut obtineretur  
sinus.

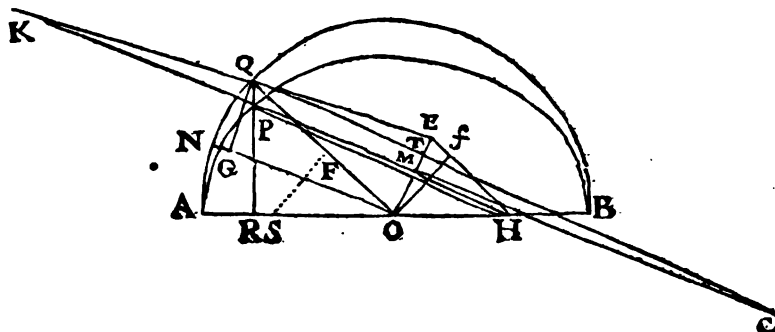
Secundo, ut differentia inter radium &  
secantem anguli  $FOE$  obtineatur, loco  
radii  $r$  in serie superius inventâ valor ra-  
dii  $OF$  five  $NQ$  est substituendus, & lo-  
co arcus  $v$ , valor arcus qui mensurat  
eum angulum & qui inventus fuit  $= \frac{NQ^2}{OB}$ ,

ergo series quæ secantem exprimit in hanc  
abit  $NQ + \frac{NQ^4}{2 OB^2 \times NQ}$  &c. reliquis  
terminis ut pote minimis omittis, excessus  
secantis super radium est  $\frac{NQ^3}{2 OB^2}$ , qui  
junctus cum excessu arcus super sinum  
superius invento  $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$  efficit sum-

nam  $\frac{4NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$  five  $\frac{2NQ^3}{3 OB^2}$  pro va-  
lore sinus æquationis secundæ; sed est  
(369) ut Radius  $OB$  ad  $QR$  ita  $SH$  five  
 $OH$  ad  $SF$  five  $NQ$ , ergo  $NQ = \frac{OH}{OB} \times QR$   
&  $\frac{2NQ^3}{3 OB^2} = TE = \frac{2OH}{3 OB} \times QR$ ;

Itaque cum in hac secundâ æquatione ra-  
dius  $QE$  sit in omni anomaliz gradu idem  
aut prope idem, & anguli sint minimi  
erunt inter se quam proximè ut eorum sinus  
 $TE$

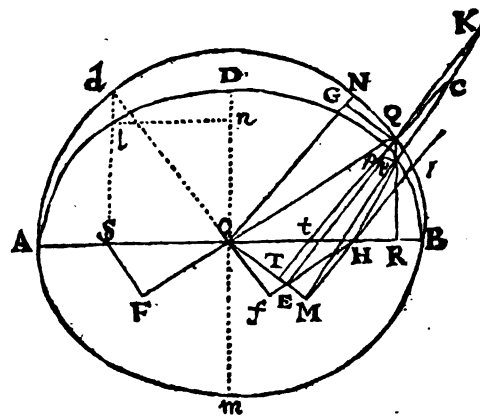




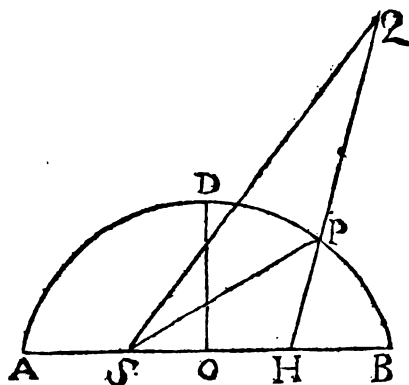
que alia figura secundum constructionem à nobis indicatam, sit locus verus Planetæ P, describatur circulus BQNA, in magnum axem BA, sitque PR perpendicularis à loco Planetæ in axem ducta, quæ producta fecit circulum BQNA in Q, ducatur QO, in quam ex sole S, ducatur perpendicularum SF, cui æqualis sumatur arcus QN, erit NOB anomalia media, ducatur in lineam ON perpendicularis OM quæ terminetur in M per perpendicularum à foco altero H ductum, erit ergo MH parallela ON & MHB æqualis anomaliz mediæ, ex H ducatur ad Planetam linea HP, erit ergo angulus MHP angulus anomaliz mediæ addendus ut prodeat motus medius æquatus PHB, fiat etiam super OH Triangulum OFH simile & æquale Triangulo SFO, & producat Hf donec fecit in E lineam OM productam; Ducatur ex Q ad T linea QT, parallela lineæ NO ideoque etiam parallela lineæ MH, & erit OT æqualis QG sinui arcus QN. Ducatur etiam linea PM quæ producta fecabit in C lineam QT productam & angulus Cerit æqualis angulo HMC, qui erit æqualis angulis MHP & MPH (per 32. I. Elem.) sed ob exiguitatem lineæ MH respectu MP, omittitur angulus MPH, & angulus HMC, sive angulus C, pro angulo MHP æquatione motus medii assumitur; Denique ex E per Q ducatur linea EQK quæ lineam PMG secabit in K erit angulus EQT æqualis angulis K & C: (per 32. I. Elem.) ergo si ex angulo EQT subtrahatur angulus K remanebit angulus C, sive æquatio quæ sita, est vere angulus EQT secunda æquatio & angulus K sive EKM prima, ut liquet ex constructio-

ne; ergo in secundo quadrante prima æquationis pars subtrahi debet sive negativè sumi, secunda verò positiva remanet.

In tertio quadrante hæc eadem figura deorsum convertatur sub axe AB, liquebitque angulum MHB seu Anomaliā mediā, quæ hic 180° gradus superat, angulo MHP sive angulo C esse minuendam ut habeatur anomalia æquata PHB, ideoque cum sit  $C = EQT - K$  secunda æquatio EQT subtractivè sumi debet, & prima K additivè.



In ultimo denique quadrante invertatur figura prima, liquebit ex anomaliam mediā IHB; seu HMP, detrahendum esse angulum IHP, seu HMP, sive angulum C ipsi æqualem, ut prodeat motus medius æquatus, sed angulus C est summa utriusque partis æquationis, nempe anguli K, & anguli.



anguli KQC five TQE, ergo in ultimo quadrante utraque æquatio negativè assumitur.

390. Exemplum fit in orbe Martis ADB, qui omnium, si orbem Mercurii excipias, est maximè excentricus. Excentricitas SO, sit partium 141. & semiaxis major = 1523. 69. erit semiaxis minor OD = 1516. 93. semilatus rectum seu  $\frac{1}{2}L = 1510. 184$ . differentia inter semiaxem minorem & semilatus rectum  $\frac{1}{2}L, = 6. 746. = D$ . Differentia inter logarithmum radii & logarithmum quadrati axis AB, per tabulas.

erit = 3. 0321367. 62.

Log. AO + OD = 3. 3097621. 36.

Log. D = 0. 7580391. 75.

Summa = 7. 0999380. 73. æqualis logarithmo finis anguli Y, per primam proportionem NEWTONI, atque hinc in tabulis invenietur angulus Y, minorum primorum 4', secundorum 21. 14".

Differentia inter logarithmum radii & Logarithmum facti  $3AO^2$ .

erit = 3. 1570755. 62.

Log. facti  $2SH \times D = 3. 5093282. 75$ .

Summa = 6. 6664038. 37. æqualis logarithmo finis anguli Z, qui per tabulas invenitur esse minorum secundorum 100. 39". Inventis jam æquationibus maximis Y + Z, anguli V, & X, pro quolibet anomaliz mediæ gradu facile reperiuntur v. gr. pro 45°.

Est enim Log. anguli Z = 2. 0016853. 46.

Log. cubi finis 45° = 29. 5484550.

horum summa = 31. 5501403. 46.

Ex hac summa detrahe logarithmum cubi radii 30. 0000000; residuum 1. 5501403. 46. erit logarithmus finis anguli X, qui per tabulas invenietur esse minorum secundorum 33. 41". Quare cum in 45° anomaliz gradu angulus V, æqualis sit angulo Y, erit motus medius æquatus, seu angulus PHB, = 45°, 4', 56. 55".

Jam verò ut inveniatz anomaliz vera; seu angulus PSB, dato angulo PHB, producatz HP ad Q ut sit PQ = SP, & erit HQ = AB, ex natura ellipsoos, atque angulus PHB, æqualis summe angulorum QSH, SQH; Quare semisumma laterum SH, HQ, est ad eorum semidifferentiam, hoc est, AO + SO, ad AO - SO, ut tangens dimidii anguli PHB, ad tangentem semidifferentiz angulorum QSH, SQH.

Log. tang.  $\frac{1}{2}PHB = 9. 6181066. 717$ .

Log. AO - SO = 3. 1407247. 98.

horum summa = 12. 7588314. 698.

Log. AO + SO = 3. 2212068. 41.

Differentia = 9. 5376246. 246.

= Log. tang. Ang.  $\frac{1}{2}QSH - \frac{1}{2}SQH$ .

Unde invenietur  $\frac{1}{2}QSH - \frac{1}{2}SQH = 19°.$

1', 35. 5"; & hinc anomaliz vera = QSH -

SQH (five - QSP) = 38°. 3' 11", quam

proximè; Nam si ex datâ hac anomaliz vera,

quæratz (371) anomaliz media, invenietur esse 45° graduum quam proximè.



## S E C T I O VII.

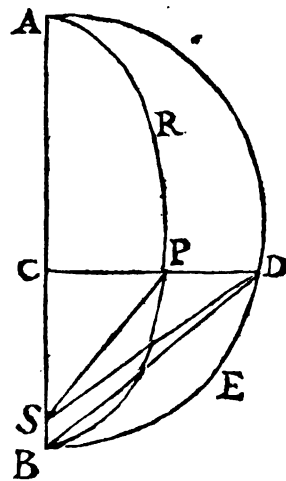
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXII.

*De corporum ascensu & descensu rectilineo.*

## PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

*Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiae locorum à centro, spatia definire quæ corpus rectà cadendo datis temporibus describit.*

*Cas. 1.* Si corpus non cadit perpendiculariter, describet id ( *per corol. 1. prop. XIII.* ) sectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit sectio illa conica  $ARPB$  & umbilicus ejus  $S$ . Et primo si figura ellipsis est; super hujus axe majore  $AB$  describatur semicirculus  $ADB$ , & per corpus decidens transeat recta  $DPC$  perpendicularis ad axem; actisque  $DS$ ,  $PS$  erit area  $ASD$  areae  $ASP$ , atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe  $AB$  minuatur perpetuo latitudo ellipseos, &



semper manebit area  $ASD$  tempori proportionalis. (e) Minuatur latitu-

(e) 391. *Lemma.* Si sectionis conicæ latus rectum ad axem transversum pertinet perpetuò minuatur, & tandem evanescat, manente sectionis axe transverso, omnes ad axem ordinatæ perpetuò minuantur & tandem evanescunt, ac perimeter sectionis cum axe & umbilici cum axis verticibus coincidunt. Est enim, ( *ex conic.* ) ordinatæ cujusvis quadratum ad rectangulum abscissarum in ratione datâ lateris recti ad axem transversum; quare si manente axe transverso, adeoque & abscissarum rectangulo, latus rectum perpetuò minuatur ac tandem evanescat, ordinatæ quadratum adeoque & ordinata ipsa perpetuò minuitur & tandem evanescit, &

perimeter sectionis conicæ cum axe coincidit. Porro ordinata per umbilicum æqualis est dimidio lateri recto ( *Vid. sup. in Conicis, Theor. III. de Hyperbola & de Ellipsi & Cor. I. Theor. I. de Parab.* ) adeoque quadratum dimidii lateris recti est ad rectangulum ex distantii umbilici à verticibus, ut latus rectum ad axem transversum, unde rectangulum sub quartâ parte lateris recti & axe transverso æquatur rectangulo ex distantii umbilici à verticibus; quare evanescente latere recto & manente axe transverso, rectangulum sub distantii umbilici à verticibus nullum fit, & umbilicus cum proximo vertice coincidit.



*Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C est ad velocitatem corporis centro B intervallo BC circum descriptis, in subduplicatâ ratione quam AC distantia corporis à circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore A, habet ad figuræ semidiametrum principalem  $\frac{1}{2}$  AB.*

Bifecetur  $AB$ , communis utriusque figuræ  $RPB$ ,  $DEB$  diameter, in  $O$ ; & agatur recta  $PT$ , quæ tangat figuram  $RPB$  in  $P$ , atque etiam secet communem illam diametrum  $AB$  ( si opus est productam ) in  $T$ ; sitque  $SY$  ad hanc rectam, &  $BQ$  ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ  $RPB$  latus rectum ponatur  $L$ . Constat *per corol. 1x. prop. xvi.* quod corporis in lineâ  $RPB$  circa centrum  $S$  moventis velocitas in loco quovis  $P$  fit ad velocitatem corporis intervallo  $SP$  circa idem cen-

(h) 394. *Simili argumentis.* In Parabola 1<sup>o</sup>.  $CSP : CSD = CP : CD$ . 2<sup>o</sup>. sit latus rectum Parabola  $BfP = l$ , latus rectum Parabola  $BED = L$ , erit, ex natura Parabola  $CP^2 = l \times CB$  &  $CD^2 = L \times CB$ , adeoque  $CP : CD = \sqrt{l} : \sqrt{L}$ , hoc est, in ratione data, ergo area  $CBE P$  est ad aream  $CBED$ , in eadem ratione data  $C P$  ad  $C D$ ; Quare 3<sup>o</sup>. divisim  $SPfB : SDEB = CP : CD$ . Cætera se habent ut in demonstratione casus secundi.

395. *Scholium.* Corporis per rectam

CS, ad centrum S, cadentis velocitas in loco quovis C, est ad velocitatem corporis alterius ad eandem à centro distantiam circulum describentis, vel in ratione minore quam  $\sqrt{2}$ , ad 1, vel in ratione majore aut in eâ ipsâ ratione. In 1<sup>o</sup>. casu recta SC, usurpanda est pro elliptici latitudinis evanescentis; in 2<sup>o</sup>. casu, recta SC, est hyperbola cujus latus rectum evanescit; in 3<sup>o</sup>. casu, recta SC, est parabola lateris recti evanescentis. Hæc omnia patent ex *coroll. 7<sup>o</sup>. Prop. XVI.*



DEMO. ræ *R P B* latitudo  
TU COR- *CP*, sic ut pun-  
PORUM. ctum *P* coeat  
LIBER. cum puncto *C*,  
PRIMUS. punctumque *S*,  
PROP. cum puncto *B*,  
XXXIII. & linea *SP* cum  
linea *BC*, linea-  
que *SY* cum li-  
neâ *BQ*; & cor-  
poris jam rectâ  
descendentis in li-  
neâ *CB* veloci-  
tas fiet ad velo-  
citatem corporis  
centro *B* inter-  
vallo *BC* cir-  
culum describen-  
tis; in subduplica-  
tâ ratione ipsius  
*BQq × AC × SP*

$\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$  ad *SYq*, hoc est, (neglectis æqualitatis ratio-  
nibus *SP* ad *BC* & *BQq* ad *SYq*) in subduplicatâ ratione *AC*  
ad *AO* five  $\frac{1}{2} AB$ . *Q. E. D.*

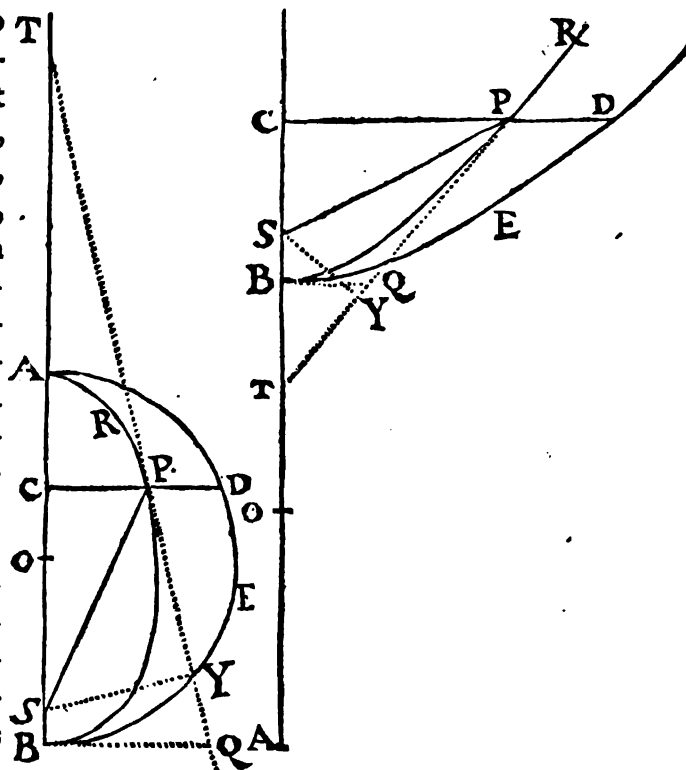
*Corol. 1.* Punctis *B* & *S* coeuntibus, fit *TC* ad *TS* ut *AC* ad *AO*.

*Corol. 2.* (<sup>k</sup>) Corpus ad datam à centro distantiam in circulo  
quovis revolven-, motu suo sursum verso ascendet ad duplam  
suam à centro distantiam. PRO-

(<sup>k</sup>) 397. *Corpus ad datam.* Si fuerit  
*BED* circulus, & punctum *C* coincidat  
cum puncto *O*, erit  $AC = AO = \frac{1}{2} AB$ ,  
adeoque velocitas per radium *AO* ca-  
dendo acquisita est æqualis velocitati cor-  
poris centro *B* intervallo  $BO = AO$  cir-  
culum describentis. Unde si corpus illud,  
ad datam à centro distantiam *BO* in cir-  
culo revolvens, sursum per *OA*, projecia-  
tur cum eâ velocitate quâ circulum de-

scribit, seu quam per *AO* cadendo acqui-  
sivit, ascendet ad punctum *A*, per ipa-  
rium *OA* (25) seu ad duplam suam à  
centro *B* distantiam  $BA = 2 BO$ .

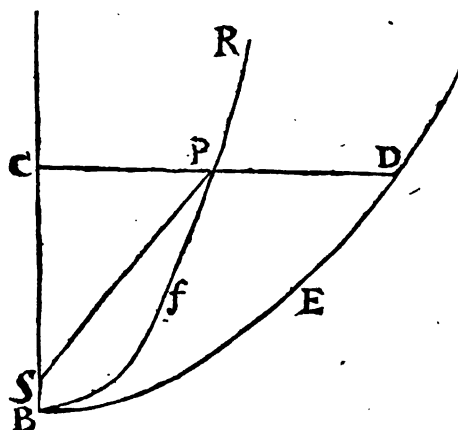
398. *Coroll. 1.* Velocitas in puncto  
quovis *C*, est ad velocitatem in alio pun-  
cto *c*, in ratione subduplicatâ rectanguli  
 $AC \times BC$ , ad rectangulum  $Ac \times Bc$ .  
Nam velocitas in *C*, est ad velocitatem  
corporis intervallo *BC* circulum descri-  
ben-



PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXIV.

Si figura BED parabola est ; dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C æqualis est velocitati quâ corpus centro B dimidio intervalli sui BC circum uniformiter describere potest.



Nam corporis parabolam RPB circa centrum F describentis velocitas in loco quovis P ( per coroll. VII. prop. XVI. ) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli SP circum circa idem centrum S uniformiter describentis. Minuatur parabolæ latitudo CP in infinitum eo , ut arcus parabolicus P f B cum rectâ CB, centrum S cum vertice B, & intervallum SP cum intervallo BC coincidat, & constabit propositio. Q. E. D.

PRO-

bentis ut  $\sqrt{AC}$  ad  $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$  ( per hanc prop. ) ; Velocitas corporis intervallo BC circum describentis est ad Velocitatem corporis intervallo BC circum describentis, ( per Cor. 6. Prop. IV. ) reciprocè in ratione subduplicatâ Radiorum, hoc est, ut  $\sqrt{BC}$  ad  $\sqrt{BC}$ ; Denique Velocitas Corporis intervallo BC circum describentis est ad Velocitatem in c corporis ex A cadentis ut  $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$  ad  $\sqrt{AC}$  ( per hanc propositionem ) ; Ergo per compositionem rationum ) est velocitas in C ad velocitatem in c, in ratione compositâ ex ratione compositâ ex ratione  $\sqrt{AC}$  ad  $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ , ratione

$\sqrt{BC}$  ad  $\sqrt{BC}$ ; & ratione  $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$  ad  $\sqrt{AC}$ , sive ut  $\sqrt{AC} \times \sqrt{BC}$  ad  $\sqrt{AC} \times \sqrt{BC}$ , hoc est, in ratione subduplicatâ rectanguli AC x BC ad rectangulum AC x BC. Q. E. D.

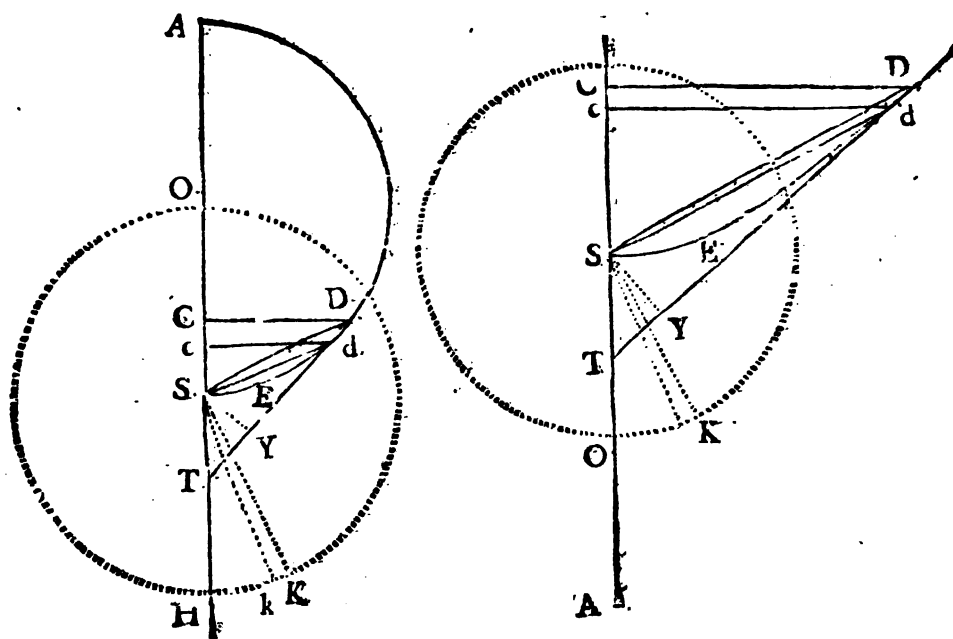
399. Coroll. 2. Si fuerit B f P Parabola, corporis in ea moti velocitas in loco quovis P, erit ad velocitatem corporis ad distantiam SP, circum describentis in ratione  $\sqrt{2}$ , ad 1; si fit Ellipsis in minori ratione, in majori verò si fuerit hyperbola ( per Cor. 7. Prop. 16. ) & latitudine orbis imminuta in infinitum ut coincidat B f P cum axe BC, erit corporis cadentis velocitas in loco quovis C ad velocitatem corporis ad distantiam BC circum describentis ut  $\sqrt{2}$  ad 1. adeoque  $AC : \frac{1}{2}AB = 2 : 1$  in 2º. casu ratio AC, ad  $\frac{1}{2}AB$ , minor erit quam ratio 2 ad 1; in 3º. casu major, & contrâ.

P p

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXV.

## PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

*Isdem positis, dico quod area figuræ DES, radio indefinito SD descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ DES æquante, circa centrum S uniformiter gyran-  
do, eodem tempore describere potest.*



Nam concipe corpus  $C$  quam minima temporis particulâ lineolam  $Cc$  cadendo describere, & interea corpus aliud  $K$ , uniformiter in circulo  $QKk$  circa centrum  $S$  gyran-  
do, arcum  $Kk$  describere. Erigantur perpendiculara  $CD$ ,  $cd$  occurrentia figuræ  $DES$  in  $D$ ,  $d$ . Jungantur  $SD$ ,  $Sd$ ,  $SK$ ,  $Sk$  & ducatur  $Dd$  axi  $AS$  occurrens in  $T$ , & ad eam demittatur perpendicularum  $SY$ .

*Cas. 1.* Jam si figura  $DES$  circulus est vel hyperbola rectangularis, bisecetur ejus transversa diameter  $AS$  in  $O$ , & erit  
**SO**

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 299

SO dimidium lateris recti. (1) Et quoniam est TC ad TD ut DE Mo-  
Cc ad Dd, & (m) TD ad TS ut CD ad SY, erit ex æquo TU COR-  
TC ad TS ut CD x Cc ad SY x Dd. Sed (per corol. 1. prop. PORUM-  
xxxiii.) (n) est TC ad TS ut AC ad AO, puta si in coitu PRIMUS,  
punctorum D, d capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo ACPROP.  
est ad AO seu SK ut CD x Cc ad SY x Dd. Porro corpo-xxxv,  
ris descendens velocitas in C est ad velocitatem corporis cir-  
culum intervallo SC circa centrum S describentis in subduplicatâ ratione AC ad AO vel SK (per prop. xxxiii.) Et hæc  
velocitas ad velocitatem corporis describentis circumulum OKk in  
subduplicatâ ratione SK ad SC (per corol. vi. prop. 1v.) &  
ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola Cc ad ar-  
cum Kk in subduplicatâ ratione AC ad SC, (o) id est in ra-  
tione AC ad CD. Quare est CD x Cc æquale AC x Kk, &  
(p) propterea AC ad SK ut AC x Kk ad SY x Dd, indeque  
SK x Kk æquale SY x Dd, &  $\frac{1}{2}$  SK x Kk æquale  $\frac{1}{2}$  SY x Dd,  
id est area KSk æqualis areæ S Dd. Singulis igitur temporis  
particulis generantur arearum duarum particule KSk, & S Dd,  
quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in  
infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per co-  
rollarium lemmatis 1v.) areæ totæ simul genitæ sunt semper æqua-  
les. Q. E. D.

Caf

(1) \* Et quoniam est TC ad TD ut Cc ad Dd. Quia in Triangulo TCD, est ad parallela basi CD, ideoque TC:TD ut partes correspondentes Cc, Dd.

(m) \* Et TD ad TS ut CD ad SY. Sunt enim propter angulos Y, & C, rectos & angulum T, communem, triangu-  
la TCD, TSY, similia.

(n) Est TC:TS. Nam punctis D, d, coeuntibus, fit TD, tangens; adeoque (396.) TC:TS=AC:AO.

(o) \* In ratione AC ad SC, id est in ratione AC ad CD. Est enim SED, cir-  
culus, vel hyperbola æquilatera cujus ver-  
tices S & A, sed in circulo & hyperbo-  
la æquilatera ob axium æqualitatem est  
CD<sup>2</sup>=AC x SC, & proinde AC:CD  
=CD:SC, & hinc AC ad CD, in ra-  
tione subduplicatâ AC ad SC.

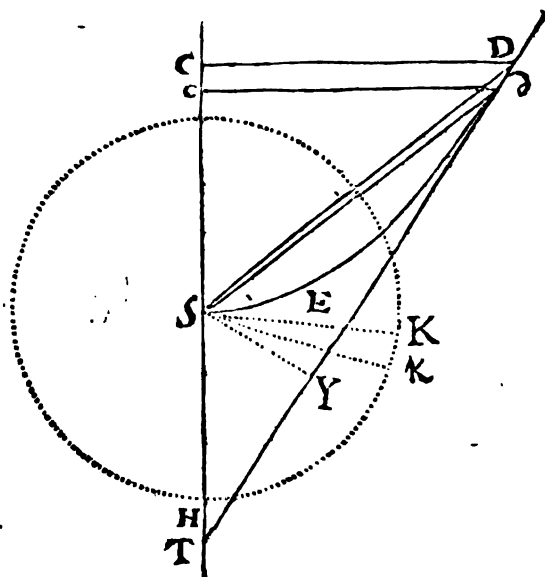
(p) \* Et propterea. Nam ex superius demonstratis AC:SK=CD x Cc:SY x Dd.



# 300 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXV.

*Caf. 2.* Quod si figura  $DES$  parabola fit, invenietur esse ut supra  $CD \times Cc$  ad  $SY \times Dd$  ut  $TC$  ad  $TS$ , hoc (9) est ut 2 ad 1, ideoque  $\frac{1}{4} CD \times Cc$  æquale esse  $\frac{1}{2} SY \times Dd$ . Sed corporis cadentis velocitas in  $C$  æqualis est velocitati quâ circulus intervallo  $\frac{1}{2} SC$  uniformiter describi possit (per prop. xxxiv.) Et hæc velocitas ad velocitatem quâ circulus radio  $SK$  describi possit, hoc est, lineola  $Cc$  ad arcum  $Kk$  (per corol. vi. prop. iv.) est in subduplicatâ ratione  $SK$  ad  $\frac{1}{2} SC$ , id (1) est, in ratione  $SK$  ad  $\frac{1}{2} CD$ . Quare est  $\frac{1}{2} SK \times Kk$  æquale  $\frac{1}{4} CD \times Cc$ , ideoque æquale  $\frac{1}{2} SY \times Dd$ , hoc est, area  $KS k$  æqualis areæ  $SD d$ , ut supra. *Q. E. D.*



PRO-

(9) \* *Hoc est ut 2 ad 1.* Cum enim sit  $TD$  tangens,  $CD$  ordinata,  $SC$  abscissa, est ex naturâ Parabolæ  $TS = SC$ , adeoque  $TC : TS = 2. 1.$

(1) \* *Id est in ratione  $SK$ , ad  $\frac{1}{2} CD$ .* Nam (ex hyp.)  $SK$ , æqualis est dimidio lateri recto, quare ex naturâ parabolæ  $2SK \times SC = CD^2$ , &  $\frac{1}{2} SC \times SK = \frac{1}{4} CD^2$ . Unde  $SK : \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} CD : \frac{1}{2} SC$ , & hinc  $SK$  ad  $\frac{1}{2} CD$  in ratione subduplicatâ  $SK$  ad  $\frac{1}{2} SC$ .

400. Coroll. 1. Si fuerit  $SED$  circulus cujus diameter  $SA$ , corpus ex loco  $A$  demissum & solâ vi centripetâ sollicitatum cadendo percurrat totam diametrum  $AS$ , eodem tempore, quo corpus aliud ad dimidiam distantiam  $SO$ , describet semicirculum  $OKH$ ; sunt enim areæ semi-

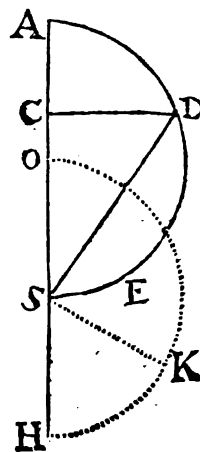
circulorum  $OKH$  &  $SEA$  æquales; tempus verò quo corpus ex  $A$  demissum cadendo percurrat spatium quodvis  $AC$  est ad tempus quo percurrat  $AS$ , ut arca  $ASD$  ad semicirculum  $ADES$ , sive ut sector  $OSK$  ad sectorem quem describit corpus in circulo  $OKH$  revolvens æqualem semicirculo  $ADES$ , qui sector erit ipse semicirculus  $OKH$ .

401. Coroll. 2. Si corpus ad distantiam  $SA$ , circum describens omni motu revolutionis privaretur, & ad centrum virium  $S$ , solâ vi centripetâ urgeretur, tempus quo ex  $A$  usque ad  $S$  cadendo perveniret, esset ad tempus unius revolutionis in circulo ut 1, ad  $4\sqrt{2}$ : est enim tempus periodicum corporis ad distantiam  $SO$  circulum describens (hoc est, duplum ejus temporis quo corpus ex  $A$ , cadendo per-

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

*Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensus.*

Super diametro  $AS$  distantia corporis a centro sub initio, describe semicirculum  $ADS$ , ut & huic æqualem semicirculum  $OKH$  circa centrum  $S$ . De corporis loco quovis  $C$  erige ordinatim applicatam  $CD$ . Junge  $SD$ , & areæ  $ASD$  æqualem constitue sectorem  $OSK$ . (1) Patet per prop. xxxv. quod corpus cadendo describet spatium  $AC$  eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum  $S$  gyrando, describere potest arcum  $OK$ . Q. E. F.



DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROPOSITIO XXXVI.

PRO-

percurrit  $AS$ , (400) ad tempus periodicum corporis ad distantiam  $AS (= 2 SO)$  in circulo revolventis ut Radices quadratæ cuborum distantiarum 1 & 2. sive ut 1, ad  $\sqrt{8}$  (191.), hoc est, ut 1 ad  $2\sqrt{2}$ ; ergo tempus quo corpus cadendo percurrit  $AS$ , est ad tempus periodicum corporis ad distantiam  $AS$  in circulo revolventis ut  $\frac{1}{2}$  ad  $2\sqrt{2}$ , hoc est, ut 1, ad  $4\sqrt{2}$ .

402. *Scholium.* Si planetarum orbitas circulares esse supponamus, vimque centripetam quâ in suis orbitis retinentur, in duplicatâ ratione distantiarum à centro decrescere, ex datis temporibus periodicis, facile erit tempora definire quibus usque ad centrum sui motus cadendo pervenirent. Exempli causâ, cum tempus periodicum lunæ circa terram revolventis sit dierum 27. hor. 7. minutorum primorum 43, hoc est, minutorum primorum 39343, erit  $4\sqrt{2}$ , ad 1, hoc est, quam proximè 565685, 100000, ut 39343, ad 6955. 5, seu dies 4, hor. 19, min. primorum 55, & secund. 30, tempus quo luna cadendo ad centrum telluris perveniret.

(1) \* *Pates per prop. XXXV.* Cum enim semicirculorum  $ADS$ ,  $OKH$ , & sectorum  $OSK$ ,  $ASD$ , areæ æquales sint respectivè, erit quoque sector  $HSK$  æqualis segmento  $SED$ , adeoque (401.) tempus quo corpus

ex  $A$  cadendo percurrit  $CS$ , æquatur tempori, quo corpus aliud in circulo  $OKH$  revolvens describit arcum  $KH$ , & quoniam tempus per  $AS$  cadendo æquatur tempori quo corpus revolvens totum semicirculum  $OKH$ , describit (401), erit tempus per  $AC$ , æquale tempori per arcum  $OK$ .

403. *Coroll.* Arcus  $OK$ , æqualis est summæ arcus  $AD$  & lineæ  $CD$ . Est enim sector  $ASD$ , æqualis sectori  $AOD$ , + triangulo  $DOS$ , sive  $\frac{1}{2} AO \times AD + \frac{1}{2} AO \times CD$ : sector verò  $OSK$ , =  $\frac{1}{2} SO \times OK = \frac{1}{2} AO \times OK$ , sed est sector  $OSK = ASD$ . Quare  $\frac{1}{2} AO \times OK = \frac{1}{2} AO \times AD + \frac{1}{2} AO \times CD$ , atque adeò  $OK = AD + CD$ . Si itaque fiat ut radius ad arcum grad. 57. 29578, qui radio æqualis est, ita  $CD$ , ad 4<sup>ma</sup>.  $B$ , erit  $B$  arcus rectæ  $CD$  æqualis, & obtinebitur  $OK = AD + B$ . Hinc dato tempore quo corpus datam  $AS$  ex puncto  $A$  cadendo percurrit, invenitur tempus quo datam rectæ  $AS$  partem  $AC$  describit, si fiat ut semicirculus  $OKH$ , seu grad. 180, ad arcum  $AD + B$ , seu  $OS$ , ita tempus quo corpus ex  $A$  cadendo percurrit  $AS$ , ad tempus quo percurrit  $AC$ .

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

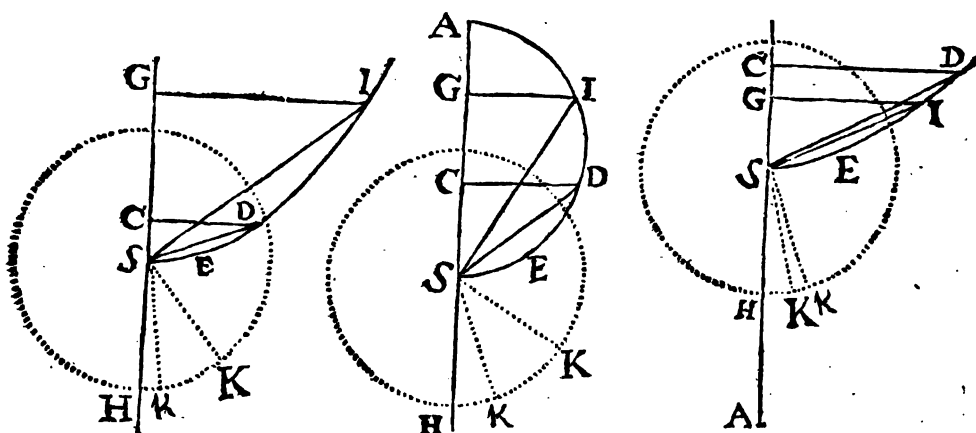
LIBER

PRIMUS.

PROP.

XXXVII.

## PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI:

*Corporis de loco dato fursum vel deorsum projecti definire tempora  
ascensus vel descensus.*Exeat corpus de loco dato  $G$  secundum lineam  $GS$  cum ve-

locitate quâcumque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum  $SG$  circa centrum  $S$  revolvi posset, cape  $GA$  ad  $\frac{1}{2} AS$ . Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum  $A$  infinite distat, quo casu parabola vertice  $S$ , axe  $SG$ , latere quovis recto describenda est. Patet hoc per prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu circulus; posteriore hyperbola rectangula super diametro  $SA$  describi debet. (†) Patet per prop. XXXIII. Tum centro  $S$ , intervallo æquan-

(†) \* Patet per Prop. XXXIII. Scilicet, fingatur sectio conica latitudinis quam minimæ, ut proximè coincidat cum axe  $AB$ , & in ea fingatur esse punctum  $G$  ex quo corpus movetur cum datâ velocitate, primo quæritur species illius sectionis, & ex proportionem velocitatis datæ ad velocitatem quâcum corpus ad intervallum datum  $S-G$  circa Centrum  $S$  revol-

veretur, agnoscetur, ex Cor. 7. Prop. XVI. & si sit Ellipsis vel Hyperbola ejus axis major ex velocitate in  $G$  datâ etiam innotescet, per Prop. XXXIII. quia velocitas corporis cadentis in puncto  $G$ , est ad velocitatem corporis in distantia  $SG$  revolvantis in subduplicatâ ratione distantie puncti  $G$  à vertice ulteriores Ellipsis vel Hyperbolæ ad ejus semi-Axem, unde

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 303

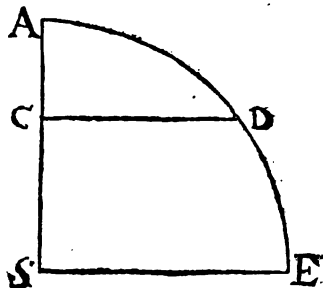
æquante dimidium lateris recti, describatur circulus  $HkK$ , & <sup>DE MO.</sup> ad corporis descendens vel ascendens locum  $G$ , & locum <sup>TU COR-</sup> alium quemvis  $C$ , erigantur perpendiculara  $GI$ ,  $CD$  occurren- <sup>FORUM-</sup> tia conicæ sectioni vel circulo in  $I$  ac  $D$ . Dein junctis  $SI$ , <sup>LIBER</sup>  $SD$ , fiant segmentis  $SEIS$ ,  $SEDS$  sectores  $HSK$ ,  $HSk$  <sup>PRIMUS.</sup> æquales, & per *prop. xxxv.* corpus  $G$  describet spatium  $GC$  <sup>PROP.</sup> eodem tempore quo corpus  $K$  describere potest arcum  $Kk$ . <sup>XXXVII.</sup>

*Q. E. F.*

## PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

*Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantie locorum à centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & spatia descripta sunt arcibus, arcuumque sinibus rectis & sinibus versis respectivè proportionalia.*

Cadat corpus de loco quovis  $A$  secundum rectam  $AS$ ; & centro virium  $S$ , intervallo  $AS$ , describatur circuli quadrans  $AE$ , sitque  $CD$  sinus rectus arcus cujuscvis  $AD$ ; & corpus  $A$ , tempore  $AD$ , cadendo describit spatium  $AC$ , inque loco  $C$  acquirit velocitatem  $CD$ .



*Demon-*

unde si fiat  $GA$  ad  $\frac{1}{2} SA$  in duplicatâ ratione velocitatis in  $G$  ad velocitatem corporis in distantia  $SG$  revolventis, erit  $A$  vertex alterius Ellipsis vel Hyperbolæ, &  $\frac{1}{2} SA$  semi-Axis quæsitus.

Fiat ergo in vertice  $S$  Parabola quavis, si curva evanescens in quâ  $G$  est, sit Parabola, vel fiat Circulus, vertice  $S$ . Diametro  $SA$ , si sit Ellipsis; vel Hyperbola æquilatera eodem Diametro si ca. cur-

va sit Hyperbola, & si Corpus ex  $G$  perveniat in  $C$ , erectis usque ad curvas descriptas perpendicularibus  $GI$ ,  $CD$ , erunt segmenta  $SEI$ ,  $SED$  proportionalia temporibus quibus corpus propositum ex  $G$  ad  $S$ , & ex  $C$  ad  $S$  movebitur per Prop. XXXII: Sed per Prop. XXXV, corpus  $G$  spatia  $GS$ ,  $CS$ , iisdem temporibus cadendo percurrit, quibus corpus  $K$ , describit arcus  $KH$ ,  $kH$ ; eodem igitur tempore percurritur  $GC$ , quo  $Kk$ .

# 304 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo- (u) Demonstratur eodem modo ex propositione x, quo præ-  
TU COR- positio xxxii, ex propositione xi demonstrata fuit.

PORUM. Corol. 1. (x) Hinc æqualia sunt tempora, quibus corpus  
LIBER unum de loco A cadendo pervenit ad centrum S, & corpus  
PRIMUS. aliud revolviendo describit arcum quadrantalem ADE.

PROP. Corol. 2. Proinde æqualia sunt tempora omnia quibus cor-  
xxxviii. pora de locis quibuscumque ad (y) usque centrum cadunt. Nam  
revolventium tempora omnia periodica (per corol. iii. prop.  
i v.) æquantur,

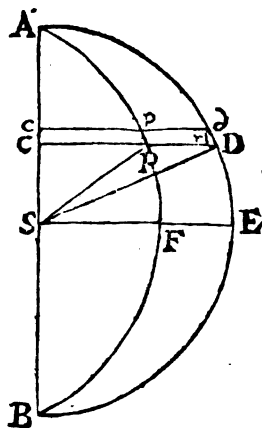
PRO

(u) \* 404. Demonstratur eodem modo.  
Nam si corpus non cadit perpendiculariter,  
describet id (per Cor. 1. Prop. X.) ellipsim  
aliquam APFB, cujus centrum congruit  
cum centro virium S; Super hujus ellip-  
seos axe majore AB, describatur semicir-  
culus ADB, & per corpus decedens tran-  
seat recta DPC perpendicularis ad axem;  
actisque DS, PS, erit area ASD, area  
ASP, atque adeo etiam tempori propor-  
tionalis. Manente axe AB, minuat per-  
petuo latitudo Ellipseos, & semper mane-  
bit area ASD, tempori proportionalis.  
Minuat latitudo illa in infinitum, &  
orbe APB jam coincidente cum axe  
AB, puncto P cum C, & F cum S,  
descendet corpus in recta AC, & area  
ASD, seu huic proportionalis arcus AD,  
evadet tempori proportionalis. In recta  
AC capiatur linea quam minima Cc,  
agaturque cd, parallela CD, & circulum  
secans in puncto d, ex quo ad CD, de-  
mittatur perpendicularum dr, & arcus Dd  
proportionalis erit tempori quo percur-  
ritur Cc, (ex demonstr.) atque adeo  
coeuntibus punctis Cc, & dD, erit ve-

locitas in C, ut  $\frac{Cc}{Dd}$  (s, 145), sed ob  
triangula Drd, SCD, similia Cc, seu  
dr : dD = CD : SD, id est,  $\frac{Cc}{dD} = \frac{CD}{SD}$ .

Quare velocitas in loco C, est ut  $\frac{CD}{SD}$ , hoc  
est, ob constantem SD, ut CD. Q. E. D.

(x) \* Cor. 1. Hinc æqualia. Nam



per coroll. 2. prop. X. tempora revolutio-  
num in ellipsis quibuscumque APF, ADB,  
adeoque & tempora per ellipseon quadran-  
tes APF seu AS, ADE, sunt æqualia.

(y) \* Ad usque centrum. Ex quiete  
cadunt.

405. Æqualia sunt tempora quibus cor-  
pus unum de loco A cadendo pervenit  
ad locum C, & corpus aliud revolviendo  
describit arcum circuli AD; Cum enim  
corpus in circulo uniformiter revolvatur,  
erit tempus per AD ad tempus per AE  
seu ad tempus per AS, ut arcus AD,  
ad quadrantem AE, sed est etiam tem-  
pus per AC, ad tempus per AS, ut arcus  
AD, ad quadrantem AE, ergo tempus per  
AC, æquatur tempori per AD.

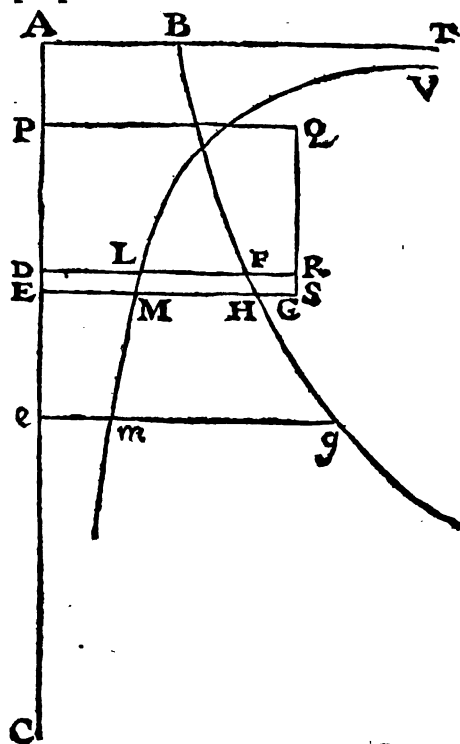
PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXIX.

*Positâ cujuscumque generis vi centripetâ, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ ascendentis vel descendents tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.*

De loco quovis  $A$  in rectâ  $ADEC$  cadat corpus  $E$ , (<sup>2</sup>) deque loco ejus  $E$  erigatur semper perpendicularis  $EG$ , vi centripetæ in loco illo ad centrum  $C$  tendenti proportionalis: Sitque  $BFG$  linea curva quam punctum  $G$  perpetuò tangit. Coincidat autem  $EG$  ipso motûs initio cum perpendiculari  $AB$ ; & erit corporis velocitas in loco quovis  $E$  (<sup>a</sup>) ut recta, quæ potest aream curvilineam  $ABGE$ . *Q. E. I.*

In  $EG$  capiatur  $EM$  rectæ; quæ potest aream  $ABGE$ , reciproçè proportionalis, & sit  $VL$  linea curva, quam punctum  $M$  perpetuo tangit, & cujus asymptotos est recta  $AB$  producta; & erit tempus, quo corpus cadendo describit lineam  $AE$ , ut area curvilinea  $ABTVM$ . *Q. E. I.*



Ete-

(<sup>2</sup>) \* De loco ejus  $E$ . Id est, per omnia lineæ  $AC$  puncta erigantur perpendiculara ut  $EG$ , vi centripetæ in singulis illis punctis proportionalia, sitque  $BFG$  curva ad quam omnia illa perpendiculara terminentur. Possunt autem perpendiculara illa ad arbitrium assumi, dummodò singula vi centripetæ in singulis locis proportionalia sint.

Tom. I.

(<sup>a</sup>) Ut recta, quæ potest aream curvilineam  $ABGE$ . In prioribus Editionibus erat, ut area curvilinea  $ABGE$  latus quadratum; hæ scilicet phrasæ synonymæ sunt; phrasis quæ hic juxta Editionem Londinensem adhibetur, veteribus Geometris est familiaris: Ea autem linea quæ potest figuram datam, est linea cujus quadratum est æquale illi figuræ datæ.

Q 9

DE MO-  
TU COR-  
PORUM  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXIX.

DE MO- Etenim in rectâ  $AE$  capi-  
TU COR- tur linea quam minima  $DE$  da-  
PORUM. ta longitudinis, sitque  $DLF$   
LIBER locus lineæ  $EMG$ , ubi corpus  
PRIMUS. versabatur in  $D$ ; & si ea sit vis  
PROP. centripeta, ut recta, quæ potest  
XXXXX.

centripeta, ut recta, quæ potest  
 aream  $ABGE$ , sit ut descen-  
 dentis velocitas: erit area ipsa in  
 duplicatâ ratione velocitatis, id  
 est, si pro velocitatibus in  $D$   
 &  $E$ , scribantur  $V$  &  $V + I$ ;  
 erit area  $ABFD$  ut  $VV$ , & area  
 $ABGE$  ut  $VV + 2 VI + II$ ,  
 & divisim area  $DFGE$  ut  
 $2 VI + II$ , ideoque  $\frac{DFGE}{DE}$  ut

$$\frac{2VI + II}{DE}, \text{ id (b) est si primæ}$$

quantitatum nascentium rationes  
fumantur , longitudo  $D F$  ut

quantitas  $\frac{2 V I}{DE}$ , ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium

$\frac{\mathbf{I} \times \mathbf{V}}{D E}$ . Est autem tempus, quo corpus cadendo describit li-

**neolam**

(b) 406. \* *Id est, si prima quantitas nascensium &c.* Seu coeuntibus punctis, D & E, F & G, fit area D F G E, æqualis rectangulo D F x D E ( 107 ) & velocitatis finitæ V, incrementum nascensium I, evanescit respectu V, ( 107 ) ac proinde cum fit I : V = II : V I, quadratum II, evanescit respectu rectanguli V I, aut 2 V I;

Quare in hoc casu  $\frac{DFGE}{DE}, = \frac{DF \times DE}{DE}$

$$=DF, \& \frac{2VI+II}{DE} = \frac{2VI}{DE}; \text{ Est igitur}$$

longitudo DF, ut quantitas  $\frac{2VI}{DE}$ , ideó-

que etiam, ut quantitatis hujus dimidium  
 $\frac{I \times V}{DE}$ : Quoniam autem velocitas per spa-  
 tium evanescens DE, est uniformis (145);  
 si tempus quo DE percurritur, dicatur  
 T, erit  $T = \frac{DE}{V}$ , (5). Est autem vis ut

$\frac{I}{T}$  ( 13 ) adeoque si loco  $T$  ponatur  $\frac{D E}{V}$ , erit vis ut  $\frac{I \times V}{D E}$ , hoc est, ut longi-

tudo D F , ergò vis; ipsi D F , vel E G  
C.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 307

neolam  $DE$ , ut lineola illa directè & velocitas  $V$  inversè, **DE Mo-**  
estque vis ut velocitatis incrementum  $I$  directè & tempus inversè, **TU COR-**  
ideoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut  $\frac{I \times V}{DE}$ , hoc **FORUM.**  
est, ut longitudo  $DF$ . Ergo vis ipsi  $DF$  vel  $EG$  proportio- **LIBER**  
nalis facit ut corpus eâ cum velocitate descendat, quæ sit ut rec- **PRIMUS.**  
ta quæ potest aream  $ABGE$ . **Q. E. D.** **PROP.**  
**XXXIX.**

(<sup>c</sup>) Porro cum tempus, quo quâlibet longitudinis datæ li-  
neola  $DE$  describatur, sit ut velocitas inversè, ideoque inver-  
sè ut linea recta quæ potest aream  $ABFD$ ; (<sup>d</sup>) sitque  $DL$ ,  
atque ideo area nascens  $DLME$ , ut eadem linea recta in-  
versè: erit tempus ut area  $DLME$ , & summa omnium tem-  
porum ut summa omnium arearum, hoc est (*per corol. lem.*  
*I v.*) tempus totum quo linea  $AE$  describitur ut area tota  
 $ATVME$ . **Q. E. D.**

*Corol. I.* Si  $P$  sit locus, de quo corpus cadere debet, ut ur-  
gente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo supponitur  
gravitas) velocitatem acquirat in loco  $D$  æqualem velocitati,  
quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquisivit eodem loco  
 $D$ , & in perpendiculari  $DF$  capiatur  $DR$ , quæ sit ad  $DF$  ut  
vis illa uniformis ad vim alteram in loco  $D$ , & compleatur rec-  
tangulum  $PDRQ$ , eique æqualis abscindatur area  $ABFD$ ;  
erit  $A$  locus de quo corpus alterum cecidit. Namque comple-  
to rectangulo  $DRSE$ , (<sup>e</sup>) cum sit area  $ABFD$  ad aream  
 $DFGE$  ut  $VV$  ad  $2VI$ , ideoque ut  $\frac{1}{2}V$  ad  $I$ , id est, ut se-  
missis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi  
inæ-

(<sup>c</sup>) \* *Porro cum tempus.* Tempus enim  
est ut spatium uniformiter percursum di-  
rectè & velocitas inversè (<sup>s</sup>), quare si  
spatium constans fuerit, tempus est ut ve-  
locitas inversè.

(<sup>d</sup>) \* *Siquæ  $DL$ .* Est enim  $DL$ ,  
ut  $DL$  in constantem  $DE$  ducta, hoc est,  
ut area nascens  $DLME$ , sed  $DL$  est ut la-  
tus quadratum areæ  $ABFD$  inversè (per  
constr.) ergo area nascens  $DLME$ , est  
ut idem latus quadratum inversè, hoc est,  
ut velocitas inversè, five, ut tempus per

$DE$ . Quare summa omnium temporum est  
ut summa omnium arearum nascentium. Hoc  
est, &c.

(<sup>e</sup>) \* *Cum (coeuntibus punctis  $D, E$ )*  
sit area  $ABFD$  ad aream  $DFGE$ , ut  $VV$ ,  
ad  $2V \times I$ ; Si enim  $A$  sit locus ex quo cor-  
pus cadere debet vi quâcunque ut eam-  
dem in  $D$  velocitatem  $V$  acquisiverit ac si  
ex  $P$  vi gravitatis decidisset, erit area  $ABFD$ ,  
ut  $VV$ , & area  $DFGE$ , ut  $2VI + II$ ,  
hoc est, (<sup>406</sup>) ut  $2VI$ . Quare  $ABFD$ :  
 $DFGE = VV : 2VI = \frac{1}{2}V : I$ .

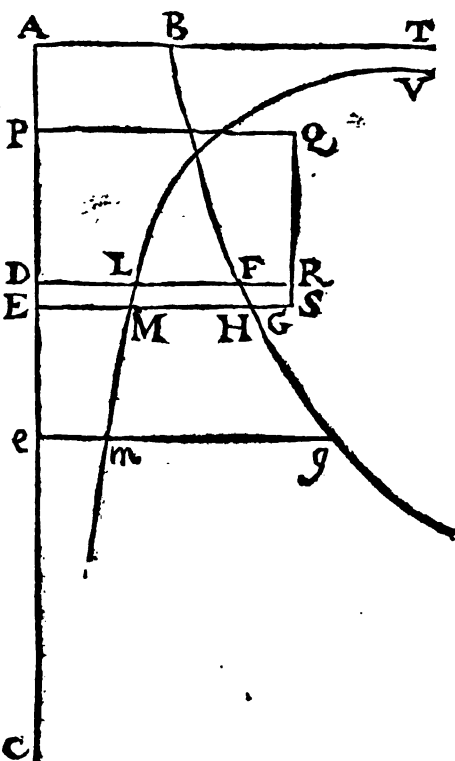
Qq 2



DE Mo- inæquabili cadentis ; (f) & simi-  
TU COR- liter area  $PQRD$  ad aream  
PORUM.  $DRSE$  ut semissis velocitatis  
LIBER totius ad incrementum velocita-  
PRIMUS. tis corporis uniformi vi caden-  
PROP. tis; sintque incrementa illa ( ob  
XXXIX. tis; sintque incrementa illa ( ob

æqualitatem temporum nascentium ) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ  $DF$ ,  $DR$ , ideoque ut areæ nascentes  $DFGE$ ,  $DRSE$ ; erunt ex æquo areæ totæ  $ABFD$ ,  $PQRD$  ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

Corol. (g) 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque  $D$  datâ cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, &  $C$  detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco



(f) \* Et similiter area  $PQRD$  ad aream  $DRSE$ , hoc est, linea  $PD$  ad lineam  $DE$  ( propter altitudinem communem  $DR=SE$  ) ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis, scilicet cum velocitas in  $D$  sit  $V$ , ejus incrementum in  $E$  sit  $X$ , ex naturâ gravitatis altitudines ex quibus corpus cadit sunt ut quadrata velocitatum in fine lapsus acquisitarum, ergo erit  $PD$  ad  $PE$  ut  $VV$  ad  $VV + 2 V \cdot X + X^2$ , & dividendo  $PD:DE = VV:2 V \cdot X + X^2$  (& omisso  $X^2$  ut pote infinite parvo)  $VV:2 T X = \frac{1}{2} V:X$ ; unde  $PQRD:DRSE = \frac{1}{2} V:X$ , sive invertendo  $DRSE:BQRD = X:\frac{1}{2} V$ ; sunt verò incrementa illa  $I$  &  $X$  ( 13 ) ut vires generatrices id est ut  $DF$  ad  $DR$ , sive ut  $DFGE$  ad  $DRSE$ . Est ergo, per. hanc demonstrationem.

$$\begin{aligned} ABFD:DFGE &= \frac{1}{2} V:I \\ DFGE:DRSE &= DF:DR = I:X \\ DRSE:PQRD &= X:\frac{1}{2} V \end{aligned}$$

Unde ex compositione rationum  $ABFD:PQRD = \frac{1}{2} V \times I \times X : I \times X \times \frac{1}{2} V$  sive in ratione æqualitatis.

(g) \* Coroll. 2. demonstratur. Sit  $A$  punctum ex quo corpus cadere debet ut acquirat in loco  $D$  velocitatem cum quâ sursum vel deorsum projicitur, erit, ( ex Dem. ) area  $ABge$  proportionalis quadrato velocitatis corporis in loco  $e$ : Est autem ( ex Dem. ) area  $ABFD$ , æqualis rectangulo  $PQRD$ , adeoque area  $ABge = PQRD + DFge$  & si locus  $e$  loco  $D$  inferior fuerit, &  $ABge = PQRD = DFge$ , si locus  $e$  loco  $D$  superior, hoc est, si corpus sursum projectum sit; ergo velocitas

cor-

loco  $e$ , erigendo ordinatam  $eg$ , & capiendo velocitatem illam  $De$  Mo-  
ad velocitatem in loco  $D$  ut est recta, quæ potest rectangu-  
lum  $PQRD$  areâ curvilineâ  $DFge$  vel auctum, si locus  $e$  TU COR-  
PORUM-  
LIBER  
est loco  $D$  inferior, vel diminutum, si is superior est, ad rec-  
tam quæ potest rectangulum solum  $PQRD$ . PRIMUS:  
PROP.

*Corol. 3.* Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam  $e m$  xxxix.  
reciproce proportionalem lateri quadrato ex  $PQRD$  vel  $DFge$ ,  
& capiendo tempus quo corpus descripsit lineam  $De$  ad tempus  
quo corpus alterum vi uniformi cecidit à  $P$  & cadendo pervenit  
ad  $D$ , ut area curvilinea  $DLme$  ad rectangulum  $2PD \times DL$ .  
Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens de-  
scripsit lineam  $PD$  est ad tempus quo corpus idem descrip-  
sit lineam  $PE$  in  $(h)$  subduplicatâ ratione  $PD$  ad  $PE$ , id est  
(lineola  $DE$  jamjam nascente) in ratione  $PD$  ad  $PD + \frac{1}{2}DE$   
seu  $2PD$  ad  $2PD + DE$ , &  $(i)$  divisim, ad tempus quo  
corpus idem descripsit lineolam  $DE$  ut  $2PD$  ad  $DE$ , ideo-  
que ut rectangulum  $2PD \times DL$  ad aream  $DLME$ ; estque tem-  
pus quo corpus utrumque descripsit lineolam  $DE$  ad tempus  
quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam  $De$ , ut  
area  $DLME$  ad aream  $DLme$ , & ex æquo tempus primum  
ad tempus ultimum ut rectangulum  $2PD \times DL$  ad aream  
 $DLme$ .

corporis in loco  $e$ , est ut  $\sqrt{PQRD \mp DFge}$ ;  
cumque sit velocitas in  $D$ , ut  $\sqrt{ABFD}$ , sive  
ut huic æqualis  $\sqrt{PQRD}$  (ex Dem.) erit  
velocitas in  $e$ , ad velocitatem in  $D$ , ut  
 $\sqrt{PQRD \mp DFge}$ , ad  $\sqrt{PQRD}$ .

$(h)$  \* In subduplicatâ ratione  $PD$ , ad  
 $PE$  (27), id est, lineola  $DE$ , jamjam nas-  
cente in ratione  $PD$ , ad  $PD + \frac{1}{2}DE$ ;  
quadratis enim his ultimis terminis fiet  
 $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4}DE^2$ ; &  
cum sit  $PD$  quantitas finita; &  $DE$  nas-  
cens, evanescit  $(107)$   $\frac{1}{4}DE^2$  res-  
pectu  $PD \times DE$ ; adeoque  $PD^2 + PD \times DE$   
 $\frac{1}{4}DE^2 = PD \times DE$ . Unde est  $PD^2 :$   
 $PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4}DE^2 = PD^2 : PD^2$

$+ PD \times DE = PD : PD + DE$ , seu  $PE$ ;  
est igitur  $PD : PE$  in ratione duplicatâ  $PD$   
ad  $PD + \frac{1}{2}DE$ , atque adeo  $PD$  ad  $PD$   
 $+ \frac{1}{2}DE$ , in ratione subduplicatâ  $PD$ , ad  
 $PE$ .

$(i)$  \* Et divisim. Tempus per  $PD$ ,  
vi uniformi descriptum est ad tempus per  
 $DE$ , ut  $2PD$ , ad  $DE$ , adeoque ut rec-  
tangulum  $2PD \times DL$ , ad rectangulum  
 $DE \times DL$ , seu ad aream  $DLME$ ; tem-  
pus per rectam  $PD$ , vi uniformi descriptam  
sit  $T$ , tempus per  $DE$ , sit  $\theta$ , & tempus per  
 $De$ , sit  $t$ , erit (ex Dem.)  $T : \theta = 2PD \times$   
 $DL : DLME$ , estque idem tempus  $\theta$ , quo  
utrumque corpus describit lineam  $DE$ , si-  
quidem utriusque eadem est velocitas in  $D$ ;  
sed (ex constructione) tempus quo corpus

# 310 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXXIX.

inæquabili motu describit lineam DE est ad tempus quo describit lineam DE, ut area DLM E, ad aream D L m e, ergo t: t. DLME: D L m e; undè ex æquo T: t = 2 PD x DL: D L m e.

407. Sit spatium à corpore cadente descriptum AE = x, velocitas in E acquisita = v, tempus quo AE, percurritur = t, vis centripeta in E, hoc est, EG = y, erunt dx, dv, dt, quantitatibus x, v, t, fluxiones seu incrementa nascentia vel evanescentia (146. 158), cumque velocitas per spatium nascent DE, sit uniformis (145) erit  $v = \frac{dx}{dt}$  (5), ac proindè velocitatis

incrementum  $dv = \frac{ddx}{dt}$ , si sumatur dt, con-

stans (164) sed est (13)  $y = \frac{dv}{dt}$ , adeo-

que si loco dv, substituat  $\frac{ddx}{dt}$ , invenie-

tur  $y = \frac{ddx}{dt^2}$ . Hæ sunt formulæ quas tra-

didit Varignonius in Comm. Parif. an. 1700. Harum formularum ope, datà inter duas ex variabilibus quatuor y, x, v, t, æquatione quavis, obtinebuntur tres æquationes quæ simul quatuor duntaxat variabiles complectentur, ex quibus proindè æquationibus per calculum fluxionum & solitas reductiones inveniri poterit æquatio inter duas quasilibet ex quatuor variabilibus y, x, v, t, ut demonstravit Varignonius in Comm. Parif. an. 1700, qui in iisdem Commentariis an. 1707. 1720. præclara de ascensu & descensu corporum perpendiculari theorematum edidit.

408. Coroll. Cum sit juxta superiores formulas  $dt = \frac{dx}{v}$ , &  $dt = \frac{dv}{y}$ , ac proin-

dè  $\frac{dx}{v} = \frac{dv}{y}$ , vel  $y dx = v dv$ , erit  $S. y dx$

$= \frac{1}{2} v^2$ . Sed  $y dx = EG \times DE$ , seu fluxioni areæ ABGE; ergò (147)  $S. y dx =$  areæ ABGE,  $= \frac{1}{2} v^2$ , &  $v = \sqrt{2 ABGE}$ . Est igitur ob constantem 2, velocitas in

loco E, ut recta quæ potest aream curvilineam ABGE. Hinc est ius. cæius Prop.

XXXIX. Newt. Quoniam verò  $dt = \frac{dx}{v}$

&  $v = \sqrt{2 ABGE}$ , erit  $dt = \frac{dx}{\sqrt{2 ABGE}}$ ;

Quare si capitur  $EM = \frac{x}{\sqrt{2 ABGE}}$ , erit  $dt = EM \times dx = EM \times DE$ , & sumptis utrinque fluentibus t = area ALME. Hic est cæius 2us. Prop. XXXIX. Newt.

409. Superior expressio vis centripetæ y;  $= \frac{dv}{dt}$  si vis centripeta consideretur ut gra-

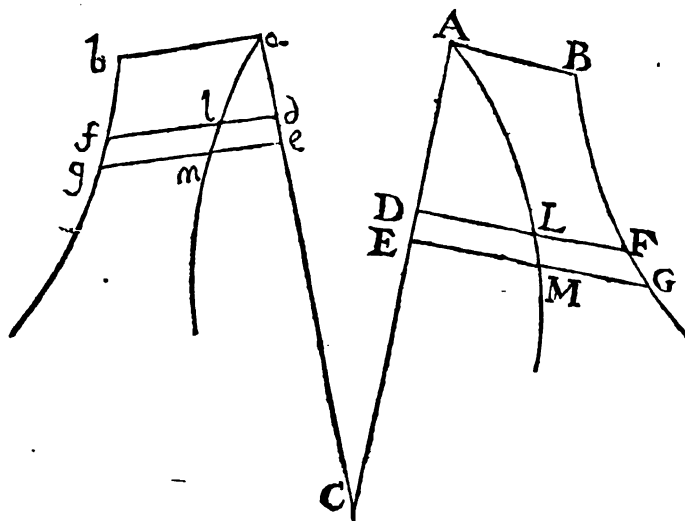
vitatis in centrum, supponit massam corporum aut eandem esse aut ponderibus proportionalem. Verùm si pondera non sint massis proportionalia, diversæque inter se massæ conferantur, tum habenda est massarum ratio ut determinetur tota corporis gravitas, seu vis tota quæ centrum versus urgetur. Sit vis illa = y, & massa = m,

erit quidem semper  $v = \frac{dx}{dt}$  (5), at fiet y

$= \frac{m dv}{dt}$ . Etenim vis centripeta conside-

rari potest ut potentia motrix, quæ corpori indefinenter applicata, motum in eo suâ actione producit, quæque tempore evanescente eadem constanter permanet, & uniformiter agit (117). Porro factum ex potentia motrice uniformiter agente & tempore actionis æquale quantitati actionis; crescit enim actionis quantitas cum potentia motrice & tempore actionis proportionaliter, & factum ex massa corporis & celeritate, seu quantitas motus producti est id quod actione illâ effectum est; seu quantitati actionis æquipollet, cum necessarius sit nexus inter quantitatem actionis & quantitatem effectus & alter alteri æqualeat. Quare  $y dt = m dv$ , & y

$= \frac{m dv}{dt}$ .



410. Si itaque pondera non supponantur  
 massis proportionalia, & corpora duo  
 A, a, quorum massæ M, m ad idem vel  
 diversa virium centra C, perpendiculari-  
 ter cadant, earumque vires centripetæ in  
 singulis locis E, e, sint Y = EG, y = eg,  
 velocitates V, v, spatia descripta X = AE,  
 x = ae, tempora quibus descripta sunt T, t,  
 inveniatur (409)  $v = \frac{dx}{dt}$ ,  $V = \frac{dX}{dT}$ , &  
 $ydt = mdv$ ,  $YdT = MdV$ , adeoque (408),  
 $S. ydx = abge = \frac{1}{2}mvv$ ; & similiter  
 $S. YdX = ABGE = \frac{1}{2}MVV$ , ob con-  
 stantes M, m; unde  $v = \frac{\sqrt{2abge}}{m}$ ,  $V =$

$\frac{\sqrt{2ABGE}}{M}$ : proindeque  $v:V = \frac{\sqrt{2abge}}{m}$ :  
 $\frac{\sqrt{2ABGE}}{M}$ . Quare  $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx\sqrt{m}}{\sqrt{2abge}}$ ,  
 &  $dT = \frac{dX\sqrt{M}}{\sqrt{2ABGE}}$ ; unde si ponatur e m;  
 $= \frac{1}{\sqrt{2abge}}$  &  $EM = \frac{1}{\sqrt{2ABGE}}$ ; erit  
 $dt = dexem \times \sqrt{m}$ , &  $dT = DE \times EM$   
 $\times \sqrt{M}$ , ac consequenter  $t = alme \times \sqrt{m}$ :  
 &  $T = ALME \times \sqrt{M}$ . Unde  $t:T = alme$   
 $\times \sqrt{m}:ALME \times \sqrt{M}$ .

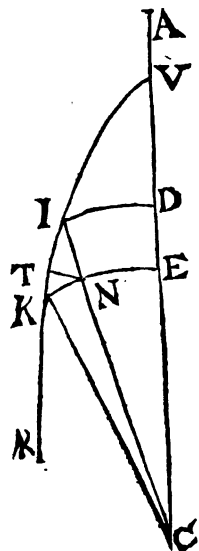
## SECTIO VIII.

*De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.*

## PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

*Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcumque, & corpus aliud rectâ ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitatès eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.*

Descendat corpus aliquod ab  $A$  per  $D$ ,  $E$ , ad centrum  $C$ , & moveatur corpus aliud a  $V$  in lineâ curvâ  $VIKk$ . Centro  $C$  intervallis quibufvis describantur circuli concentrici  $DI$ ,  $EK$  rectæ  $AC$  in  $D$  &  $E$ , curvæque  $VIK$  in  $I$  &  $K$  occurrentes. Jungatur  $IC$  occurrens ipsi  $KE$  in  $N$ ; & in  $IK$  demittatur perpendicularum  $NT$ ; sitque circumferentiarum circulorum intervallum  $DE$  vel  $IN$  quam minimum, & habeant corpora in  $D$  &  $I$  velocitates æquales. Quoniam distantiae  $CD$ ,  $CI$  æquantur, erunt vires centripetæ in  $D$  &  $I$  æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas  $DE$ ,  $IN$ ; & si vis una  $IN$  (per legum corol. 2.) resolvatur in duas  $NT$  &  $IT$ , vis  $NT$ , agendo secundum lineam  $NT$  corporis cursui  $ITK$  perpendiculararem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus à cursu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuo defletere, inque viâ curvilineâ  $ITKk$  progredi. In hoc effectû producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera  $IT$ , secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit



erabit sibi ipsi proportionalem. (\*) Proinde corporum in DE MO-  
D & I accelerationes æqualibus temporibus factæ ( si sumantur TU COR-  
linearum nascentium DE, IN, IK, IT, NT rationes pri- PORUM.  
mæ ) sunt ut lineæ DE, IT: temporibus autem inæqualibus LIBER  
ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus PRIMUS.  
DE & IK describuntur, ob æqualitatem velocitatum sunt ut XL. PROP.

viæ descripiæ DE & IK, ideoque accelerationes, in cursu  
corporum per lineas DE & IK, sunt ut DE & IT, DE &  
IK conjunctim, id est ut DE quad. & IT x IK rectangulum.

(<sup>1</sup>) Sed rectangulum IT x IK æquale est IN quadrato, hoc  
est, æquale DE quad. & propterea accelerationes in transitu  
corporum à D & I ad E & K æquales generantur. Æquales  
igitur sunt corporum velocitates in E & K: & eodem argu-  
mento semper reperientur æquales in subsequentiis æqualibus  
distantiis. Q. E. D.

Sed & (<sup>m</sup>) eodem argumento corpora æquielocia & æqua-  
liter à centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æquali-  
ter retardabuntur. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpus vel oscilletur pendens à filo, vel  
impedimento quovis politissimo & perfecte lubrico cogatur in  
lineâ curvâ moveri, & corpus aliud rectâ ascendat vel descen-  
dat,

(\*) \* Proinde corporum in D & I  
accelerationes æqualibus temporibus factæ  
sunt ut lineæ DE, IT. Sunt enim vi-  
res acceleratrices ut accelerationes nas-  
centes, seu celeritatum incrementa nas-  
centia directe & tempora inverse ( 13 ),  
undè temporibus æqualibus accelerationes  
nascentes sunt ut vires acceleratrices, tem-  
poribus autem inæqualibus ut vires accele-  
ratrices & tempora conjunctim; sed lineæ  
DE, IT, sunt ut vires acceleratrices in dire-  
ctionibus DE, IT; ergò corporum in D &  
I accelerationes æqualibus temporibus fac-  
tæ sunt ut lineæ DE, IT; temporibus  
autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempo-  
ra conjunctim.

(1) \* Sed rectangulum IT x IK æqua-  
le est IN quadrato, cum sit K N I an-  
gulus rectus, & linea NT ab basim IK

Tom. I.

normalis; adeoque crux IN medium pro-  
portionale inter hypothenusam IK & il-  
lius abscissam IT.

(m) 411. Et eodem argumento. Vis  
enim acceleratrix motum corporis ascen-  
dentis eodem modo retardat, quo motum  
descendentis accelerat in iisdem locis ( 25 );  
undè vera est propositio siue corpus utrum-  
que descendat aut ascendat, siue descen-  
dente uno, alterum ascendat.

412. Si centrum C in infinitum abeat,  
rectæ AC, IC sunt parallelæ & arcus  
DI, EK in rectas, lineis AC, IC per-  
pendiculares, mutantur. Valet igitur pro-  
positio etiam ubi vis centripetæ directio  
AC, IC sibi perpetuò parallela est,  
dummodò puncta D, I æque alta sint, hoc  
est, in eadem rectâ ad directionem vis cen-  
tripetæ perpendiculari sumantur.

Rr



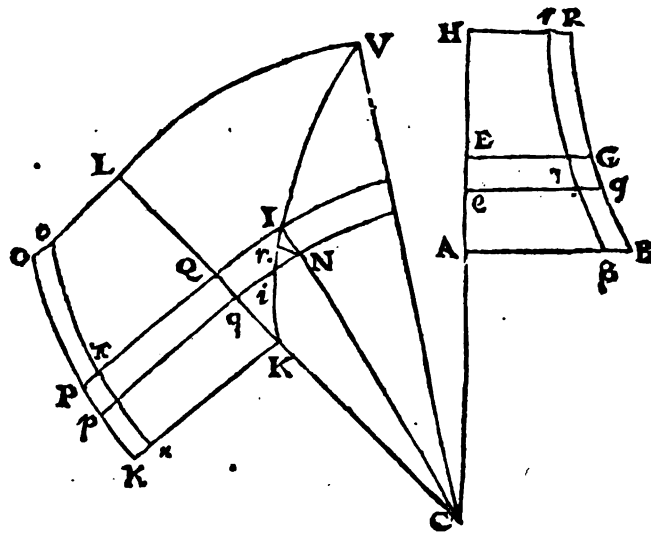
## 315

altitudinem æqualem C K, per Prop. præsen-  
tem, sed celeritates corporis ex P rectè def-

cendentis erunt semper ut  $\sqrt{P^a - A^a}$ . Ergo etiam velocitates corporis in trajectoria revolvantis erunt semper in quavis distantia A à centro ut  $\sqrt{P^a - A^a}$ . Q. E. D.

414. *Scholium.* Vera est Propositio XL, si corporum duorum ( quorum unum in rectâ, alterum in curvâ lineâ fertur ) massæ sint æquales &c pondera in locis æquâ altis æqualia aut pondera massis inæqualibus proportionalia in locis æquâ altis. Illud idem theorema ad majorem universalitatem admodum eleganter reduxit *Variignonius* in Comm. Paris. an. 1719. Nos quoque principiis suprà positis insistentes , universalis *NEWTONI* propositionem demonstrabimus.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
P R O P,

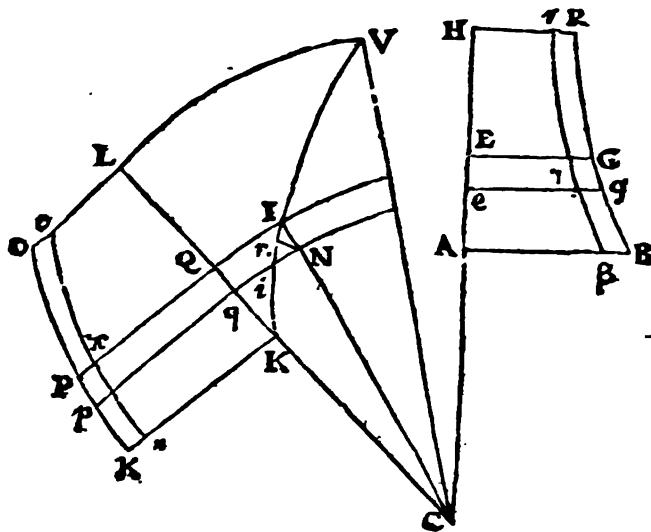


va quam punctum  $G$  perpetuo tangit: Perpendicularares in punctis datis  $H$  &  $A$  sint  $HR$  &  $AB$ , perpendiculararis in puncto variabili  $E$  sit  $EG$  cui proxima ducatur linea  $eg$ ; velocitates in punctis datis  $H$  &  $A$  sint  $b$  &  $a$ , velocitas in puncto variabili  $E$  sit  $V$ , & vis centripeta in eo puncto dicatur  $F$ , cui  $E G$  est proportionalis, sit abscissa  $HE$ ,  $s$ , ejus fluxio  $E$  erit  $\dot{s}$ , & tempusculum quo describitur

**Rr 2**                      **Eg**



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XL.



E o lapsu corporis  $M$  sit  $d T$ ; Erit (13 & 409) vis centripeta  $F$  five  $E G = \frac{M \times d V}{d T}$ , &

(5)  $d s = V d T$ . Unde erit  $E G \times d s$  five fluxio areæ  $H R G E = M V d V$ , cujus fluens erit  $\frac{1}{2} M V V$  (165) junctâ aut detractâ quâdam constanti quantitate; Coeuntibus enim  $H$  &  $E$  est in  $H$ ,  $V = b$  ideoque sit  $\frac{1}{2} M V V = \frac{1}{2} M b b$  dum area  $H R G E$  evanescit, itaque (170) ex fluente  $\frac{1}{2} M V V$  detrahenda est quantitas constans  $\frac{1}{2} M b b$  ut areæ  $H R G E$  sit æqualis: Coeuntibus verò  $E$  &  $A$ , cum in puncto  $A$  sit  $V = a$  erit in eo casu  $H R G E$  five  $H R B A = \frac{1}{2} M a a = \frac{1}{2} M b b$ , & sumpto quovis puncto  $E$  erit  $H R B A - H R E G$  five  $E G B A = \frac{1}{2} M a a - \frac{1}{2} M b b = \frac{1}{2} M V V + \frac{1}{2} M b b = \frac{1}{2} M a a - \frac{1}{2} V V$ , Unde sic tandem incidimus in duas æquationes

$$H R G E = \frac{1}{2} M V V - \frac{1}{2} M b b \text{ \& }$$

$E G B A = \frac{1}{2} M a a - \frac{1}{2} M V V$  quibus comparatis cum iis quas respectu corporis  $m$  in curvâ  $V I K$  moti simili modo deducemus, velocitates corporum in quibusvis æqualibus vel inæqualibus altitudinibus, in quâvis vium centripetarum hypothesi & in quali-

bet ponderum & massarum proportionione comparari poterunt.

Secundò itaque, per locum  $K$  datum in curvâ  $V I K$  agatur recta  $C K L$  æqualis  $C V$  & centro  $C$  per punctum quodvis  $I$  lineæ  $V I K$  describatur arcus circularis  $I Q$  rectæ  $C L$  occurrens in  $Q$  per punctum  $Q$  erigatur semper perpendicularum  $P Q$  proportionale vi Centripetæ quâ Corpus in distantia  $C Q$  versus  $C$  urgetur: sitque  $O P k$  curva quam punctum  $P$  perpetuò tangit, & perpendiculares in punctis datis  $L$  &  $K$  sint  $L O$  &  $K k$ . Dicatur arcus  $V I$ ,  $x$ , & linea  $L Q$ ,  $y$ ; sit linea  $I i$  fluxio arcus  $V I$ , & radio  $C i$  describatur arcus lineæ  $C L$  occurrens in  $q$ , & lineæ  $C I$  in  $N$ , erit  $Q q = I N$ , ex  $q$  erigatur perpendicularis  $q p$  usque ad curvam  $O P k$ , & ex  $N$  ducatur  $N n$  perpendicularis in arcum  $I i$ .

Velocitates corporis  $m$  in punctis datis  $L$  &  $K$  dicantur  $e$  &  $c$  velocitas in puncto variabili  $Q$  sit  $u$ : Vis totalis centripeta in  $Q$  semper exprimitur per  $Q P$ , eadem vis  $Q P$  agit in  $I$  (propter æquales  $C Q$ ,  $C I$ ), (secundum directionem  $I N$ , resolvatur ergo illa vis in vires duas quarum una agit in corpus  $m$  secundam directionem  $I n$ , alia-

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 317

altera secundum directionem  $Nn$ , erit  $IN$  ad  $In$  ut vis tota  $Qp$  ad vim quā corpus urgetur secundum curvam, sed ob Triangula  $INN$ ,  $INi$  similia est  $IN$  ad  $In$  sicut  $Ii$  ad  $IN$  sive  $Qq$ , ideoque  $Ii$  ad  $Qq$  ut vis  $Qp$  ad vim agentem secundum curvam quæ itaque erit  $\frac{QP \times Qq}{Ii}$ ; sit  $dt$ , tempusculum quo describetur  $Ii$  per eam vim, eritque (13 & 409) ea vis  $\frac{QP \times Qq}{Ii} = \frac{mdu}{dt}$ ;

Unde erit  $QP \times Qq = \frac{mdu}{dt} \times Ii$  sed (5) est  $Ii$  spatium percursum tempore  $dt$  velocitate  $u$  est ergo æquale  $uds$  ideoque

$QP \times Qq = \frac{mdu}{dt} \times uds = mudu$ , sed  $QP \times Qq = mu d'u$  est fluxio areæ  $LOQP$ , hujus fluens est  $\frac{1}{2} muu$  (165) additā aut detractā quādam constanti quantitate, coeuntibus enim  $Q$  &  $L$ , sit in  $L$ ,  $u = e$  ideoque sit  $\frac{1}{2} muu = \frac{1}{2} mee$  dum area  $LOQP$  evanescit, itaque (170) ex fluente  $\frac{1}{2} muu$  detrahenda est quantitas constans  $\frac{1}{2} mee$ , eritque  $LOQP = \frac{1}{2} muu - \frac{1}{2} mee$ , & coeuntibus  $Q$  &  $K$  sit  $u = c$  &  $LOKl = \frac{1}{2} mcc - \frac{1}{2} mee$  &  $LOKk - LOQP$  sive  $QPKk = \frac{1}{2} mcc - \frac{1}{2} muu$ , sicque tandem incidimus in has duas æquationes.

$LOQP = \frac{1}{2} muu - \frac{1}{2} mee$  &  
 $QPKk = \frac{1}{2} mcc - \frac{1}{2} muu$  eadem methodo quā in primo calculo sumus usi.

415. Coroll. 1. Ex primā Æquatione primi calculi est  $V = \frac{\sqrt{2HRGE + Mbb}}{M}$ , ex primā Æquatione secundi calculi est  $u = \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m}$ , unde invenitur  $V : u = \frac{\sqrt{2HRGE + Mbb}}{M} : \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m}$ .

Ex secundā verò æquatione primi calculi est

$$V = \frac{\sqrt{Ma a - 2EGBA}}{M} \text{ \& ex secunda } \frac{\sqrt{mee - 2QPKk}}{m}$$

quatione 2<sup>a</sup>. calculi  $u = \frac{\sqrt{mee - 2QPKk}}{m}$ , & hinc est  $V : u = \frac{\sqrt{Ma a - 2EGBA}}{M} : \frac{\sqrt{mee - 2QPKk}}{m}$ .

$$hinc \text{ est } V : u = \frac{\sqrt{Ma a - 2EGBA}}{M} : \frac{\sqrt{mee - 2QPKk}}{m}$$

$$\frac{\sqrt{mee - 2QPKk}}{m}$$

416. Coroll. 2. Si in perpendiculari  $QP$ , itā capiatur  $Q\pi$ , ut factum  $\pi Q \times m$ , sit ubique gravitati corporis in  $I$  proportionale, seu rectæ  $QP$  æquale, erit  $2LO\pi Q \times m$

$$= 2LOQP, \text{ adeoque } u = \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m}$$

$$= \sqrt{2LO\pi Q + ee} \& u \sqrt{cc - 2Q\pi K}.$$

Et similiter si ponatur  $E\gamma \times M = EG$ , erit  $V = \frac{\sqrt{2HR\gamma E + bb}}{M}$  &  $V = \frac{\sqrt{aa - 2E\gamma \beta A}}{M}$ .

417. Coroll. 3. Si puncta  $H$  &  $V$ ,  $E$  &  $I$ , fuerint æquæ alta, & in illis lineæ  $EG$ ,  $QP$  vi centripetæ proportionales, sint semper æquales, erit  $HRGE = LOPQ$ . Quare si præterea massæ  $M$ ,  $m$ , & velocitates  $b$ ,  $e$ , in punctis  $H$ ,  $V$ , æquantur, erit  $\frac{2HRGE + Mbb}{M} = \frac{2LOQP + mee}{m}$ , adeoque

$$V = u, \text{ in omnibus punctis æquæ altis } E \& I. \text{ Si in punctis æquæ altis } H \& V, E \& I, \text{ vires centripetæ massarum } M \& m \text{ rationem semper habeant, erit } HRGE = LOQP = M : m, \text{ proindeque } \frac{2HRGE}{M} = \frac{2LOQP}{m}.$$

Unde si præterea ponatur  $bb = ee$ , erit  $V = u$ , quæ est propositio XL. NEWTONI. Patet etiam in 4. superioribus formulis (415), Massas  $M$  &  $m$  exterminari, si fuerint ponderibus proportionales.

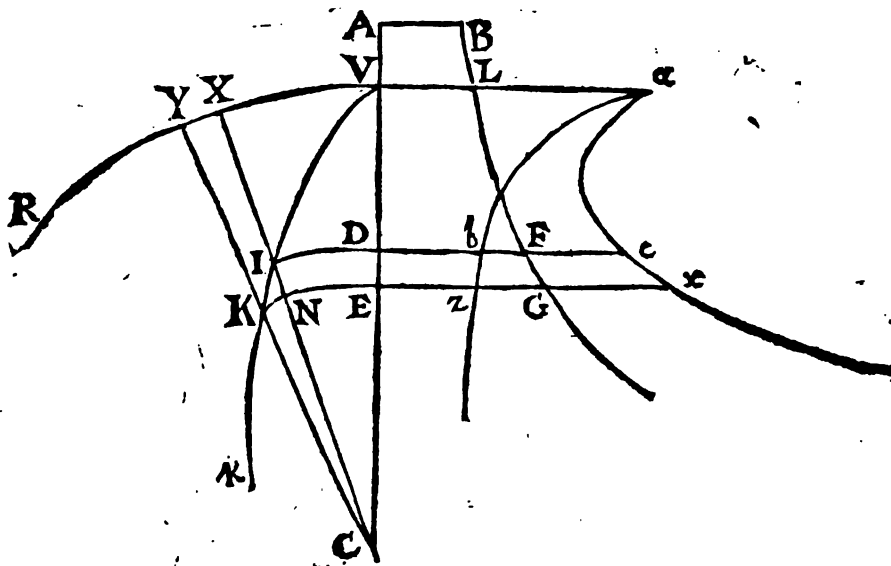
DE MOTU CORP. PORUM. LIBER PRIMUS. PROP.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XLI.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

*Positâ cujuscunque generis vi centripetâ & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.*

Tendat vis quælibet ad centrum  $C$  & invenienda fit trajectory  $VIKk$ . Detur circulus  $V R$  centro  $C$  intervallo quovis  $CV$  descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli  $ID, KE$  trajectoryam secantes in  $I$  &  $K$  rectamque  $CV$



in  $D$  &  $E$ . Age tum rectam  $CNIX$  secantem circulos  $KE$ ;  $VR$  in  $N$  &  $X$ , tum rectam  $CKY$  occurrentem circulo  $VR$  in  $Y$ . Sint autem puncta  $I$  &  $K$  sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab  $V$  per  $I$  &  $K$  ad  $k$ ; sitque punctum  $A$  locus ille de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco  $D$  velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in  $I$ . Et stantibus quæ in propositione xxxix, lineola  $IK$ , dato tempore quam mini-

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

minimo descripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ De Mo-  
 potest aream  $ABFD$ , & (P) triangulum  $ICK$  tempori pro- TU Co-  
 portionale dabitur, ideoque  $KN$  erit reciprocè ut altitudo  $IC$ , PORUM.  
 id est, si detur quantitas aliqua  $Q$ , & altitudo  $IC$  nominetur LIBER  
 PRIMUS:  
 'A, ut  $\frac{Q}{A}$ . Hanc quantitatem  $\frac{Q}{A}$  nominemus Z, & ponamus PROP.  
 XLI.

eam esse magnitudinem ipsius  $Q$  ut sit in aliquo casu  $\vee ABFD$   
ad  $Z$  ut est  $IK$  ad  $KN$ , & <sup>(9)</sup> erit in omni casu  $\vee ABFD$   
ad  $Z$  ut  $IK$  ad  $KN$ , &  $ABFD$  ad  $ZZ$  ut  $IKq$  ad  $KNq$   
& divisim  $ABFD - ZZ$  ad  $ZZ$  ut  $IN$  <sup>(r)</sup> quad. ad  $KN$  quad.

(p) \* *Triangulum ICK tempori quo describitur proportionale (per Prop. 1.) dato tempore dabitur; Est autem trianguli ICK area =  $\frac{1}{2} KN \times IC$ . Quare, erit rectangulum  $KN \times IC$  quantitati constanti æquale, & hinc lineola  $KN$  æqualis quantitati constanti ad  $IC$  applicatæ, hoc est,  $KN$  reciprocè ut  $IC$ .*

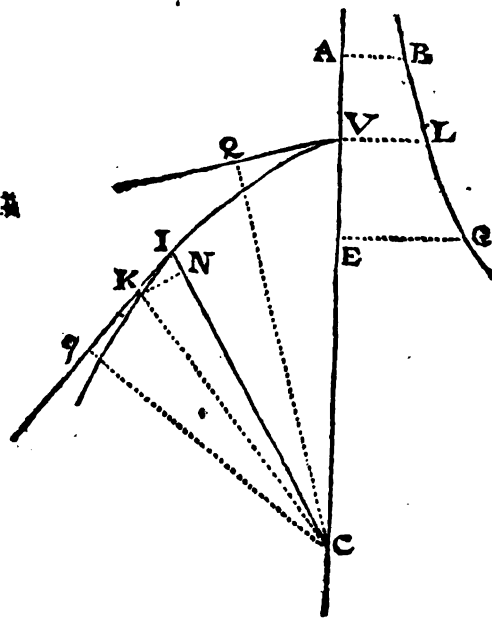
(q) \* *Eris in omni casu.* Quoniam IK est semper ut  $\sqrt{ABFD}$ , hoc est IK ad  $\sqrt{ABFD}$  in datâ ratione, & similiter Z ad KN in datâ ratione, si in aliquo casu fit  $\sqrt{ABFD}$  ad Z ut IK ad KN adeoque  $\sqrt{ABFD}$  ad IK ut Z ad KN, erit in omni casu  $\sqrt{ABFD}$  ad IK ut Z ad KN, ac proinde  $\sqrt{ABFD}$  ad Z ut IK ad KN.

418. Ducatur  $VL$  parallela  $EG$  quæ curvæ  $BF G$  occurrat in  $L$ , & ex centro  $C$  ad  $Q V$  tangentem in  $V$ , ac ad  $q I$ , tangentem in  $I$ , demissis perpendicularibus  $CQ, Cq$ , erit  $CQ \times \sqrt{ABLV}$  quantitas constans & æqualis  $Cq \times \sqrt{ABFI}$ . Nam. (*per coroll. 1. prop. 1.*) velocitas in  $V$  (adeoque  $\sqrt{ABLV}$ ) est ut  $CQ$  reciproce, id est,

ut  $\frac{1}{CQ}$  directè & proindè  $CQ \times \sqrt{ABLV}$ .

ut quantitas constans 1, & pariter veloci-  
tas in I (adeoque  $\sqrt{A B F D}$ ) est ut C q re-  
ciprocè, id est, ut  $\frac{1}{C q}$  directè, & proin-

de  $Cq \times \sqrt{ABFD}$ , ut quantitas constans  $r$ ,  
adeoque  $Cq \times \sqrt{ABFD} = CQ \times \sqrt{ABLV}$ .  
Si itaque capiatur  $Q = CQ \times \sqrt{ABLV}$   
 $= Cq \times \sqrt{ABFD}$ , &  $Z = \frac{Q}{IG}$  (unde est



$Q = Z \times IC$  ) erit semper  $\sqrt{ABFD} : Z = IC : Cq = IK : KN$ . Nam propter tri-  
 angula  $IKN$ ,  $ICq$  similia, est  $IK$  ad  $KN$  ut  
 $IC$  ad  $Cq$ , sed quia  $Z \times IC (= Q) = Cq \times$   
 $\sqrt{ABFD}$  est  $IC : Cq = \sqrt{ABFD} : Z$   
 ergo  $IK : KN = IC : Cq = \sqrt{ABFD} : Z$ .  
 ( r )  $\times U : IN^2$ , ad  $KN^2$ . Est enim  
 ob angulum  $INK$  rectum,  $IK^2 = KN^2$   
 $= IN^2$ .

**TU COR-  
PORUM.**

**PRIMUS.**

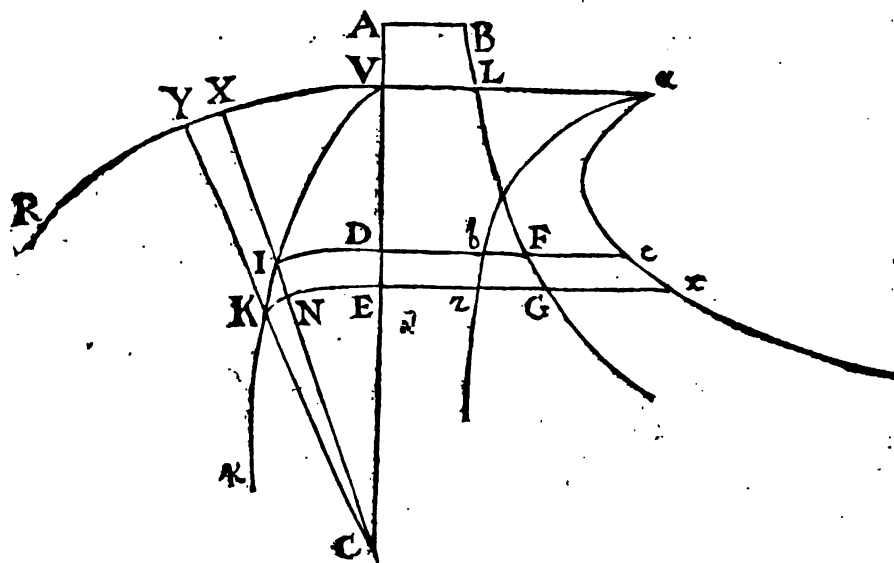
**PROP.**

**X L I.**

ideoque  $\sqrt{AB \cdot FD - ZZ}$  ad  $Z$  seu  $\frac{Q}{A}$  ut  $IN$  ad  $KN$ , &

propterea  $A \times K N$  æquale  $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$ . (f) Unde cum

$YX \times XC$  fit ad  $A \times K$  N. ut  $CXq$  ad  $AA$ , erit rectangulum

$$XY \times XC \text{ æquale } \frac{Q \times IN \times CX \text{ quad.}}{AA \sqrt{ABFD - ZZ}}. \quad \text{Igitur si in perpendi-}$$


culo  $DF$  capiantur semper  $D b, D c$  ipsis  $\frac{Q}{2 \sqrt{ABFD-ZZ}}$ ;

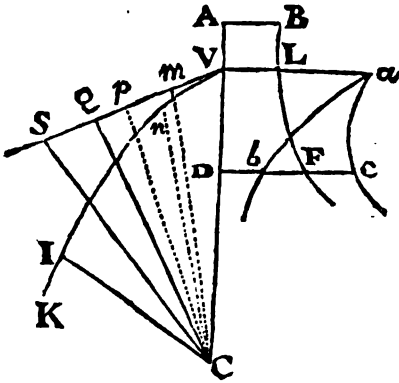
$$\frac{Q \times CX \text{ quad.}}{2AA\sqrt{ABFD}-ZZ} \text{ æquales respectivè, \& describantur cur-}$$

væ lineæ  $ab$ ,  $ac$ , quas puncta  $b$ ,  $c$  perpetuò tangunt; deque puncto  $V$  ad lineam  $AC$  erigatur perpendicularum  $Va$  abscindens areas curvilineas  $VDba$ ,  $VDca$ , & erigantur etiam ordinatæ  $Ez$ ,  $Ex$ : quoniam rectangulum  $Db \times IN$  seu  $DbzE$  æquale est dimidio rectanguli  $A \times KN$  seu triangulo  $ICK$ ; & rectangulum

• (f) \* Unde cum  $YX \times XC : A \times KN$  proinde areæ duplæ  $YX \times XC$ ,  $IC \times KN$   
 $= CX^2 : AA$ . Sunt enim triangula naf-  
 cutia  $CKN$ ,  $CYX$  familia & eorum  
 feu  $A \times KN$ , in ratione duplicatâ homo-  
 logorum laterum  $CX$ ,  $CI$ , five  $A$ .

## PRINCIPIA MATHEMATICA. 321

*Dc* x *IN* seu *Dc* x *E* æquale est dimidio rectanguli *YX* x *XC* seu *DE* *Mob*  
triangulo *XC* *Y*; hoc est, quoniam arearum *VDba*, *VIC* æqua- TU COR-  
les semper sunt nascentes particulæ *DbzE*, *ICK*, & arearum PORUM.  
*VDca*, *VCX* æquales semper sunt nascentes particulæ *Dc* x *E*, LIBER  
*XC* *Y*, erit area genita *VDba* æqualis areæ genitæ PRIMUS.  
*VIC*, ideoque tempori proportionalis, & area genita *VDca* x L I.  
æqualis sectori genito *VCX*. Dato igitur tempore quovis ex  
quo corpus discessit de loco *V*, (†) dabitur area ipsi propor-  
tionalis *VDba*, & inde dabitur corporis altitudo *CD* vel *CI*;  
& area *VDca*, eique æqualis sector *VCX* unà cum ejus angulo  
*VCI*. Datis autem angulo *VCI* & altitudine *CI* datur locus *I*;



(†) 419. *Dabitur area ipsi proportionalis.*  
 Datâ corporis velocitate & directione seu  
 tangente in V, datur spatium VS quod cor-  
 pus in illâ tangente dato tempore quo descri-  
 bitur area VIC uniformi motu describeret.  
 Porro junctâ CS, area trianguli CSV æqua-  
 lis erit aræ VIC, quam corpus in curvâ  
 VIK motum describit eodem tempore quo  
 uniformiter percurreretur VS. Nam tem-  
 pusculo nascente velocitate æquabili spatium  
 Vm describatur in tangente VS, & eodem  
 tempusculo arcus Vn describatur in curvâ  
 VIK, erit ( *per prop. 1.* ) area V Cm  
 = V Cn, & ob velocitatem uniformem in  
 tangente singulo tempusculo lineolæ æqua-  
 les Vm, m p &c. percurruntur ideoque æ-  
 quabuntur triangula VCM, m Cp, &c., sed  
 pariter omnes aræ æqualibus tempusculis  
 descriptæ in curva VIK æquantur aræ VCu  
 sive VCm, unde patet summam arearum  
 VCm + m Cp + &c. æqualem esse summæ  
 Tom. I.

arearum quæ eodem tempore in curvâ describuntur, hoc est, totas areas  $VCS$ ,  $VIC$ , eodem tempore descriptas esse æquales. Cum igitur data sit tangens  $VS$  & perpendiculum  $CQ$  in eam ductum, ex tempore dato dabitur area trianguli  $VCS$ , & area  $VIC$  ei æqualis; Hincque concessis figurarum quadraturis, invenietur area  $VDba = VCS = VIC$ , & inde dabitur  $VD$ , atque  $CD = CV - VD$ ; dabitur quoque constans  $Q = QC \times \sqrt{ABLV}$  (418).

420. Si ponatur variabilis  $I C = C D = x$ ;  
data  $V C = a$ , erit  $V D = a - x$  &  $Z = \frac{Q}{x}$ ,

conceffique figurarum curvilinearum quadraturis area  $ABFD$  exprimi poterit per datas  $AV$ ,  $VC$  & variabilem  $x$ , ac proinde iisdem quantitatibus exprimi pote-

$Q \quad \quad \quad Q \times CX^2$

seu ordinatim applicatæ Db, Dc; & hinc  
 obtinebuntur æquationes ad curvas a b,  
 a c, ex constantibus & solis variabilibus  
 C D, D b, vel D c, compositæ, curvæque  
 illæ poterunt describi. Quoniam porro  
 est (per constr.) sector V C X, æqualis  
 aræ V D c a, erit arcus V X =  $\frac{2 \sqrt{D c a}}{C V}$ ;

quare invenitur angulus  $VCX$ , & inde punctum  $I$ , in trajectory  $VIK$ .

421. *Scholium.* Data vi centripetâ in singulis locis trajectoriæ VIK, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, trajectoria VIK describi potest, ut in probl. XXVIII, licet gravitates massis non

Ss
sup-

# 322 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

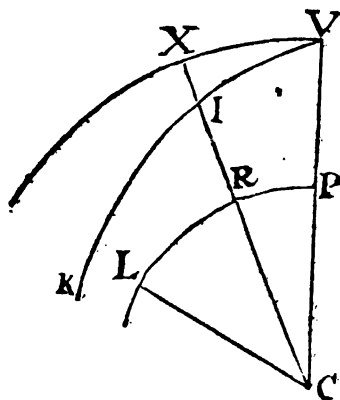
DE Mo- in quo corpus completo illo tempore reperietur. Q. E. I.

TU COR- Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id  
PORUM. est, apfides trajectoriarum expedite inveniri possunt. Sunt enim  
LIBER apfides puncta illa in quibus recta  $IC$  per centrum ducta incidit  
PRIMUS. perpendiculariter in trajectoriam  $VIK$ , id (\*) quod fit ubi rectæ  
PROP.  $IK$  &  $NK$  æquantur, ideoque ubi area  $ABFD$  æqualis est  $ZZ$ .

XL I,

(u) Corol. 2. Sed & angulus  $KIN$ , in quo trajectoria alicu-  
bi

supponantur proportionales, nec vis centri-  
peta æqualis in æqualibus à centro distan-  
tiis. Nam factum  $M \times EG$ , ex corporis  
massa  $M$  in perpendicularum  $EG$ , ejusdem  
corporis gravitatem in loco quovis  $I$  exhi-  
beat, sitque  $BLFG$  curva quam pun-  
ctum  $G$  perpetuò tangit, velocitas in loco  
 $V$  dicatur  $C$ , lineam  $AB$  ita abscindatur ut  
sit area  $ABLV = \frac{1}{2} CC$ ; erit velocitas  
in  $I = \sqrt{2 V L F D + 2 A B L V}$   
(416), id est  $= \sqrt{2 A B F D}$ , adeoque ut  
 $\sqrt{A B F D}$ , undè lineola  $IK$  dato tempore  
quam minimo descripta erit ut  $\sqrt{A B F D}$ ,  
& triangulum  $ICK$  &c. Cætera quæ in  
probl. XXVIII. solutione sequuntur ratio-  
cinia & constructiones manent eadem.



422. Trajectoria  $VIK$ , geometricè ra-  
tionalis est ubi per æquationes finitas in-  
veniri potest sector circuli æqualis areæ  
 $VDca$ : & hujus sectoris radius est ad  $CX$   
radium, circuli  $VXY$ , ut  $nn$  ad 1  
estque  $nn$  numerus rationalis positivus  
integer vel fractus. Sit enim sector cir-  
culi  $LPC =$  areæ  $VDca$ , id est, æqua-

lis sectori  $V CX$ , sitque radius  $CP$  ad  
radium  $CV$ , ut  $n$ , ad 1, erit  $CP \times PL$   
 $= CV \times VX$ , &  $CP : CV = n : 1 = VX :$   
 $PL$ , (per hyp.) &  $CP : CV = n : 1 =$   
 $PR : VX$  (ex naturâ circuli). Quare  
per compositionem rationum & ex æquo  
 $nn : 1 = RP : PL$ . Si ergò fuerit  $nn$ , ad  
1, ut numerus ad numerum, dato arcu  $PL$ ,  
inveniri poterit arcus  $RP$  per æquatio-  
nem finitam, cum possit semper arcus da-  
tus in datâ ratione numeri ad numerum  
per æquationem finitam dividi. Quoniam  
igitur assumptæ  $CI$  positio & punctum  $I$ ,  
in curvâ  $VIK$  per finitas æquationes de-  
terminantur, erit  $VK$  curva algebraica  
seu geometricè rationalis. Hermannus prop.  
25. Lib. I. Phorom. hoc elegans & difficile  
problema solvit: invenire canonem gene-  
ralem determinandæ gravitatis variabilis  
pro omnibus curvis algebraicis in infinitum,  
quantitatibus finitis expressum.

(t) \* Id quod fit ubi rectæ  $IK$  &  
 $KN$  æquantur. Tunc enim punctum  $N$   
coincidit cum puncto  $I$ , ob angulum  $KIN$   
rectum, adeoque ob proportionem  $\sqrt{ABFD} :$   
 $Z = IK : KN$ , sit  $ABDF = ZZ = \frac{QQ}{IC^2}$ ,

&  $IC^2 \times A B F D = QQ$  quantitati datæ.  
Hinc cum concessis curvarum quadraturis  
data sit area  $ABFD$  in quantitatibus con-  
stantibus & variabili  $IC$  seu  $CD$ , inve-  
nietur valor  $IC$ , hoc est, maximæ &  
minimæ altitudines corporis trajectoriam  
 $VK$  describentis.

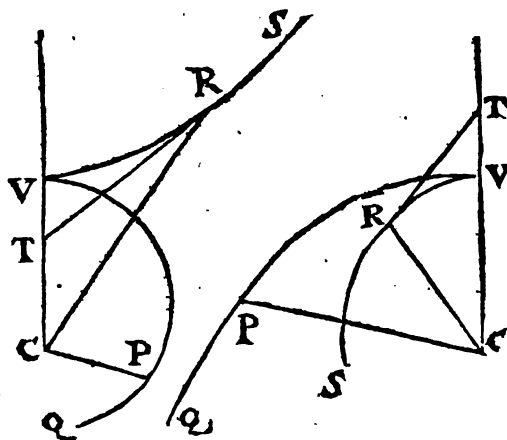
(u) \* Coroll. 2. Ob angulum  $KNI$   
rectum in triangulo nascente  $KIN$ , sinus  
anguli  $KIN$  est ad sinum totum, ut  $KN$   
ad  $IK$ , id est, ut  $Z$  (seu  $\frac{Q}{IC}$ ) ad  $\sqrt{ABFD}$ .

Verùm datâ  $IC$  datur area  $ABFD$ , &  
indè ob quantitatem  $Q$  datam datur ratio  
Q

bi fecat lineam illam  $IC$ , ex datâ corporis altitudine  $IC$  expectatè invenitur; nimirum capiendò sinum ejus ad radium ut  $K$  ad  $IK$ , id est, ut  $Z$  ad latus quadratum areæ  $ABFD$ .

(\*) *Corol. 3.* Si centro  $C$  & vertice principali  $V$  describatur sectio quælibet conica  $VRS$ , & à quovis ejus puncto  $R$  agatur tangens  $RT$  occurrens axi

infinite producto  $CV$  in puncto  $T$ ; dein junctâ  $CR$  ducatur recta  $CP$ , quæ æqualis sit abscissæ  $CT$ , angulumque  $VCP$  sectori  $VCR$  proportionalem constituat; tendat autem ad centrum  $C$  vis centripeta cubo distantiae locorum à centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco  $V$  justâ cum velocitate secundum lineam rectâ  $CV$  perpendicularem: progre-



dictur

$\frac{Q}{IC}$  ad  $\sqrt{ABFD}$ , hoc est, ratio finis anguli  $KIN$ , ad radium. Invenietur ergò finis anguli  $KIN$ , & hinc angulus ipse cognoscetur.

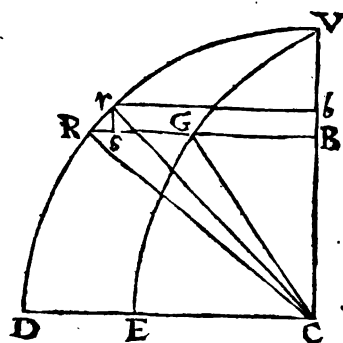
(x) 423. *Lemma.* Si fuerit  $DVC$ , circuli quadrans cujus radius  $CV = r$  abscissa  $CB = z$ , ordinatæ infinite propinquæ  $BR$ ,

h  $r$ , fluxio arcus  $DR$  erit  $\frac{r dz}{\sqrt{rr-zz}}$ , & fluxio sectoris  $CDR = \frac{\frac{1}{2} r r dz}{\sqrt{rr-zz}}$ .

Est enim  $BR = \sqrt{rr-zz}$ , & demissâ ex puncto  $r$  in  $RB$ , perpendiculari  $rs$ , triangula similia  $RCB$ ,  $rRs$ , dant  $RB (\sqrt{rr-zz}) : RC(r) = rs(dz : Rr = \frac{r dz}{\sqrt{rr-zz}})$ . Q. e. 1. Porro sector nascens

$CRr = \frac{1}{2} CR \times Rr = \frac{\frac{1}{2} r r dz}{\sqrt{rr-zz}}$ . Q. e. 2.

424. *Coroll.* Si fuerit  $EGVC$ , qua-



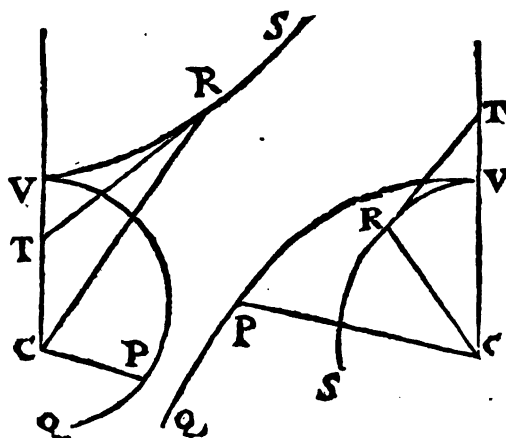
drans ellipseos cujus centrum  $C$ , semiaxis unus  $CV = r$ , alter semiaxis  $CE = c$ , abscissa  $CB = z$ , &  $BG$  ordinatim applicata ad axem  $CV$ , sectoris  $CEG$  fluxio erit  $= \frac{\frac{1}{2} r c dz}{\sqrt{rr-zz}}$ . Sunt enim sectores  $CDR$ ,  $CEG$ ; adeoque & eorum fluxiones in datâ ratione  $r$  ad  $c$ , (251).



# 324 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORP. FORUM. LIBER PRIMUS. PROP. XLII.

dietur corpus illud in traje-  
ctoriâ  $V P Q$  quam punctum  
 $P$  perpetuò tangit; ideoque  
si conica sectio  $V R S$  hyper-  
bola sit, descendet idem ad  
centrum: Sin ea ellipsis sit,  
ascendet illud perpetuò &  
abibit in infinitum. Et con-  
tra, si corpus quâcunque cum  
velocitate exeat de loco  $V$ ,  
& perinde ut incœperit vel  
obliquè descendere ad cen-  
trum, vel ab eo obliquè ascendere, figura  $V R S$  vel hyperbola



fit

425. Lemma. Si fuerit  $V R r$ , hyper-  
bola æquilatèra cujus centrum  $c$ , semia-  
xis tranversus  $C V = r$ , abscissa  $C B = z$ ,  
 $R B$  ad axem ordinatim applicata, secto-  
ris hyperbolici  $C R V$  fluxio erit  $\frac{1}{2} r r d z$ .

Agatur enim  $r b$  ordinata, priori  $R B$   
infinitè propinqua, sitque  $R B = y$ , erit  
(ex naturâ hyperbolæ æquilatæ)  $yy =$   
 $zz - rr$ , &  $y = \sqrt{zz - rr}$ . Undè  $z y d y$   
 $= z z d z$ , &  $d y = \frac{z d z}{\sqrt{zz - rr}}$ . Porro trian-

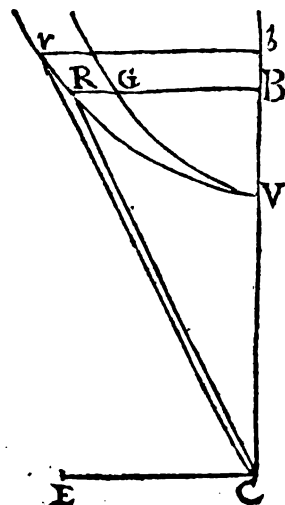
gulum  $C R B = \frac{1}{2} z y$ , & illius fluxio =  
 $\frac{1}{2} z d y + \frac{1}{2} y d z =$  trapezium  $B b r R$  + triang.  
 $C r R$ ; sed trapezium nuncians  $B b r R = y d z$ ,  
ergò sector nuncians  $C r R = \frac{1}{2} z d y - \frac{1}{2} y d z$

$$= \frac{\frac{1}{2} z z d z}{\sqrt{zz - rr}} - \frac{\frac{1}{2} d z \times \sqrt{zz - rr}}{\sqrt{zz - rr}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} z z d z - \frac{1}{2} z z d z + \frac{1}{2} r r d z}{\sqrt{zz - rr}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} r r d z}{\sqrt{zz - rr}} \quad \text{Q. e. D.}$$

426. Coroll. 1. Quoniam (ex demon-  
stratis)  $d y = \frac{z d z}{\sqrt{zz - rr}}$ , &  $yy = zz - rr$ ,  
erit  $\frac{d z}{\sqrt{zz - rr}} = \frac{d y}{z}$ , &  $z = \sqrt{yy + rr}$ .



$$\text{adeoque } C r R = \frac{\frac{1}{2} r r d z}{\sqrt{zz - rr}} = \frac{\frac{1}{2} r r d y}{\sqrt{yy + rr}}.$$

427. Coroll. 2. Si descripta fuerit ali-  
tera hyperbola  $G V$ , cujus idem centrum  
 $C$ , idem semiaxis transversus  $C V = r$ ,  
semiaxis conjugatus  $C E = c$ ; sectoris

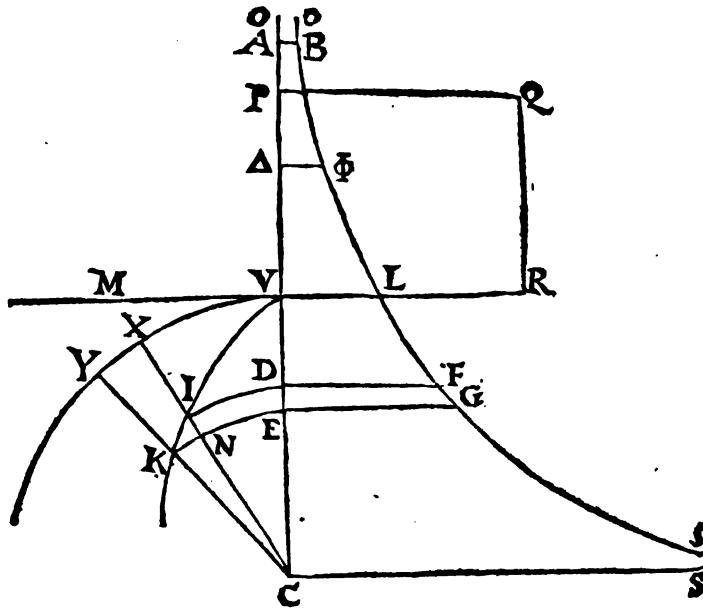
$$C G V \text{ fluxio erit } = \frac{\frac{1}{2} r c d z}{\sqrt{zz - rr}} = \frac{r c d y}{\sqrt{yy + rr}}.$$

Est enim sector  $C R V$  ad sectorem  $C G V$ ,  
adeoque fluxio ad fluxionem propor-  
tionatus sicut abscissæ  $r$  ad  $c$  (p. 4.)

# PRINCIPIA MATHEMATICĀ.

325

fit vel ellipsis, inveniri potest trajectory augendo vel minuendo  $\text{De Mo-}$   
 angulum  $\angle VCP$  in datâ aliquâ ratione. Sed & , vi centripetâ  $\text{tu Cor-}$   
 in centrifugam versâ, ascendet corpus obliquè in trajectory  $\text{porum.}$   
 $\angle VPQ$ , quæ invenitur capiendò angulum  $\angle VCP$  sectori elliptico  $\text{LIBER}$   
 $\angle VRC$  proportionalem, & longitudinem  $CP$  longitudini  $CT$  æ-  $\text{PRIMUS.}$   
 qua-  $\text{PROP.}$   
 qua-  $\text{XLI.}$

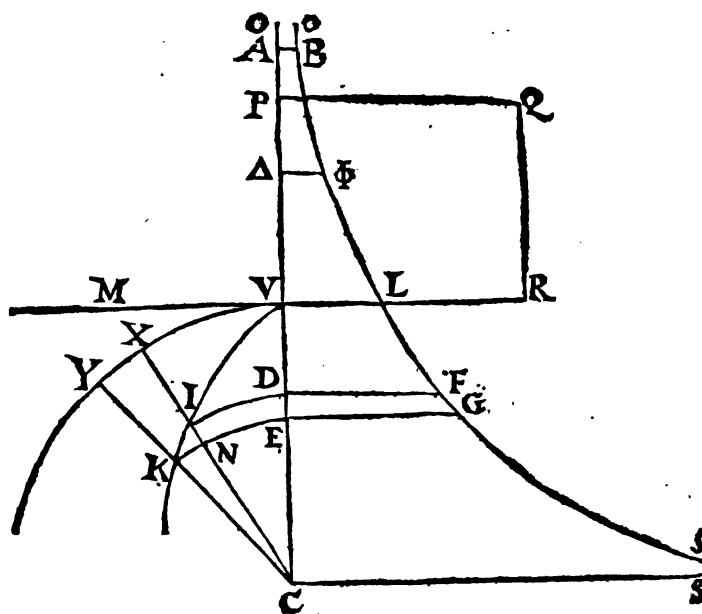


428 *Lemma.* Iisdem positis quæ in superiori-  
bus NEWTONI propositionibus, sit  $CV = r$ ,  
 $CA = a$ ,  $CD$  vel  $C \Delta = x$ ,  $DF$  vel  
 $\Delta \Phi = y$ ; & si fuerit vis centripeta in loco  
quovis  $D$  ut  $\frac{1}{CD}$ , sitque  $z$   $f +$  quan-  
titas data, erit  $y = \frac{z f +}{x}$ , æquatio ad cur-  
vam  $BFG$ , & quam in æquatione  $y$   
infiniti evanescit  $x$  ponatur  $= 0$ , & si-  
militer  $x$  infiniti si  $y = 0$ , liquet  
rectæ sibi mutuo perpendicularis  $CO$   
esse curvæ  $BFG$  asymptotæ. Area  
 $DFGF = -dx = \frac{z f + dx}{x}$ , unde sempris

in infinitum versus S protensa CDFsSC  
 $= Q - \frac{f^4}{xx}$ ; Ponatur  $x$  infinita, & erit  
 $\frac{f^4}{xx} = 0$ , & area CDFsS, mutabitur in  
 aream utrinque infinite protensam COosSC;  
 quare COosSC = Q, & hinc COosSC  
 $- CDFsSC = ODFo = Q - Q + \frac{f^4}{xx}$   
 $= \frac{f^4}{xx}$ , id est, area ODFo, vel  $O \Delta \Phi o$   
 versus O in infinitum extenta, æqualis est  
 quædam finitæ  $\frac{f^4}{xx}$ .

DE Mo- qualem ut supra. Consequuntur hæc omnia ex propositione præ-  
TU COR- cedente, per curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem;  
PORUM. ut satis facilem, brevitatis gratiâ missam facio.

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XLI.



429. Coroll. 1. Area infinite protensa  
 $OVLo = \frac{f^4}{rr}$ ; area  $OABO = \frac{f^4}{aa}$  & proin-  
 de  $\sqrt{OVLo} = \frac{ff}{r}$ ,  $\sqrt{OABO} = \frac{ff}{a}$ .  
 430. Coroll. 2. Area  $ABLV = OVLo$   
 $- OABO = \frac{f^4 \times aa - rr}{rraa} = \frac{f^4 cc}{rraa}$ , po-  
 nendo  $aa - rr = cc$  (429) unde  $\sqrt{ABLV}$   
 $= \frac{f^2 c}{ra}$ .

431. Coroll. 3. Similiter si punctum D  
 sit inter puncta data C, V, & punctum  $\Delta$   
 inter puncta data V, A; erit area  $AB\Phi\Delta$ ,  
 vel  $ABFD = \frac{f^4 \times aa - xx}{aa xx}$ , area  $VLFD$   
 $= \frac{f^4 \times rr - xx}{rr xx}$ ,  $\Delta\Phi LV = \frac{f^4 \times xx - rr}{rr xx}$ .

(428. 429. 430.)

432. Iisdem manentibus quæ in Lem-

mate superiori (428) si corpus de loco V,  
 cum velocitate quâlibet secundum dire-  
 ctionem V M ad C V perpendicularem  
 projiciatur ut curvæ V I K describat,  
 erit V M hujus curvæ tangens in puncto  
 V, C V ad tangentem V M normalis;  
 & velocitas projectionis æqualis erit ve-  
 locitati quam corpus ex distantia infinitâ  
 O V, cadendo acquireret in loco V, vel  
 eâ minor, vel major.

433. Primus casus. Velocitas projectio-  
 nis æqualis sit velocitati per spatium infinitum  
 O V cadendo acquisitæ in loco V,  
 erit (418) quantitas data  $Q = CV\sqrt{OVLo}$   
 $= ff(429)$  &  $Z = \frac{Q}{IC} = \frac{ff}{x}$ . Sed (per  
 prop. 41.)  $\sqrt{ODFo} : Z = IK : KN$ , hoc  
 est, (428)  $\frac{ff}{x} : \frac{ff}{x} = IK : KN$ , ergo  
 $IK = KN$ , proindèque angulus K I N  
 rectus est (cor. 2. prop. 41.) In hoc igitur

tur casu trajectoria VIK est circulus VXY  
radio C V descriptus.

434. Hinc si velocitas projectionis minor fuerit velocitate quæ ex infinità distantia cadendo acquiritur in loco V, corpus in trajectoria VK motum ad centrum virium C perpetuò accedet, velocitas illius perpetuò creiscet, & punctum D semper erit inter data puncta V & C situm. Si verò projectionis velocitas major sit velocitate per infinitum spatium cadendo acquisitâ, corpus in trajectoria VIK, à centro semper recedet, illius velocitas continuò decrescet & punctum Δ puncto I correspondens, puncto dato V superius erit.

435. Si manente casus primi hypothesi, directio VM ad CV perpendicularis non sit, & perpendicularum è centro C in projectionis directionem demissum dicatur p, erit  $Q = \frac{pff}{r}$ ,  $Z = \frac{pff}{rx}$ , &  $\sqrt{ODFO}$

$$\left(\frac{f^2}{x}\right) : Z \left(\frac{pff}{rx}\right) = r : p = IK : KN.$$

Hoc est, (per coroll. 2. prop. 41.), sinus totus ad sinum anguli KIN, in datâ ratione adeoque angulus KIN datus, & trajectoria VK spiralis logarithmica.

436. Casus secundus. Velocitas projectionis æqualis sit velocitati quam corpus de loco aliquo dato A, cadendo haberet in V. erit  $Q = CV \times \sqrt{ABLV} = \frac{ffc}{a}$

$$(430) Z = \frac{ffc}{ax}, ZZ = \frac{f+cc}{aaxx}, ABFD =$$

$$\frac{f+aa-xx}{aaxx} (431.), \text{ unde } ABFD - ZZ =$$

$$\frac{f+aa-cc-xx}{a^2x^2} = \frac{f+xx-xx}{a^2x^2}, \text{ ob}$$

$$a^2 - cc = rr (430) \& \sqrt{ABFD} - ZZ =$$

$$\frac{ff\sqrt{rr-xx}}{ax}. \text{ Cum igitur (in prop. 41.)}$$

$$\text{fit } A = IC = CD = x, DE = IN = dx,$$

$$CX = CV = r, \text{ erit } \frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA} = \frac{1}{2} \frac{ffrrcdx}{aaxx}$$

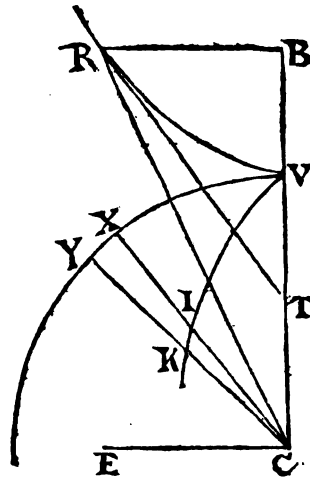
$$\& \frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD} - ZZ} = \frac{1}{2} \frac{rrcdx}{x\sqrt{rr-xx}} = \text{sector}$$

$$\text{ri } CXY. \text{ Quoniam autem crescente } IC \text{ seu } x, \text{ decrescit sector } YXC (434) \text{ scri-$$

$$\text{bendum est } CXY = -\frac{1}{2} \frac{rrcdx}{x\sqrt{rr-xx}} (159).$$

Ponatur  $x = \frac{rr}{z}$ , erit  $xx = \frac{r^4}{zz}$ ,  $rr - xx = \frac{r^4 - r^4}{zz} = \frac{rrzz - r^4}{zz}$ ,  $\sqrt{rr - xx} = \frac{r\sqrt{zz - rr}}{z}$ ,  $\& z = rr$ , sumptisque fluxionibus  $zdx + xdz = 0$ , proinde  $-\frac{dx}{z} = \frac{dz}{z}$ , hisque va-

$$\text{loribus substitutis invenitur } -\frac{\frac{1}{2} r r c d x}{x \sqrt{r r - x x}} = \frac{\frac{1}{2} r c d z}{\sqrt{z z - r r}} = CXY.$$



Centro C, semiaxe transferro CV = r semiaxe conjugato CE = c, describatur hyperbola VR, ex cuius puncto quovis R, demittatur ad axem perpendicularum RB, & tangens RT, axi occurrens in T, &

$$CB, \text{ dicatur } = z, \text{ erit } (427) \frac{1}{2} \frac{r c d z}{\sqrt{z z - r r}}, \text{ flu-}$$

xio sectoris hyperbolici CRV, & (ex conicis) CB(z) : CV(r) = CV(r) :

$$CT = \frac{rr}{z} = x = CI. \text{ Itaque cum sit } CXY$$

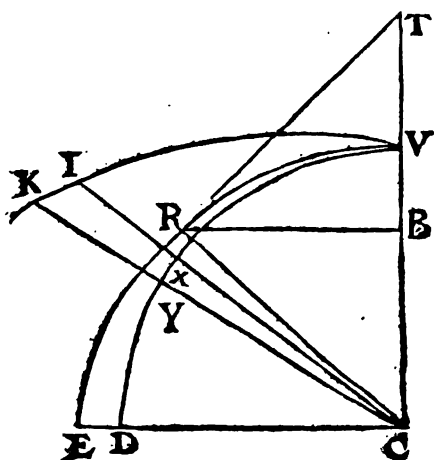
$$= \frac{1}{2} \frac{r c d z}{\sqrt{z z - r r}}, \text{ si sumantur utrinque fluentes}$$

additâ constanti Q erit sector circuli CXY, æqualis sectori hyperbolico CRV + Q.

invenitur autem Q = 0. Nam posita CT seu x = r,

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XLI.



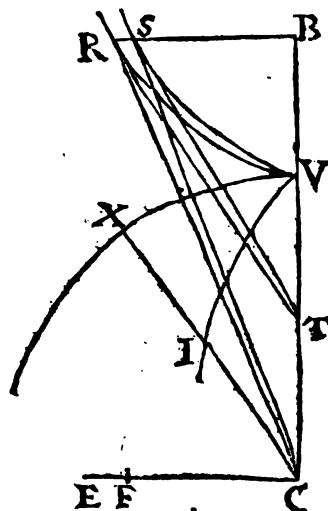


$\angle C I = C V$ , adeoque punctum R co-  
cidit etiam cum puncto V, & sector C E R,  
æqualis fit quadranti C E V; ergo  $\angle C E V$ .  
Est igitur semper  $\angle C X V = C E V - C R E$   
 $= C K V$ . Itaque ut inveniatur trajectoria  
V I K punctum I, capiatur sector circuli  
C X V, æqualis sectori elliptico C R V, &  
in lineâ C X, productâ capiatur C I = C T,  
erit I punctum in trajectoriâ quæsita.

438. Datâ velocitate projectionis & ma-  
gnitudine vis centripetæ variabilis, hoc est,  
ipſius ratione ad aliquam vim centripetam  
uniformem notam in loco datæ V, (fig.  
not. 430.) describi potest trajectoria V I K.  
Iis enim datis, dabitur locus P ex quo  
corpus urgente vi centripetâ constante ca-  
dere debet ut in loco V datam projectio-  
nis velocitatem habeat; & sumptâ V R  
ad V L in datâ ratione vis centripetæ  
constantis ad vim centripetam variabilem  
in loco V, dabitur rectangulum P Q R V.  
Porro si rectangulum illud æquale fuerit  
aræz infinitè protentæ O V L o, corpus cir-  
culum describet (per cas. 1. nos. 433.);  
si rectangulum minus est aræ O V L o, in-  
venietur punctum A, ex quo ducta  
perpendicularis A B, abscindat aream A B L V  
æqualem rectangulo P Q R V; & trajecto-  
ria V I K, describetur (per constr. cas. 21.)  
(436). Si rectangulum P Q R V aræ O V L o  
majus est, adhibenda erit constructio ca-  
sus 3. (439). Observandum autem est sec-  
tores circulares esse angulis suis ad cen-

Tom. I.

trum proportionales; unde in superioribus  
constructionibus loco sectorum circuli, uti  
possumus angulis qui ad sectores hyperbo-  
licos vel ellipticos datam habeant, ratio-  
nem.

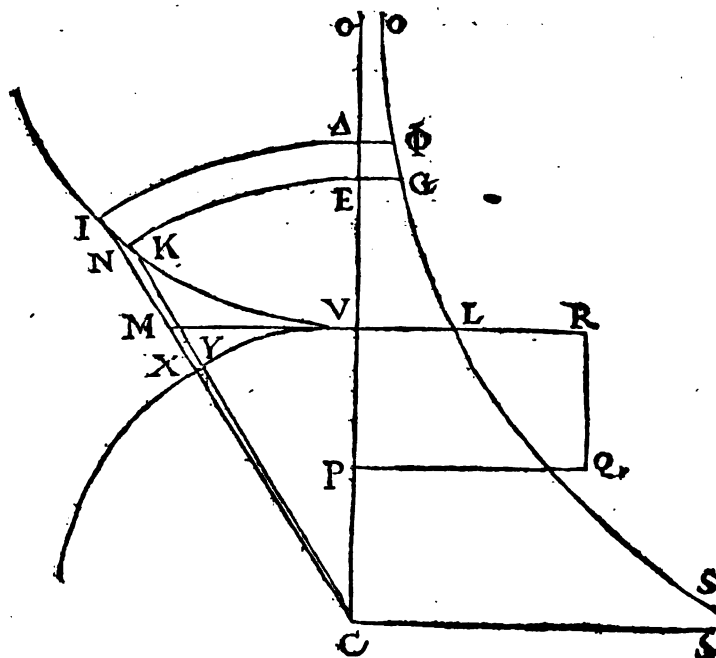


439. Casus 2us. & 3us. construi possunt  
per hyperbolam vel ellipsim, cujus sit se-  
miaxis  $C V = r$ , & alter semiaxis quilibet.  
Nam iisdem positis quæ in constructione  
casus 21., semiaxe transverso  $C V = r$ , &  
semiaxe quovis conjugato C F, describa-  
tur hyperbola altera S V, quam in S se-  
cat perpendicularum R B; tangentes R T;  
S T per puncta R, S ductæ axi occur-  
runt in eodem puncto T, (257) & sector  
C R V est ad sectorem C S V in datâ ra-  
tione C E ad C F (374). Quare cum  
(per constr. cas. 21.) sector circuli C X V  
æqualis sit sectori C R V, erit etiam ad se-  
ctorem C S V in datâ ratione C E ad C F,  
atque ita punctum trajectoriæ I invenietur  
capiendo sectorem C X V ad sectorem  
C S V, in datâ ratione C E ad C F, &  
in radio C X, capiendo C I = C T. Idem  
eodem modo demonstratur in casu 3o.

440. Hinc si (juxta constructionem  
Coroll. 3. prop. 41.) describatur curva  
V I capiendo angulum V C I sectori co-  
nico V C R proportionalem, vel quod  
in idem recidit, capiendo sectorem cir-  
culi C X V ad sectorem conicum V C R  
T s. in

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XLI.  
PROBL.  
XXVIII.





442. Schol. Keillius ad calcem Intro-  
ductionis ad veram Astronomiam, in verum  
problema virium centripetarum in ratione  
triplicatâ distantiae à centro decrescen-  
tium generatim ac perspicue solvit, & tra-  
jectoriarum quae in hac hypothesi descri-  
buntur plures proprietates demonstravit,  
inter alias istam, earum omnium, si  
circulum exceperis, areas esse perfec-  
te quadrabiles, quae quidem de omni-  
bus trajectoriis per constr. coroll. 3. prop.  
41. descriptis facile demonstratur. Nam  
(per prop. 41.) areae illarum fluxio

$$CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD-ZZ}} = \frac{-\frac{1}{2}cx dx}{\sqrt{rr-xx}}$$

in cas. 2°. & CIK =  $\frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD-ZZ}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}cx dx}{\sqrt{xx-rr}} \text{ in casu 3°. (437. 441. ). Po-}$$

natur 1°.  $\sqrt{rr-xx}=z$ , & erit  $rr=xx$   
 $=zx, -x dx = z dz$ , &  $-\frac{\frac{1}{2}cx dx}{\sqrt{rr-xx}} =$   
 $CIK = \frac{1}{2}cdz$ , & sumptis fluentibus, sec-  
tor CIV =  $\frac{1}{2}cz = \frac{1}{2}c\sqrt{rr-xx}$ , nulla  
enim est addenda quantitas constans. Po-  
natur 2°.  $\sqrt{xx-rr}=y$ , & proinde  $xx=$   
 $yy, x dx = y dy$ , erit  $CIK = \frac{\frac{1}{2}cx dx}{\sqrt{xx-rr}}$   
 $= \frac{1}{2}cdy$ , & sector fluens CIV =  $\frac{1}{2}cy =$   
 $\frac{1}{2}c\sqrt{xx-rr}$



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

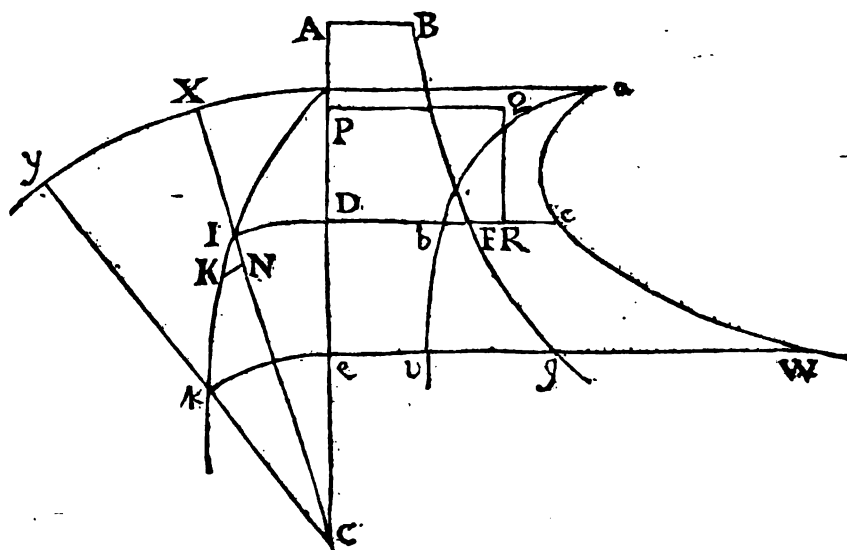
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.

XLII.  
PROBL.  
XXIX.

# PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

*Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato; datâ cum velocitate, secundum datam rectam egressi.*

Stantibus quæ in tribus propositionibus præcedentibus: exeat



corpus de loco *I* secundum lineolam *IK*, eâ cum velocitate quam corpus aliud, vi aliquâ uniformi centripetâ, de loco *P* cadendo acquirere posset in *D*: sitque hæc vis uniformis ad vim, quâ corpus primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus versus *k*; centroque *C* & intervallo *Ck* describatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *BFG*, *abv*, *acw* ordinatim applicatæ *eg*, *ev*, *ew*. (y) Ex dato

(y) \* *Es dato reſtângulo PDRQ &c.* Ex datâ vis centripetæ lege, datur curva lineâ *BFG*, (per *conſtr.* 1<sup>æ</sup> partis *prop.* 39.) Dato reſtângulo *PDRQ*, datur locus *A*, de quo corpus urgente vi centripetâ variabili cadere debet, ut velocitatem acquirat in loco *D*, æqualem veloci-

tati quam corpus aliud urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ ex loco *P* cadens acquiſivit eodem loco *D*, (per *cor.* 1. *prop.* 39.) dato autem loco *A*, & deſcriptâ curvâ *BFG*, deſcribi poterit altera curva *VLM*, (per *conſtr.* & *fig.* 1<sup>æ</sup> partis, *Prop.* 39.)

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

333

dato rectangulo  $PDRQ$ , datâque lege vis centripetæ quâ corpus primum agitur, datur curva linea  $Bfg$ ; per constructionem problematis xxvii, & ejus corol. 1. (2) Deinde ex dato angulo  $CIK$  datur proportio nascentium  $IK$ ,  $KN$ , & inde per constructionem prob. xxviii. datur quantitas  $Q$ , unâ cum curvis lineis  $abv$ ,  $acw$ : ideoque, completo tempore quovis  $Dbve$ , datur tum corporis altitudo  $Ce$  vel  $Ck$ , tum area  $Dcwe$ , eique æqualis sector  $XCy$ , angulusque  $ICK$ , & locus  $k$  in quo corpus tunc versabitur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his propositionibus vim centripetam in recessu quidem à centro variari secundum legem quamcunque, quam quis imaginari potest, in æqualibus autem à centro distantis esse undique eandem. Atque hætenus motum corporum in orbibus immobilibus consideravimus. Supereft ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adiciamus pauca.

(2) \* Deinde. Cùm sit  $IK$  ad  $KN$ , ut sinus totus ad sinum anguli dati  $NIK$ , (per corol. 2. prop. 41.) dabitur quantitas constans  $Q$ , unâ cum curvis lineis  $abv$ ,  $acw$ , est enim  $IK:KN = \sqrt{ABFD} \text{ (five } \sqrt{PDRQ}) : Z$ ; est ergo data  $Z$  (per constr. probl. 28. & not. 418.) &

$Z = \frac{Q}{A}$  five  $A \times Z = Q$  unde habetur,  $Q = AZ$  quibus habentur quantitates  $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD-ZZ}}$  &  $\frac{Q \times CX^2}{2A \times \sqrt{ABFD-ZZ}}$  quæ sunt ordinatæ curvarum  $abv$ ,  $acw$ .

## SECTIO IX.

*De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.*

## PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

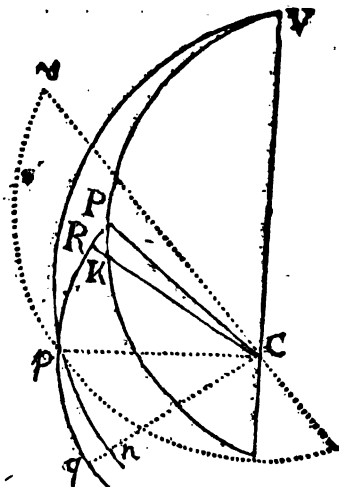
(<sup>a</sup>) *Efficiendum est ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quiescente.*

In orbe  $VPK$  positione dato revolvatur corpus  $P$  pergendo à  $V$  versus  $K$ . A centro  $C$  agatur semper  $Cp$ , quæ sit ipsi  $CP$  æqualis, angulumque  $VCp$  angulo  $PCP$  proportionalem constituat; & (<sup>b</sup>) area, quam linea  $Cp$  describit, erit ad aream  $VCp$ , quam linea  $CP$  simul describit; ut velocitas lineæ describentis  $CP$  ad velocitatem lineæ describentis  $Cp$ ; hoc est, ut angulus  $VCp$  ad angulum  $PCP$ , ideoque in datâ ratione, & prop-

(<sup>a</sup>) \* *Efficiendum est. Sit  $VPK$  quælibet immota trajectoria quam corpus  $P$  ad centrum virium  $C$  tendens describat pergendo ab  $V$  versus  $K$ , inveniendæ est lex vis centripetæ ad  $C$  tendentis, quâ urgente corpus aliud  $p$  feratur in perimetro figuræ  $u p$ , priori similis & æqualis, intereadum hæc ipsa figura  $u p$ , circa  $C$  revolvitur in uno eodemque plano, ita ut dum corpus  $P$ , arcum quemlibet ut  $VP$ , percurrit in orbe quiescente  $V P$ , aliud corpus  $p$ , similem & æqualem arcum  $u p$ , percurrat in orbe revolvente  $u p$ .*

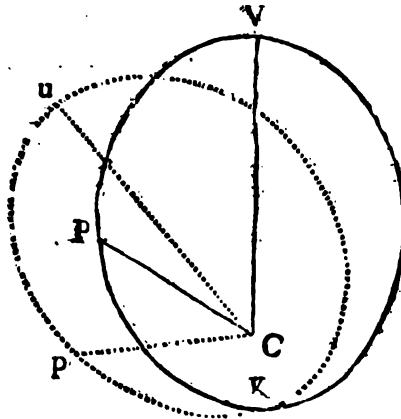
443. Si fuerit  $CV$  ad trajectoriam  $VPK$  in puncto  $V$  perpendicularis, hoc est, si sit  $CV$  linea apsidum in orbe quiescente, & correspondens  $Cu$  linea apsidum in orbe revolvente, motus angularis lineæ  $Cu$  dicitur apsidum motus, qui in consequentia sit, ubi linea  $Cu$ , in eandem partem fertur cum corpore  $P$ , vel  $p$ . In antecedentia verò ubi linea  $Cu$ , & corpus  $P$ , vel  $p$ , in plagas contrarias tendunt.

(<sup>b</sup>) \* *Et area quam linea  $Cp$  describit. Sit  $V p n$  curva quam corpus  $p$  in orbe mobili  $u p$  revolvens describit, centro  $C$ , intervallo  $CP$ , vel  $Cp$ , describatur circuli arcus  $P p q$ , agatur radius  $QR$  orbem*



quiescentem  $V P K$  secans in  $K$ , & radius  $Cq$ , trajectoriam  $V p n$ , secans in  $n$ , sintque  $K, n$ , loca in quibus eodem tempore reperiuntur corpora  $P, p$ , id est, arcus  $PK, p n$ , sint eodem tempore descripti. Nascentibus arcibus  $PR, p q$ , sectores  $PCK, p C n$ , æquales sunt factis  $\frac{1}{2} PC$

propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis sit quam linea  $Cp$  in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit unâ cum puncto  $p$  in curvâ illâ lineâ quam punctum idem  $p$  ratione jam expositâ describit in plano immobili. Fiat angulus  $V C u$  angulo  $P C p$ , & linea  $C u$  lineæ  $C V$ , atque figura  $u C p$  figuræ  $V C P$  æqualis, & corpus in  $p$  semper existens movebitur in perimetro figuræ revolvantis  $u C p$ , eodemque tempore describet arcum ejus  $u p$  quo corpus aliud  $P$  arcum ipsi similem & æqualem  $V P$  in figurâ quiescente  $V P K$  describere potest. Quæritur igitur, per corollarium quintum propositionis VI., vis centripeta quâ corpus revolvi possit in curvâ illâ lineâ quam punctum  $p$  describit in plano immobili, & solvetur problema. *Q. E. F.*



DE MOTU CORPORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROPOSITIONES  
XLIII.  
PROBLEMA  
XXX.

PRO-

$\frac{1}{2} P C \times P R, \frac{1}{2} p C \times p q$ ; adeoque ob  $p C = P C$  sectores illi sunt inter se ut arcus  $P R, p q$ , seu ut anguli  $P C K, p C n$ ; sed quoniam angulus  $V C K$ , est ad angulum  $V C n$ , in datâ ratione anguli  $V C P$ , ad angulum  $V C p$  (*per hyp.*) erit dividendo angulus  $V C K = V C P$ , ad angulum  $V C n = V C p$ , hoc est, angulus  $P C K$ , ad angulum  $p C n$ , in datâ ratione anguli  $V C P$ , ad  $V C p$ , atque ad id sector  $P C K$ , ad sectorem  $p C n$ , in eadem ratione datâ. Unde (*per cor. Lem. 4.*) totus sector  $V p C$ , est ad totum sectorem  $V P C$ , eodem tempore descriptum in datâ ratione, sive sector  $V p C$ , est ut sector  $V P C$ , proindeque (*per prop. 1.*) ut tempus quo sector uterque describitur. Quare manifestum est (*per prop. 2.*) quod corpus  $p$ , cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit in curvâ lineâ  $V p n$ , quam punctum  $p$  perpetuò tangit. Porro dato orbe  $V P K$ , & virium centro  $C$ , datur longitudo & positio lineæ  $C P$ , (*per superiorem Newton. constr.*) adeoque & lineæ  $C p$ , &

hinc datur punctum quodlibet  $p$ , in trajectoriâ  $V p n$ , adeoque & ipsa trajectoria datur. Inveniri igitur potest (*per cor. 5. prop. 6.*) Lex vis centripetæ quâ corpus  $p$ , in trajectoriâ illâ  $V p n$  revolvi potest.

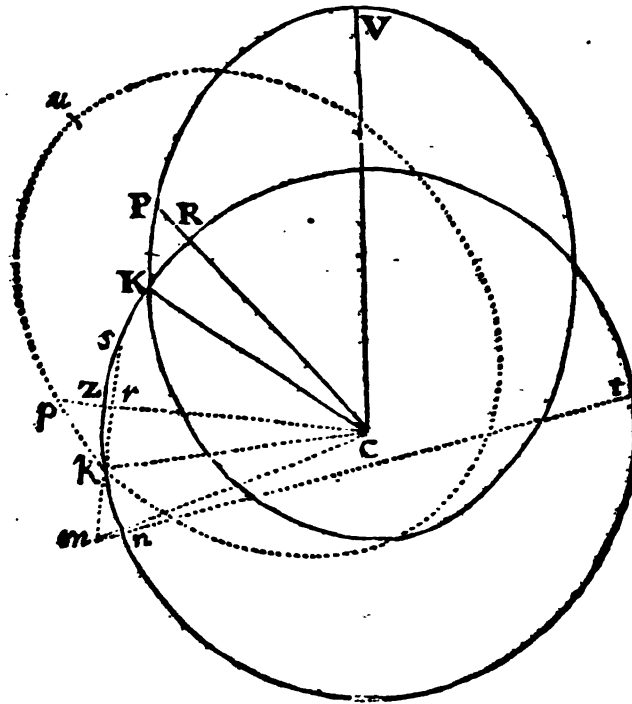
Quoniam autem angulus  $V C P$  æqualis est angulo  $v C p$  (*per constr.*) erit quoque angulus  $V C v$  æqualis angulo  $P C p$ , adeoque datâ  $C p$ , magnitudine & positione, facile invenitur positio lineæ apsidum  $C v$  in orbe mobili  $V p$ : Fiat enim angulus  $V C v$  angulo  $P C p$ , & linea  $C v$  lineæ  $C V$ , atque figura  $u C p$ , figuræ  $V C P$  similis & æqualis, & corpus unâ cum puncto  $p$ , semper latum & figuram immotam  $V p n$  describens, describit etiam perimetrum  $u p$ , figuræ revolvantis  $u C p$ , eodemque tempore describit arcum ejus  $v p$ , quo corpus aliud  $P$  arcum ipsi similem & æqualem  $V P$ , in figurâ quiescente  $V P K$ , describere potest. Vide *Varignonium*. Legem vis centripetæ in trajectoria  $V p n$  determinantem, in *Comm. Paris. 1705.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XLIV.

## PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

*Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inversè.*

Partibus orbis quiescentis  $VP$ ,  $PK$  sunt similes & æquales orbis revolventis partes  $u p$ ,  $p k$ ; & punctorum  $P$ ,  $K$  distantia intelligatur esse quam minima. A puncto  $k$  in rectam  $p C$  demitte perpendicularum  $k r$ , idemque produc ad  $m$ , ut sit  $m r$  ad



$k r$  ut angulus  $V C p$  ad angulum  $V C P$ . Quoniam corporum altitudines  $P C$  &  $p C$ ,  $K C$  &  $k C$ , semper æquantur, manifestum est quod linearum  $P C$  &  $p C$  incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis  $P$  &  $p$  existentium distinguantur motus singuli (*per legum corol. 2.*) in binos,

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 337

nos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas  $PC$ ,  $pC$  determinantur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis  $PC$ ,  $pC$  perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis  $p$  erit ad motum transversum corporis  $P$ , ut motus angularis lineæ  $pC$  ad motum angularem lineæ  $PC$ , id est, ut angulus  $V Cp$  ad angulum  $V CP$ . Igitur eodem tempore quo corpus  $P$  motu suo utroque pervenit ad punctum  $K$ , corpus  $p$  æquali in centrum motu æqualiter movebitur à  $p$  versus  $C$ , ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in lineâ  $mkr$ , quæ per punctum  $k$  in lineam  $pC$  perpendicularis est; & motu transverso acquireret distantiam à lineâ  $pC$ , quæ sit ad distantiam quam corpus alterum  $P$  acquirit à lineâ  $PC$ , ut est motus transversus corporis  $p$  ad motum transversum corporis alterius  $P$ . Quare cum  $kr$  æqualis sit distantie quam corpus  $P$  acquirit à lineâ  $PC$ , sitque  $mr$  ad  $kr$  ut angulus  $V Cp$  ad angulum  $V CP$ , hoc est, ut motus transversus corporis  $p$  ad motum transversum corporis  $P$ , (c) manifestum est quod corpus  $p$  completo illo tempore reperietur in loco  $m$ . Hæc ita se habebunt ubi corpora  $p$  &  $P$  æqualiter secundum lineas  $pC$  &  $PC$  moventur, ideoque æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus  $pCn$  ad angulum  $pCk$  ut est angulus  $V Cp$  ad angulum  $V CP$ , sitque  $nC$  æqualis  $kC$ , & corpus  $p$  completo

(c) \* Manifestum est quod corpus  $p$  &c. Ex puncto  $K$  in rectam  $PC$ , demissum intelligatur perpendicularum  $KR$ , & erit  $PR = pr$ . Fingamus corpus  $P$  de loco  $P$  ita projici ut vi secundum directionem  $PC$ , urgente percurrat spatium  $PR$ , eodem tempore quo vi alterâ secundum rectam ipsi  $RK$ , parallelam impellente, percurrit spatium æquale rectæ  $RK$ , adeo ut eo tempore viribus conjunctis describat diagonalem  $PK$ . Fingamus similiter corpus  $p$ , de loco  $p$  ita projici, ut vi se-

cundum directionem  $pC$  urgente percurrat  $pr = PR$ , eodem tempore quo corpus  $P$  percurrit  $PR$  aut  $RK$  vel  $PK$ , & vi alterâ secundum directionem rectæ  $rm$ , parallelam impellente, corpus  $p$ , eodem tempore describat spatium æquale rectæ  $rm$ , quæ est ad  $RK$ , in ratione velocitatis transversæ corporis  $p$ , ad velocitatem transversam corporis alterius  $P$ . His positis manifestum est corpora  $P$  &  $p$ , de locis  $P$ , &  $p$ , simul egressa, eodem temporis puncto reperiri in locis  $K$ , &  $m$ .

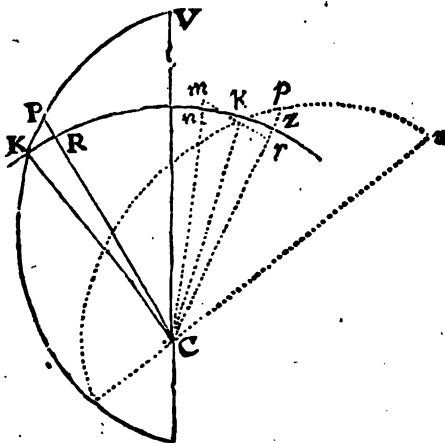
V V

Tom. I.



differentia ut locorum intervallum  $mn$ , per quod corpus illud **DE Mo-**  
 $p$  ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. **Cen-** **TU COR-**  
 tro  $C$  intervallo  $Cn$  vel  $Ck$  describi intelligatur circulus secans **PORUM.**  
 lineas  $mr$ ,  $mn$  productas in  $s$  &  $t$ , & (f) erit rectangulum **LIBER**  
 $mn \times mt$  æquale rectangulo  $mk \times ms$ , ideoque  $mn$  æquale **PRIMUS.**  
 $\frac{mk \times ms}{mt}$ . (g) Cum autem triangula  $pCk$ ,  $pCn$  dato tempore **PROP.**  
**XLIV.**  
**THEOR.**  
**den-xiv.**

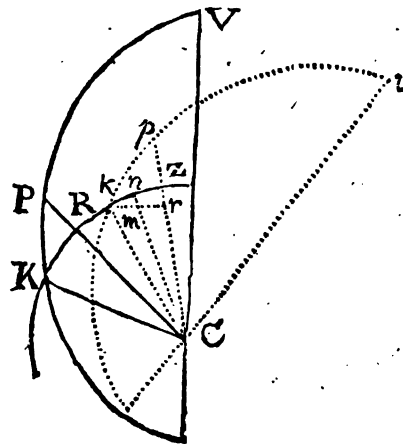
riam circuli radio  $Ck$ , vel  $Cn$ , descrip-  
 ti cadit, adeoque præter vim quâ corpus  
 utrumque ad centrum urgetur, requiritur  
 vis altera quâ corpus  $p$ , adhuc describat  
 $m$   $n$ . In 1<sup>o</sup>. casu  $Cm$ , minor est quam  
 $Cn$ , puncto  $m$ , cadente inter puncta  $k$ ,  
 &  $r$ , in lineâ  $kr$ . In 3<sup>o</sup>. casu  $Cm = Cn$ ,  
 coincidentibus punctis  $m$ ,  $n$ ,  $k$ .



445. Porro angulus  $mCp$ , angulo  $kCp$ ,  
 seu  $KCP$  major est, si orbis  $vpk$ , vel move-  
 tur in consequentia (ut patet) vel movetur  
 in antecedentia majore celeritate quàm sit  
 dupla ejus quâ linea  $CP$  in consequentia fer-  
 ritur. Nam in hoc casu angulus  $vCV$ , est plus-  
 quam duplo major angulo  $VCp$ , seu  $u Cp$ ,  
 adeoque angulus  $VCp$ , major angulo  $VCP$ ,  
 seu  $vCp$ , & hinc angulus  $pCm$ , major  
 angulo  $pCk$ , cum sit angulus  $pCm$ , ad  
 angulum  $pCk$ , ut  $VCp$ , ad  $VCP$ .

446. Si orbis  $u p k$ , movetur in ante-  
 cedentia cum celeritate duplâ ejus quâ li-  
 nea  $CP$ , in consequentia fertur, erit an-

gulus  $VCp = VCP$ ; cumque sit etiam  
 $Cp = CP$ , corpus  $p$  describet orbem im-  
 motum  $Vp$ , similem & æqualem orbi  $VFK$ .  
 In hoc casu corpus  $p$ , non fertur ab  $V$ , ver-  
 sus  $P$ , sed in partem oppositam ut patet.



447. Si orbis  $v p k$  movetur in antecedentia  
 minori celeritate quam sit dupla ejus  
 quâ linea  $CP$  in consequentia fertur, erit  
 angulus  $mCp$ , angulo  $kCp$  minor. In  
 hoc enim casu angulus  $VCv$  minor est  
 duplo angulo  $VCp$ , vel  $vCp$ , adeoque  
 angulus  $VCp$ , minor angulo  $VCP$ , vel  
 $vCp$ , & hinc angulus  $mCp$ , minor an-  
 gulo  $kCp$  (per constr.)

(f) \* Erit rectangulum  $mn \times mt =$  re-  
 ctangulo  $mk \times ms$ . Per prop. 35. vel 36.  
 lib. 3. Elem.

(g) Cum autem triangula  $pCk$ , sive  
 $pCk$ , &  $pCn$ , dato tempore describantur  
 (per hyp.) dantur magnitudine (per prop. 1.)  
 Porro triangulum  $pCk = \frac{1}{2} PC \times KR$ , &

$V v 2$  trian-



# 340 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO- dentur magnitudine, sunt  $kr$  &  $mr$ , earumque differentia  $mk$   
TU COR- & summa  $ms$  reciproce ut altitudo  $pC$ , ideoque rectangulum  
PORUM.  $mk \times ms$  est reciproce ut quadratum altitudinis  $pC$ . Est &  $mt$   
LIBER directè ut  $\frac{1}{2}mt$ , id est, ut altitudo  $pC$ . Hæ sunt primæ ra-  
PRIMUS.

PROP. tiones linearum nascentium; & hinc fit  $\frac{mk \times ms}{mt}$ , id est lineola  
XLIV. nascens  $mn$ , eique proportionalis virium differentia reciproce  
THEOR. ad cubus altitudinis  $pC$ . Q. E. D.  
XIV.

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis  $P$  &  $p$ , vel  $K$  &  $k$ , est ad vim quâ corpus motu circulari revolvi possit ab  $R$  ad  $K$  eodem tempore quo corpus  $P$  in orbe immobili describit arcum  $PK$ , ut lineola nascens  $mn$  ad  $(h)$  sinum versum arcus nascentis  $Rk$ , id est ut  $\frac{mk \times ms}{mt}$  ad  $\frac{rkq}{2kC}$ , vel ut  $mk \times ms$  ad  $rk$  quadratum; hoc est, si capiantur datæ quantitates  $F$ ,  $G$  in

triangulum  $pCn = \frac{1}{2}pC \times mr$ . Junctis enim  $pn$ ,  $pm$ , erit triangulum nascens  $pnc$  æquale nascenti  $pmaC$ , ob  $mn$  evanescentem respectu lineæ finitæ  $Cn$ , & triangulum  $pmaC = \frac{1}{2}pC \times mr$ . Sunt ergo facta  $pC \times kr$ , &  $pC \times mr$ , constantia seu data & hinc  $kr$ , &  $mr$ , sunt reciproce ut altitudo  $pC$ , & propterea dividendo & componendo, earum differentia;  $mk$ , & summa  $ms$ , sunt reciproce ut eadem altitudo  $pC$ . Quod ut clariùs intelligatur, supponamus esse  $kr = \frac{F}{pC}$ ,  $mr = \frac{G}{pC}$ , &  $F$  &  $G$  esse quantitates datas, erit  $mr - kr = mk = \frac{G - F}{pC}$ ,  $mr + kr = ms = \frac{G + F}{pC}$ , hoc est, ob quantitates  $F$ ,  $G$ ,  $G - F$ ,  $G + F$ , datas, erunt  $kr$ ,  $mr$ ,  $mk$ ,  $ms$ , ut  $\frac{1}{pC}$ . Hinc rectangulum  $mk \times ms = \frac{GG - FF}{pC^2}$ , est reciproce ut quadratum altitudinis  $pC$ ; Est &  $mt$ , directè ut

$\frac{1}{2}mt = Cn = Ck = pC$ , quare  $mn = \frac{mk \times ms}{mt} = \frac{GG - FF}{2pC^2}$ , & ideo  $mn$  est reciproce ut cubus altitudinis  $pC$  ob datam quantitatem  $\frac{GG - FF}{2}$ .

(h) \* Ad sinum versum arcus nascentis  $Rk$ , seu  $Zk$ , hoc est, ad  $Zr$ , nam  $Zr$  &  $mn$ , sunt spatia nascentia eodem tempusculo viribus illis descripta, & iisdem proinde viribus proportionalia. Est autem  $mn = \frac{mk \times ms}{mt}$  (ex Dem.) &  $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$ . Nam, ex naturâ circuli  $Zr : kr = kr : KC + rC$ , hoc est, quia  $rC$  usurpari potest pro  $ZC$ , & quia  $ZC = kC$ ,  $Zr : kr = kr : 2kC$ , &  $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$ ; undè  $mn : Zr = mk \times ms : kr^2$ , ob  $mt = 2kC$ . Si vero capiantur duæ quantitates  $G$ ,  $F$ , in eâ ratione ad invicem quam habet angulus  $VCp$ , ad angulum  $VCp$ , seu quam habet  $mr$ , ad  $kr$ , erit  $mk \times ms : kr^2 = GG - FF : FF$ ; ut ex suprâ demonstratis liquet, ergò  $mn : Zr = GG - FF : FF$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

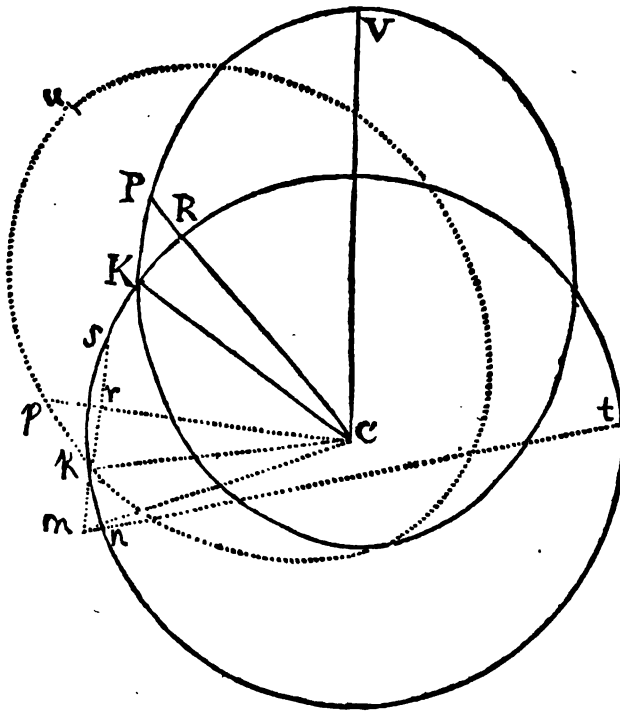
341

in eâ ratione ad invicem quam habet angulus  $\angle VCP$  ad angulum  $\angle Cp$ , ut  $GG - FF$  ad  $FF$ . Et <sup>(i)</sup> propterea, si centro  $C$  intervallo quovis  $CP$  vel  $Cp$  describatur sector circularis æqualis aræ toti  $\angle VPC$ , quam corpus  $P$  tempore quovis in

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.

**XLIV.**  
**THEOR.**

**XIV.**



orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus  $P$  in orbe immobili & corpus  $p$  in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, sectorem illum eodem tempore, quo descripta sit area  $VPC$  uniformiter describere po-

(i) \* *Es propietatē si centro C. Corpus P, in orbitā VPCK revolvens dato tempore datum sectorem PCK, radio ad centrum C ducto describit (per prop. 1.) & corpus in circulo radio CK descripto uniformiter revolvens, & arcum RK, seu sectorem CRK = CPK, describens eodem tempore quo corpus P describit arcum*

P K, seu sectorem C P K, dato tempore datum quoque sectorem describit. Quare corpus P, in orbita V P K, & corpus in circulo prædicto revolventia, radiis ad centrum C ductis, sectores æquales temporibus æqualibus describunt. Et propterea si centro C, intervallo C P, vel C p, describamur &c.

## 342 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM. potuisset, ut  $GG - FF$  ad  $FF$ . Namque sector ille & area  $p C k$  sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

LIBER  
PRIMUS. *Corol. 2.* Si orbis  $V P K$  ellipsis sit umbilicum habens  $C$  & apsidem summam  $V$ ; eique similis & æqualis ponatur ellipsis

PROP. \*  $p k$ , ita ut sit semper  $p C$  æqualis  $P C$  & angulus  $V C p$  sit

XLIV. ad angulum  $V C P$  in datâ ratione  $G$  ad  $F$ ; pro altitudine au-

THEOR. tem  $P C$  vel  $p C$  scribatur  $A$ , & pro ellipseos latere recto po-

XIV. natur  $2 R$ : erit vis, quâ corpus in ellipsi mobili revolvi po-

test, ut  $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$  & contra. Exponatur enim vis

quâ corpus revolvatur in immotâ ellipsi per quantitatem  $\frac{FF}{AA}$ , &

vis in  $V$  erit  $\frac{FF}{CV \text{ quad.}}$ . (k) Vis autem quâ corpus in circulo

ad distantiam  $CV$  eâ cum velocitate revolvi posset quam corpus in ellipsi revolvens habet in  $V$ , est ad vim quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside  $V$ , ut dimidium lateris recti ellipseos ad circuli semidiametrum  $CV$ , ideoque valet

$\frac{RFF}{CV \text{ cub.}}$ : & vis, quæ sit ad hanc ut  $GG - FF$  ad  $FF$ , valet

$RGG$

(k) \* *Vis autem quâ corpus in circulo*  
&c. Demonstratio Newtoniana ita procedit: Vis quâ corpus in Ellipsi circa ejus focum revolvitur, est semper æqualis cuidam quantitati constanti divisæ per quadratum distantie à foco (per prop. XI.) Sumatur ergo pro illâ quantitate constanti, quadratum  $F F$  cujus latus  $F$  est prima ex illis indeterminatis (sed constantibus) quæ exprimunt rationem anguli  $V C P$  ad angulum  $V C p$ , erit vis in  $V = \frac{FF}{VC^2}$ .

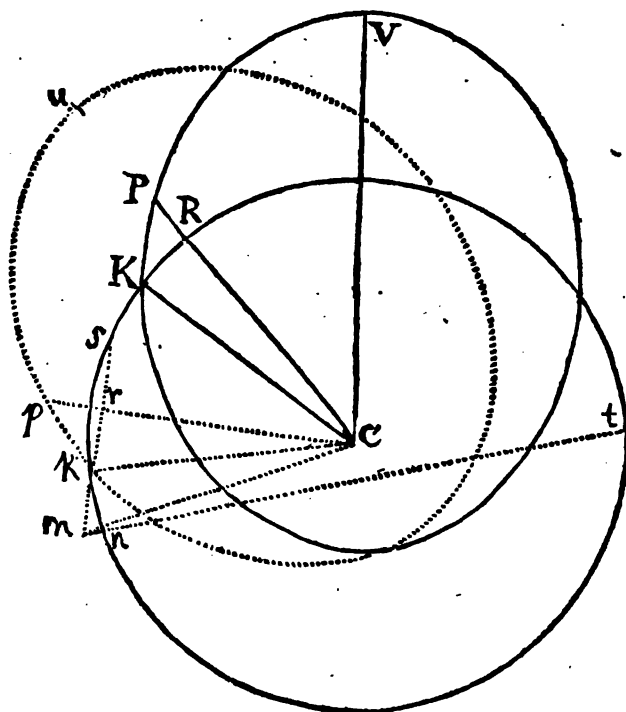
Sit Corpus circa centrum quodvis in circulo revolvens, ad distantiam  $CV$ , eadem velocitate quâ Corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside  $V$ , sumantur in Circulo & in Ellipsi arcus quamminimi eodem tempore descripti, illi arcus erunt inter se æquales, ob æquales velocitates (ex Hypoth.) & eorum sagittæ erunt in-

ter se ut vires Centrales (per Corol. 4. Prop. I.): in ellipsis autem omnibus in quibus vis centripeta ad focum tendit (& iis annumeratur Circulus) latera recta sunt inversè ut arcuum quamminimo tempore descriptorum sagittæ & directè ut quadrata perpendiculari ducti ab extremitate eorum arcuum in lineam ad Centrum virium tendentem (per Corol. 2. Prop. XIII.) sed in apside Ellipseos & Circulo, illa perpendiculara sunt ipsi arcus, ideoque sunt æqualia; Ergo latera recta hujus Ellipsis & hujus Circuli erunt inversè ut sagittæ arcuum sive inversè ut vires Centrales; Latus rectum circuli est ipsa diameter, ergo sumendo dimidium utriusque Lateris recti est vis quâ Corpus in Ellipsi revolvens urgetur &c. Reliqua demonstratio est plana.

RGG—RFF

$CV \text{ cub.}$  : estque hæc vis (per hujus corol. 1.) differentia virium in  $V$  quibus corpus  $P$  in ellipfi immotâ  $VPK$ , & corpus  $p$  in ellipfi mobili  $upk$  revolvuntur. Unde cum (per hanc prop.) differentia illa in aliâ quâvis altitudine  $A$  sit ad seipsam in altitudine  $CV$  ut  $\frac{1}{A \text{ cub.}}$  ad  $\frac{1}{CV \text{ cub.}}$ ; eadem diffe-

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
& LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XLIV.  
THEOR.  
XIV.



rentia in omni altitudine  $A$  valebit  $\frac{RGG-RFF}{A \text{ cub.}}$ . Igitur ad vim  $\frac{FF}{AA}$ , quâ corpus revolvi potest in ellipfi immobili  $VPK$ , addatur excessus  $\frac{RGG-RFF}{A \text{ cub.}}$ ; & componetur vis tota  $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A \text{ cub.}}$  quâ corpus ellipfi mobili  $upk$  iisdem temporibus revolvi possit.

Co-

# 344 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**DE MO-** *Corol. 3.* (1) Ad eundem modum colligetur quòd, si or-  
**TU COR-** bis immobilis  $\angle P K$  ellipsis sit centrum habens in virium  
**FORUM.** centro  $C$ ; eique similis, æqualis & concentrica ponatur ellipsis  
**LIBER** mobilis  $u p k$ ; sitque 2  $R$  ellipseos hujus latus rectum principa-  
**PRIMUS.** le, & 2  $T$  latus transversum five axis major, atque angulus  
**PROP.**  $\angle C p$  semper sit ad angulum  $\angle C P$  ut  $G$  ad  $F$ ; vires, quibus  
**XLIV.** corpora in ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus re-  
**THEOR.**  
**XIV.**

volvi possunt, erunt ut  $\frac{F F A}{T \text{ cub.}}$  &  $\frac{F F A}{T \text{ cub.}}$  +  $\frac{R G G - R F F}{A \text{ cub.}}$  respec-  
 tive.

*Corol. 4.* Et universaliter, si corporis altitudo maxima  $C V$   
 nominetur  $T$ , & radius curvaturæ quam orbis  $\angle P K$  habet  
 in

(1) *Ad eundem modum &c.* Si Cor-  
 pus revolvatur in Ellipsi vi centripetâ ten-  
 dente ad centrum Ellipseos, vis centralis est  
 directè ut distantia à Centro, ideoque  
 erit æqualis quantitati constanti multipli-  
 catæ per distantiam (per *prop. X.*), po-  
 sito 2  $T$  pro axe transverso & 2  $R$  pro la-  
 tere recto, sit ea quantitas constans  $\frac{F F}{T}$ ,

vis in  $V$  erit  $\frac{F F \times C V}{T}$  vel quoniam  $C V$

$= T$ , erit  $\frac{F F}{T}$  in aliis verò omnibus punctis

erit  $\frac{F F \times A}{T}$ .

Sit Corpus in circulo revolvens circa  
 centrum  $C$  ad distantiam  $C V$ , quolibet  
 vi centripetâ, sed tali ut eadem velocita-  
 te feratur quâ corpus in Ellipsi latum  
 urgetur in extremitate axis transversi, su-  
 mantur in eo Circulo & in extremitate  
 axis transversi Ellipseos arcus quammini-  
 mi eodem tempore descripti illi arcus erunt  
 æquales, ob æquales velocitates, & eo-  
 rum sagittæ erunt ut vires Centrales qui-  
 bus corpora in circulo & Ellipsi retinen-  
 tur (per *Cor. 4. Prop. 1.*); in Ellipsi-  
 bus autem diversis (& iis annumeratur  
 Circulus) in quibus vis centripeta ad cen-  
 trum tendit, in distantis æqualibus à  
 Centro, dupla quadrata facti axium sunt  
 inversè ut sagittæ quàm minimo tempore

descriptæ, & directè ut quadrata arearum  
 dato tempore descriptarum (per *constr.*  
*Prop. X.*), cum ergo hic sumantur arcus  
 æquales & perpendiculares in lineam ad  
 centrum ductam, & distantia à centro sint  
 æquales, illæ areæ utrinque sunt æ-  
 quales, ergo sagittæ arcuum in Ellipsi  
 & in circulo sunt inversè ut ipsa quadrata  
 facti axium, seu quia axis transversus Ellip-  
 seos & circuli diameter idem sunt, sagittæ  
 arcuum in Ellipsi & circulo sunt inversè ut  
 quadratum axis conjugati ad quadratum  
 transversi, sive inversè ut Latus rectum ad  
 Axem transversum ergo 2  $T$  : 2  $R$  (sive  
 $T : R = \frac{F F}{T T}$  ad vim in Circulo quæ itaque

erit  $\frac{R \times F F}{T}$ , sed hæc vis est ad differentiam

virium in orbe mobili & immobili, ut  
 $F F$  ad  $G G - F F$ , ergo illa differentia est  
 $\frac{R G G - R F F}{T}$ , hæc autem differentia in  $V$ ,

est ad differentiam in alio quovis loco in-  
 versè ut cubi altitudinum ergo  $A$  :  $C V$

(sive  $T$ ) =  $\frac{R G G - R F F}{T} : \frac{R G G - R F F}{A}$ ,

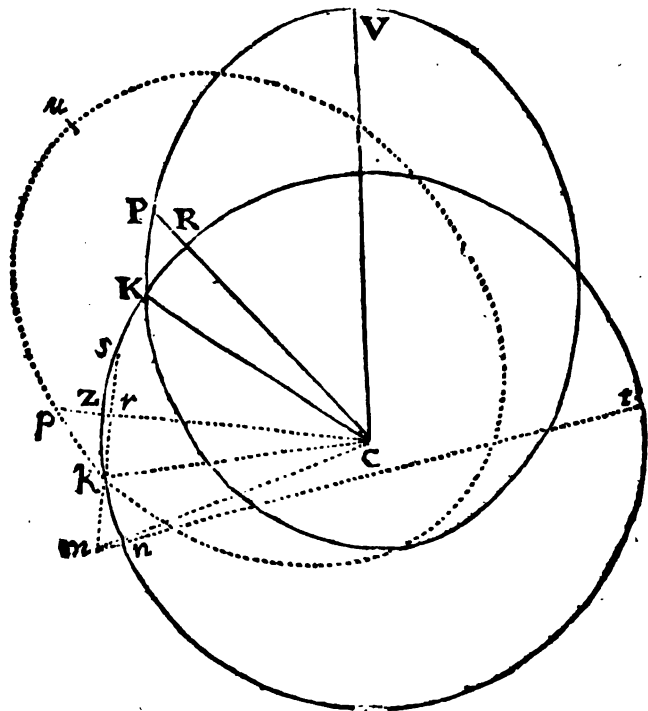
cum ergo Vis in Orbe immobili sit ut  
 $\frac{F F A}{T}$  in orbe mobili erit  $\frac{F F A}{T} +$

$\frac{R G G - R F F}{A}$ . Q. E. D.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 345

in  $V$ , id est radius circuli æqualiter curvi, nominetur  $R$ , & vis De Mo-  
centripeta, quâ corpus in trajectoriâ quâcunque immobili  $VPK$  TU COR-  
revolvi potest in loco  $V$  dicatur  $\frac{VFF}{TT}$ , atque aliis in locis  $P$

FORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XLIV.  
THEOR.  
XLV.



indefinitè dicatur  $X$ , altitudine  $CP$  nominatâ  $A$ , & capiatur  $G$  ad  
 $F$  in datâ ratione anguli  $VCP$  ad angulum  $VCP$ : erit  $(m)$  vis  
centripeta, quâ corpus idem eisdem motus in eâdem trajectoriâ  
 $upk$  circulariter motâ temporibus iisdem peragere potest, ut sum-

$$\text{ma virium } X + \frac{VRGG - VRFF}{A \text{ cub.}}$$

*Corol. 5.* Dato igitur motu corporis in orbe quocunque im-  
mobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa cen-  
trum virium in ratione datâ, & inde inveniri novi orbes im-  
mobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

$(m)$  \* *Eris vis centripeta*, ut hæc commodè demonstrentur adhibendum Lemma, se-  
quens.

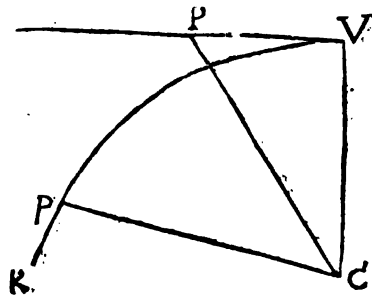
Tom. I.

X x

448.

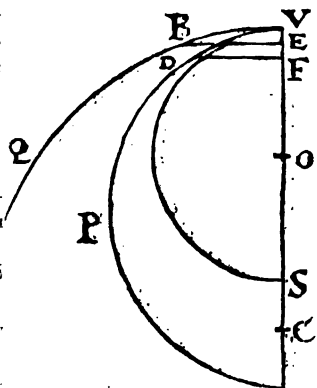
# 346 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DEMO. Corol. 6. Igitur si ad rectam  $CV$   
TU COR. positione datam erigatur perpendicu-  
PORUM. lum  $VP$  longitudinis indeterminatæ,  
LIBER jungaturque  $CP$ , & ipsi æqualis aga-  
PRIMUS. tur  $Cp$ , constituens angulum  $VCp$ ,  
PROP. qui sit ad angulum  $VCp$  in datâ ra-  
XLIV. tione; vis quâ corpus gyrari potest  
THEOR. in curva illa  $Vpk$  quam punctum  $p$   
XIV. perpetuò tangit, erit reciprocè ut cu-



448. Lem.

ma. Si corpus ad centrum virium  $C$  tendens describat trajectoryam immotam  $VP$ , vis centripeta quâ in apside  $V$  urgetur est ad vim centripetam corporis alterius in circulo  $VBQ$ , ad eandem distantiam  $CV$ , eadem cum velocitate revolventis, ut distantia  $CV$  ad  $VO$  radium circuli  $VDS$ , trajectoryam  $VP$  osculantis in  $V$ . Capiantur in circulo  $VBQ$  & in trajectorya  $VP$  arcus quam minimi & æquales  $VB$ ,  $VD$ , & ex punctis  $B$  &  $D$  ad rectam  $CV$  demissa intelligantur perpendiculara  $BE$ ,  $DF$ ; arcus evanescentes  $VB$ ,  $VD$  eodem tempore à corporibus duobus percurrentur, ob utriusque corporis velocitatem æqualem, eruntque perpendiculara  $BE$ ,  $DF$  æqualia (per Lem. VII). Quoniam autem arcus evanescens  $VD$  usurpari potest pro arcu circuli curvam  $VP$  osculantis in  $V$ , erit ex natura circuli  $VF:DF=DF:VO+FO$ , seu  $2VO$ , adeoque  $DF^2=2VO \times VF$ , & similiter  $BE^2=2VC \times VE=2VO \times VF$ ; undè  $VF:VE=V:C:VO$ ; sed vis centripeta corporis arcum  $VD$  describentis, est ad vim centripetam alterius corporis arcum  $VB$  describentis ut  $VF$  ad  $VE$ , quæ sunt spatia viribus illis urgentibus eodem tempusculo descripta, quare vis



centripeta quâ corpus in apside  $V$  urgetur, est ad vim centripetam alterius corporis in circulo ad eandem distantiam eadem cum velocitate revolventis, ut distantia illa  $CV$  ad radium  $VO$  circuli osculatoris in  $V$ . Q. E. D.

449. Cor. 1. Si radius  $VO$  circuli trajectoryam  $VP$  osculantis in apside  $V$  dicatur  $R$ , distantia  $CV$ ,  $T$ , distantia

$CP$ ,  $A$ , vis centripeta in  $V$ ,  $\frac{VFF}{TT}$ , hæc

erit ad vim centripetam in circulo  $VQ$ , ad eandem distantiam  $CV$  eadem cum velocitate descripto ut  $T$  ad  $R$ , (448).

hæc ergo erit  $\frac{KRFF}{T}$ , quæ erit ad differ-

rentiam virium centripetarum in apsidibus  $V$  &  $u$ , orbis immobilis  $VP$ , & orbis mobilis  $up$ , ut  $FF$  ad  $GG$  —  $FF$  (per Cor. I. Newt.) ideoque differentia illa erit  $VRGG - VRFF$

$T$ , quæ erit ad differentiam

in aliis locis  $P$  ut  $A$  ad  $T$ , ideoque in quibuscumque locis erit differentia virium in or-

be mobili & immobili  $\frac{VRGG - VRFF}{A}$ .

Quod aliâ ratione demonstravit Hermannus prop. 25. Lib. I. Phoronomia.

450. Coroll. 2. Hinc si vis centripeta in quovis puncto  $P$ , orbitæ immobilis  $VP$ , dicatur  $X$ , vis in puncto æque alto  $p$ , or-

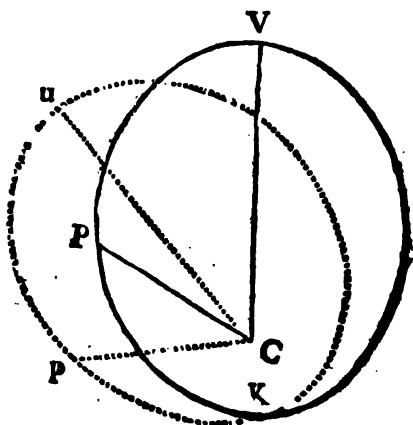
bitæ mobilis  $up$  erit  $X + \frac{VRGG - VRFF}{A}$

Q. E. D.

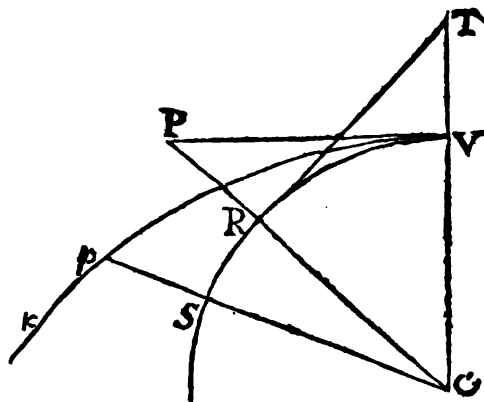
451. Corol. 3. Si orbitæ  $VP$  &  $up$  sint ellipses quarum umbilicus communis  $C$ , erit (240.) radius osculi  $R$  æqualis dimidio lateri recto ellipsos  $VP$ , vel  $up$ : & (per

prop.

bus altitudinis  $Cp$ . Nam  $(6^n)$  corpus  $P$  per vim inertiae, nul- De Mo-  
lâ aliâ vi urgente, uniformiter progredi potest in rectâ  $VP$ . Ad- TU COR-  
datur vis in centrum  $C$ , cubo altitudinis  $CP$  vel  $Cp$ , reciprocè PORUM.  
prôportionalis, & ( per jam demonstrata ) detorquebitur motus ille LIBER  
rectilineus in lineam curvam  $Vpk$ . Est  $(^o)$  autem hæc curva  $Vpk$  PRIMUS.  
eadem cum curvâ illâ  $VPQ$  in corol. 3. prop. XL. inventâ, in quâ PROP.  
ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta obliquè ascendere. THEOR.  
XIV.



(n)\* Nam corpus  $P$ . Linea  $VP$  con-  
siderari potest tanquam trajectoria immo-  
ta, in quâ vis centripeta  $X$  in loco quo-  
vis  $P$  nulla est, & radius osculi  $R$  in-  
finitus; erit igitur in hoc casu ( per cor.  
4. ) vis centripeta in loco  $p$ , trajectoriae  
mobilis, æqualis  $\frac{VRGG - VRFF}{A}$ , adeo-  
que ob datam quantitatem  $VRGG - VRFF$ ,  
erit  $X$ , seu vis in  $p$ , ut  $\frac{1}{A}$ .



Prop. XI.)  $X \frac{VFF}{TT} = IT:AA$ , adeoque  
 $X = \frac{VFF}{AA}$ , Ergo (450) vis in Orbitâ mobili  
erit  $\frac{VFF}{AA} + \frac{VRGG - VRFF}{A}$ , & divisâ om-  
nibus terminis per  $V$  ut  $\frac{FF}{AA} +$   
 $\frac{RGG - RFF}{A}$ ; & si vis centralis ad cen-  
trum Ellipseos dirigatur erit  $X: \frac{VFF}{TT} =$   
 $A:T$  &  $X = \frac{VFF \times A}{T}$  & vis in Orbitâ  
mobili erit  $\frac{VFF \times A}{A} + \frac{VRGG - VRFF}{A}$   
& divisâ terminis per  $V$  erit  $\frac{FF \times A}{T} +$   
 $\frac{RGG - RFF}{A}$ ; sicut in Cor. 3. & 4. New-  
ingtonum fuerat.

(o)\* Est autem hæc curva  $Vpk$  eadem &c.  
Nam si centro  $C$  intervallo  $CV$  describatur  
circulus  $VRS$  quem recta  $CP$  secat in  $R$ ,  
recta  $Cp$ , in  $S$ , sitque angulus  $SCV$  ad  
angulum  $RCV$  in datâ ratione, erit quo-  
que sector  $SV C$  ad sectorem  $RV C$  in  
datâ illâ ratione, & ductâ per punctum  $R$   
tangente  $RT$ , quæ radio  $CV$  producto  
occurrat in  $T$ , ejusdem anguli  $RCV$  se-  
cantes  $CP$ ,  $CT$  erunt æquales, atque  
adèd curva  $Vpk$ , eadem cum curvâ  $VPQ$ ;  
in coroll. 3. prop. 41. inventâ, in quâ recta  
 $Cp$  est semper æqualis abscissa  $CT$ , & an-  
gulus  $V C p$  est semper sectori  $V C R$  pro-  
portionalis.  $\Sigma x$





# PRINCIPIA MATHEMATICA. 349

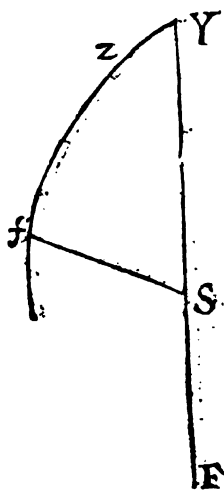
bis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes DE MO-  
autem eandem acquirerent formam, si vires centripetæ quibus TU COR-  
describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus red- PORUM:  
dantur proportionales. Sit punctum  $V$  apsis summa, & scri- LIBER  
bantur  $T$  pro altitudine maximâ  $CV$ ,  $A$  pro altitudine quavis PRIMUS.  
aliâ  $CP$  vel  $Cp$ , &  $X$  pro altitudinum differentiâ  $CV-CP$ ; &  $XLV$ .  
vis, quâ corpus in ellipfi circa umbilicum suum  $C$  (ut in co- PROBL.

rol. 2.) revolvente movetur, quæque in corol. 2. erat ut  $\frac{FF^{xxx}L}{A \cdot A}$

$\frac{RGG-RFF}{A \text{ cub.}}$ , id est ut  $\frac{FFA+RGG-RFF}{A \text{ cub.}}$ , substi-

tuendo  $T-X$  pro  $A$ , erit ut  $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A \text{ cub.}}$ . Re-

ducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem  
cujus denominator sit  $A \text{ cub.}$  & numeratores, factâ homologo-  
rum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exem-  
plis patebit. *Exem-*



$$\begin{aligned} \text{vel in loco } F, \text{ orbis } Vp \text{ n}^\circ \pi, \text{ ut } \frac{FF}{AA} + \\ \frac{RGG-RFF}{A^3} = \frac{FFA+RGG-RFF}{A^3} \\ = \frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A^3} = \frac{P}{A^3}, \end{aligned}$$

substituendo  $T-X$  pro  $A$  in numeratore,  
&  $P$  pro numeratore toto. Unde si quan-  
titas  $\frac{Q}{A^3}$  vim centripetam in loco quo-  
vis  $Z$  orbis  $YZ$  exponat, eaque sit data,  
erit  $\frac{P}{A^3}$  ad  $\frac{Q}{A^3}$  in datâ ratione. Sit il-

la ratio  $r$  ad  $B$ , & erit  $\frac{PB}{A^3} = \frac{Q}{A^3}$ , &

$PB-Q=0$ . Loco  $A$ , in quantitate  $Q$ ,  
substituatur  $T-X$ , & æqualitatis  $PB-Q$   
 $=0$ , termini omnes analogi se mutuo de-  
struere debent, hoc est, termini omnes  
dati seu in quibus non reperitur quanti-  
tas variabilis  $X$  erunt simul nihilo æquales,  
& termini non dati, seu in quibus variabilis  
 $X$  invenitur, erunt etiam simul nihilo æqua-  
les, atque inde determinabitur ratio  $G$  ad  
 $F$  seu anguli  $VCP$  ad angulum  $VCp$ , fa-  
ciendo ut sint termini dati in quantitate  
 $P$  ad terminos non datos ejusdem quanti-  
tatis, ita termini dati in quantitate  $Q$ , ad  
terminos non datos ejusdem quantitas.  
Quod exemplis patebit.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

PROP.  
XLV.  
PROBL.  
XXXI.

(1) *Exempl.* 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse; ideoque ut  $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$ , sive (scribendo  $T - X$  pro  $A$  in numerato-  
re) ut  $\frac{T \text{ cub.} - 3 TTX + 3 TXX - X \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$ ; & collatis nume-

ratorum terminis correspondentibus; nimirum datis cum datis, & non datis cum non datis, fiet  $RGG - RFF + TFF$  ad  $T \text{ cub.}$  ut  $-FFX$  ad  $-3 TTX + 3 TXX - X \text{ cub.}$  sive ut  $-FF$  ad  $-3 TT + 3 TX - XX$ . Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas  $R, T$  æquales, atque  $X$  in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt  $RGG$  ad  $T \text{ cub.}$  ut  $-FF$  ad  $3 TT$ , seu  $GG$  ad  $TT$  ut  $FF$  ad  $3 TT$ , & vicissim  $GG$  ad  $FF$  ut  $TT$  ad  $3 TT$ , id est, ut  $1$  ad  $3$ ; ideoque  $G$  ad  $F$ , hoc est angulus  $\angle C p$  ad angulum  $\angle CP$ , ut  $1$  ad  $\sqrt{3}$ . Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summâ ad apsidem imam nesciendo conficiat angulum  $\angle CP$  (ut ita dicam) graduum  $180$ ; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiet angulum  $\angle C p$  graduum  $\frac{180}{\sqrt{3}}$ : id ideo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripetâ describit, & orbis illius quem corpus

in

(1) \* *Exemplum 1<sup>um</sup>.* Ponamus vim centripetam in orbe  $YZ$  uniformem seu constantem esse, ideoque ut  $1$ , seu ut  $\frac{A^1}{A^1}$ , erit  $Q = A^1 = T^1 - 3 TTX + 3 TXX - X^1$ , &  $PB = BRGG - BRFF + BTFF - BFFX$  atque adeò  $BRGG - BRFF + BTFF - BFFX - T^1 + 3 TTX - 3 TXX + A^1 = 0$ , & termini dati  $BRGG - BRFF + BTFF - T^1 = 0$ , seu  $BRGG - BRFF + BTFF = T^1$ , & termini non dati  $-BFFX + 3 TTX - 3 TXX + X^1 = 0$ , seu  $BFF = 3 TT - 3 TX + X^2$ , unde hæc proportio deducitur  $BRGG - BRFF + BTFF : BFF = T^1 : 3 TT - 3 TX + X^2 = RGG - RFF + TFF : FF$ . Jam cum orbis  $YZ$ , ponatur circulo quam maximè finitimus,

coeat orbis cum circulo & ob factas  $R$  &  $T$  æquales, atque  $X = 0$ , erit  $X^2 = 0$ ,  $3 TX = 0$ ,  $FF = TFF$ , & hinc  $T^1 : 3 TT = RGG : FF = TGG : FF$ , &  $T^2 : 3 T^2 = 1 : 3 = GG : FF$ , adeoque  $G : F = 1 : \sqrt{3}$ , hoc est, angulus  $\angle C p$ , est ad angulum  $\angle CP$ , ut  $1$ , ad  $\sqrt{3}$ . Ergo cum corpus in ellipsi immobili  $VP\pi$ , ab apside summâ  $V$  ad apsidem imam  $\pi$  descendendo, conficiat angulum  $\angle C\pi$  grad.  $180$ . corpus aliud in ellipsi mobili  $u p b$ , atque adeò in orbe immobili  $V p n \pi$ , seu  $YZ f$ , ab apside summâ  $V$  vel  $Y$ , ad apsidem imam  $\pi$  vel  $f$ , descendendo conficiet angulum  $\angle VC\pi$  vel  $Y S f$  grad.  $\frac{180}{\sqrt{3}}$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 351

in ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescen- DE MO-  
te. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur TU COR-  
hi orbes, non universaliter sed tunc cum ad formam circularem PORUM.  
quam maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum LIBER  
vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter PRIMUS.  
apsidem summam & apsidem imam conficiet semper angu- PROB.  
X LV.

lum.  $\frac{180}{\sqrt{3}}$  graduum, seu 103. gr. 55. m. 23. sec. ad centrum; PROBL.  
XXXI.

perveniens ab apside summâ ad apsidem imam ubi semel con-  
fecit hunc angulum, & inde ad apsidem summam rediens  
ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in in-  
finitum.

*Exempl. 2.* Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dig-

nitatis quælibet  $A^{n-3}$  seu  $\frac{A^n}{A^3}$ : ubi  $n-3$  &  $n$  significant dignita-

tum indices quosunque integros vel fractos, rationales vel ir-  
rationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille  $A^n$  seu

$T-X$  in seriem indeterminatam per (f) methodum nostram

serierum convergentium reducta, evadit  $T^{n-n}XT^{n-1} + \frac{n^{n-n}}{2}$

$XXT^{n-2}$  &c. Et collatis hujus terminis cum terminis nume-  
ratoris alterius  $RGG-RFF+TFF-FFX$ , fit  $RGG-RFF$

$+TFF$  ad  $T^n$  ut  $-FF$  ad  $-n.T^{n-1} + \frac{n^{n-n}}{2}XT^{n-2}$  &c.

Et

(f) \* Per methodum nostram. Vide  
fragmentum Epistolæ NEWTONI ad Olden-  
burgium, & theorematibus ibi propositi de-  
monstrationem requiras ex Elementis Alge-  
bræ clarissimorum Virorum WOLFFI, Abba-  
tis de Molieres, vel ex Analyfi demonstra-  
tâ Patris REYNEAU, aut ex aliis passim au-  
thoribus. Interim cum hic satis sit duos  
priores terminos dignitatis  $T-X$  reperi-  
re ob evanescentes terminos in quibus re-  
peritur ipsius  $X$  dignitas primâ: altior,  
facile demonstratur ex dignitatum per con-  
tinuam radices multiplicationem forma-  
tione duos illos priores terminos esse

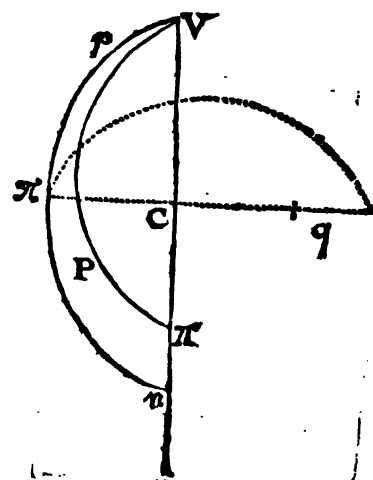
$T^n \times XT^{n-1}$ . Ut si fuerit  $n=2$ , duo prio-  
res termini dignitatis  $T-X^2$ , erunt  $T^2-2 \times$   
 $TX$ ; si  $n=3$ , erunt  $T^3-3 \times XT^2$ , &  
itâ porro; atque hinc patet quàm com-  
pendiosa sit NEWTONIANA methodus mo-  
tum apsidum determinandi, nam præter-  
quam quod sufficit duos dignitatum ter-  
minos invenire, possunt quoque termini  
æquales  $RFF, TFF$ , in formulâ  $RGG-  
RFF+TFF-FFX$ , deleri; undè tan-  
tummodò conferendus terminus datus  $RGG$ ,  
cum aliis terminis datis, & terminus non  
datus  $-FFX$  cum aliis non datis.

## 352 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

**DE MO** Et fumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem  
**TU COR-** accedunt, fit  $RG$  ad  $T^n$  ut  $FF$  ad  $n T^{n-1}$ , seu  $GG$   
**PORUM.** ad  $T^{n-1}$  ut  $FF$  ad  $n T^{n-1}$ , & vicissim  $GG$  ad  $FF$  ut  $T^{n-1}$   
**LIBER.** ad  $n T^{n-1}$  id est ut 1 ad  $n$ ; ideoque  $G$  ad  $F$ , id est angu-  
**PRIMUS.** lus  $\angle C p$  ad angulum  $\angle C P$ , ut 1 ad  $\sqrt{n}$ . Quare cum angu-  
**PROP.** lus  $\angle C P$ , in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem  
**XLV.** imam in ellipsi confectus, fit graduum 180; conficietur angulus  
**PROBL.**  $\angle C p$ , in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam,  
**XXXI.** in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centri-  
 petâ dignitati  $A^{n-3}$  proportionali describit, æqualis angulo gra-  
 duum  $\frac{180}{\sqrt{n}}$ ; & hoc angulo repetito angulus redibit ab apside  
 imâ ad apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si  
 vis centripeta sit ut distantia corporis à centro, id est, ut  $A$   
 seu  $\frac{A^4}{A^3}$ , erit  $n$  æqualis 4 &  $\sqrt{n}$  æqualis 2; ideoque angulus in-

ter apsidem summam & apsidem imam æqualis  $\frac{180}{2}$  gr. seu 90  
 gr. Completâ igitur quartâ parte revolutionis unius corpus per-  
 veniet ad apsidem imam, & completâ aliâ quartâ parte ad ap-  
 sidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id (1)

(1) \* Id quod etiam ex prop. 10. &c.  
 Nam corpus urgente hac vi centripetâ re-  
 volvetur in ellipsi immobili  $V p \pi n$ , cujus  
 centrum est in centro virium  $C$ , axis trans-  
 versus  $V n$ , axis conjugatus  $\pi q$ , apsidæ  
 summæ duæ  $V, n$ , imæ  $\pi, q$ ; ellipseos  
 autem mobilis  $V P \Pi$ , umbilicus erit  $C$ ,  
 axis transversus  $V \Pi = V C + C \pi$ .



# PRINCIPIA MATHEMATICA. 353

quod etiam ex propositione x. manifestum est. Nam corpus ur-  
gente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipsi immobili, cujus cen-  
trum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciprocè

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER

ut distantia, id est directè ut  $\frac{1}{A}$  seu  $\frac{A^2}{A^3}$ ; erit  $n$  æqualis 2, PRIMUS.

PROP.

ideoque inter apsidem summam & imam angulus erit graduum XLV.

PROBL.

$\frac{180}{\sqrt{2}}$  seu 127 gr. 16. m. 45. sec. & propterea corpus tali vi re-

XXXI.

volvens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab  
apside summâ ad imam & ab imâ ad summam perveniet in æter-  
num. Porro si vis centripeta sit reciprocè ut latus quadrato-  
quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciprocè ut

$A^{\frac{11}{4}}$ , (u) ideoque directè ut  $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$  seu ut  $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$  erit æqualis  $\frac{1}{4}$ ;

&  $\frac{180}{\sqrt{n}}$  gr. æqualis 360 gr. & propterea corpus de apside sum-

mâ discedens & subinde perpetuò descendens, perveniet ad apsi-  
dem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo  
ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsi-  
dem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes  $m$  &  $n$  pro quibusvis indicibus dignitatum  
altitudinis, &  $b, c$  pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centri-

petam esse ut  $\frac{b A^m + c A^n}{A^{cub.}}$ , id est, ut  $\frac{b \text{ in } T-X |^m + c \text{ in } T-X |^n}{A^{cub.}}$

seu (x) (per eandem methodum nostram serierum convergentium)  
ut

(u) \* Ideoque directè ut  $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ , seu ut

$\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ , cum sit  $A^{\frac{11}{4}} = A^{\frac{11}{4}}$ , & proinde est

$\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^{\frac{11}{4}}} = A^{-1}$ , atque ita  $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}} = \frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ .

(x) \* Seu per eandem methodum. Et

enim dignitas  $T-X$ , evoluta, est  $T^n -$   
 $mXT^{n-1}$  &c. adeoque  $bXT^{n-1} = bT^n -$   
 $m bXT^{n-1}$  &c. & similiter  $cXT^{n-1} =$   
 $cT^n - n cXT^{n-1}$  &c. unde  $bXT^{n-1} =$   
 $bT^n - m bXT^{n-1}$  &c. &  $cXT^{n-1} =$   
 $cT^n - n cXT^{n-1}$  &c.

DE MO.  
TU COR. ut  $bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2}$   
FORUM.

LIBER  $A \text{ cub.}$

PRIMUS.  
PROP.  $+ \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2} \&c.$  & collatis numeratorum terminis;  
XLV.

PROBL.  $A \text{ cub.}$

XXXI. fiet RGG—RFF+TFF ad  $bT^m + cT^n$ , ut—FF ad— $mbT^{m-1}$   
— $ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2} \&c.$  Et su-

mendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularē accedunt, fit GG ad  $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ , ut FF ad  $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$ , & vicissim GG ad FF ut  $bT^{m-1} + cT^{n-1}$  ad  $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$ . Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV seu T arithmetice per unitatem, fit GG ad FF ut  $b+c$  ad  $mb+nc$ , ideoque ut 1 ad  $\frac{mb+nc}{b+c}$ . Unde est G ad F, id est angulus VCP ad angulum

VCP, ut 1 ad  $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$ . Et propterea cum angulus

VCP inter apsidem summam & apsidem imam in ellipsi immobili sit 180 gr. erit angulus VCP inter easdem apsidēs, in orbe

quem corpus vi centripetâ quantitatis  $\frac{bA^m + cA^n}{A \text{ cub.}}$  proportio-

nali describit, æqualis angulo graduum 180  $\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$ . Et

(γ) eodem argumento si vis centripeta sit ut  $\frac{bA^m - cA^n}{A \text{ cub.}}$ , an-

gulus

(γ) \* Es eodem argumento. Si vis centripeta sit ut  $\frac{bA^m - cA^n}{A}$ , id est ut

$b \times T - X = -c \times T - X$ , seu ut  $bT - cT = mbXT - ncXT$  &c.

collatis terminis fiet RGG, hoc est TGG  $\sqrt{\frac{mb-nc}{b-c}}$

ad  $bT = -cT$ , ut—FF ad— $mbT$ —  
+ $ncT$ —, adeoque GG ad  $bT$ —  
— $cT$ —, ut FF ad  $mbT$ — $ncT$ —,  
& ponendo  $T=1$ , erit GG:FF= $b-c$ :  
 $mb-nc=1: \frac{mb-nc}{b-c}$ , & G:F=1:

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 355

gulus inter apfides inveniatur graduum  $180 \sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$ . Nec

secus resolvetur problema in casibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes  $A^{cub}$ . Dein pars data numeratoris qui ex illâ operatione provenit ad ipsius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus  $RGG - RFF + TFF - FF X$  ad ipsius partem alteram non datam in eâdem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoque unitatem pro  $T$ , obtinebitur proportio  $G$  ad  $F$ .

*Corol. 1.* Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu apsidum; & contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum  $360$ , ut numerus aliquis  $m$  ad numerum alium  $n$ , & altitudo nominetur  $A$ : erit vis ut altitudinis dignitas illa

$\frac{nn}{mm} - 3$ , cujus index est  $\frac{nn}{mm} - 3$ . Id (<sup>2</sup>) quod per exempla secunda manifestum est. (<sup>a</sup>) Unde liquet vim illam in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, in recessu à centro, decrescere

(<sup>2</sup>) 452. \* Id quod per exempla secunda manifestum est. Si in exemplo secundo loco indicis  $n$ , ad confusionem tollendam scribatur  $p$ , erit vis centripeta, ut  $A^p - 1$ , & angulus confectus in descensu ab apside summâ ad apsidem imam æqualis angulo  $\frac{180^\circ}{\sqrt{p}}$ , adeoque duplus ille angulus seu motus totus angularis quo corpus ab apside summâ redit ad eandem erit  $\frac{360}{\sqrt{p}}$  in exemplo secundo. Est autem in casu corollarii hujus, motus totus angularis quo corpus redit ad apsidem eandem æqualis angulo  $\frac{360m}{n}$ , ergo  $\frac{360}{\sqrt{p}} = \frac{360m}{n}$ , &  $\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{m}{n}$ , &  $\frac{1}{p} = \frac{mm}{nn}$ , &  $\frac{nn}{mm} = p$ ; quare  $A^p - 1$

$$= A^{\frac{nn}{mm}} - 1,$$

(<sup>a</sup>) 453. Unde liquet vim illam. Nam si vis esset ut  $\frac{1}{A+1}$ , seu ut  $A^{-1} - 1$ ,

siveque  $+q$  quantitas positiva, esset  $\frac{nn}{mm} - 3$

$= -3 - q$ , &  $\frac{nn}{mm} = -q$ , hoc est;

quadratum quantitatis  $\frac{n}{m}$  negativum, quod absurdum est: non potest igitur vis in majore quàm in triplicatâ altitudinis ratione seu in ratione  $\frac{1}{A+1}$ , in recessu à centro decrescere.

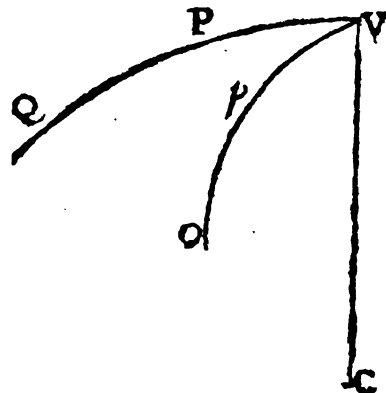


DE MO- cere non posse : (b) Corpus tali vi revolvens deque apside dis-  
TU COR- cedens , si cœperit descendere , nunquam perveniet ad apsidem  
PORUM. imam seu altitudinem minimam , sed descendet usque ad cen-  
LIBER. trum , describens curvam illam lineam de quâ egimus in *corol.*  
PRIMUS. 3. *prop.* xli. Sin cœperit illud , de apside discedens , vel mi-  
X L V. nimum ascendere ; ascendet in infinitum , neque unquam perve-  
PROBL. niet ad apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam  
XXXI. de quâ actum est in eodem *corol.* & in *corol.* vi. *prop.* xli v.  
Sic (c) & ubi vis , in recessu à centro , decrescit in maiore quam  
triplicatâ ratione altitudinis , corpus de apside discedens , perin-  
de ut cœperit descendere vel ascendere , uel descendet ad cen-  
trum

(b) \* *Corpus tali vi revolvens* , hoc est ,  
vi quæ in recessu à centro decrescat in ra-  
tione altitudinis triplicatâ deque apside  
discedens &c. Sint enim ut in *coroll.* 3<sup>o</sup>.  
*prop.* 41. duæ curvæ V p O , V P Q , quas  
corpora duo de loco V , secundum direc-  
tionem ad C V perpendicularem egres-  
sa , vi centripetâ ad C tendente , & in  
triplicatâ altitudinis ratione decrescente  
in recessu à centro describunt , & cor-  
pus in curva V p O , latum ad centrum  
semper accedat , corpus verò in curvâ V P Q ,  
motum à centro semper recedat ut in eodem  
*cor.* 3<sup>o</sup>. *prop.* 41. manifestum est punctum  
V esse apsidem summam in curvâ V p O ,  
& esse apsidem imam in curvâ V P Q ;  
Quare cum in curva V p O , corpus ad cen-  
trum semper accedat , nunquam pervenire  
potest ad apsidem imam , seu altitudinem  
minimam quæ nulla est , sed gyris infini-  
tis descendit usque ad centrum ; in cur-  
vâ verò V P Q de apside imâ discedens  
corpus ascendit in infinitum , neque un-  
quam pervenit ad apsidem summam quæ  
nulla est. Hæc demonstrari etiam possunt

hâc ratione ; Si fuerit vis ut  $\frac{1}{A}$  , seu ut

A — 3 , erit  $\frac{n n}{m m} - 3 = - 3$  , &  $\frac{n n}{m m} = 0$   
= p ( 452 ) & motus totus angularis ab  
apside ad eandem apsidem erit  $\frac{360^{\circ}}{\sqrt{p}}$  =  
 $\frac{360}{0}$  ; motus verò angularis ab apside sum-



mâ ad imam , vel ab imâ ad summam erit  
 $\frac{180^{\circ}}{0}$  quæ est quantitas infinita , undè li-  
quet in nostrâ Hypothesi corpus ab apside  
imâ ad summam aut à summâ ad imam  
nunquam pervenire posse.

(c) \* *Sic & ubi vis in recessu à centro.*

Si vis fuerit ut  $\frac{1}{A + q}$  , & q , quantitas

positiva , erit ( 453 )  $\frac{n n}{m m} = - q = p$  , &

( 452 ) motus totus angularis ab apside ad  
apsidem eandem erit  $\frac{360^{\circ}}{\sqrt{-q}}$  , & ab apside

imâ ad alteram erit  $\frac{180^{\circ}}{\sqrt{-q}}$  : quare ob ima-

gi:

trum usque vel ascendet in infinitum. At (d) si vis, in recessu à centro, vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando perveniet: & (e) contra, si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu à centro aut augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel 1  $\frac{1}{2}$  de apside summâ ad apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit  $m$  ad  $n$  ut 8 vel 4 vel

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROBL.  
XLV.  
PROBL.  
XXXI.

ginariam quantitatem  $\sqrt{-q}$ , impossibile est ut corpus de apside summâ discedens, adeoque ad centrum accedens, ad apsidem imam nunquam perveniat, & ut de apside imâ discedens ac proinde à centro recedens nunquam perveniat ad apsidem summam.

(d) \* At si vis in recessu à centro. Sit vis ut  $\frac{1}{A - q}$ , &  $q$ , quantitas positiva

erit  $\frac{nn}{mm} - 3 = -3 + q$ , &  $\frac{nn}{mm} = q = p$

(452.) Unde motus totus angularis ab

apside ad eandem erit  $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}} = \frac{360m}{n}$ , mo-

tus angularis ab apside unâ ad alteram  $= \frac{180}{\sqrt{p}} = \frac{180m}{n}$ , quæ sunt quantitates rea-

les & positivæ, quare in hac Hypothesi corpus ab apside ad apsidem eandem redire & ab apside summâ ad imam atque ab imâ ad summam pervenire poterit. Est autem

$\frac{1}{A - q}$ , altitudinis  $A$  dignitas, si fue-

rit  $q$  major quam 3, è contrâ  $\frac{1}{A - q}$  est

dignitas quantitatis  $\frac{1}{A}$ , si fuerit  $q$  minor

quam 3. Liqueat igitur, si vis in recessu à centro vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, (quod fit ubi  $q$  minor quam 3) vel crescat in altitudinis

ratione quâcunque (quod fit ubi  $q$ ; major quam 3) corpus nunquam descendere ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando pervenire.

(e) \* Et contra si corpus de apside ad apsidem &c. Nam si vis in recessu à centro non augeatur, nec etiam minuat in minore quàm triplicatâ altitudinis ratione, necessariò decrescet vel in triplicatâ vel in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, sed supra demonstratum est in his duobus casibus corpus non posse ab apside ad apsidem alternis vicibus descendere & ascendere, ergò si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum, vis in recessu à centro augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet, & quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eò longius ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Quo enim citius corpus de apside ad apsidem redierit, eò minor erit quantitas  $\frac{360m}{n}$ , aut quantitas  $\frac{m}{n}$ , adeoque eò ma-

jor erit quantitas  $\frac{n}{m}$ , ejusque quadra-

tum  $\frac{nn}{mm} = p = q$ , & hinc eò longius

quantitas  $\frac{1}{A - q}$  à quantitate  $\frac{1}{A}$  recedat.

# 358 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-  
TU COR- 4 vel 2. vel 1  $\frac{1}{2}$  ad 1, ideoque  $\frac{nn}{mm} - 3$  valeat  $\frac{1}{24} - 3$  vel  $\frac{1}{12}$   
PORUM.  
LIBER — 3 vel  $\frac{1}{4} - 3$  vel  $\frac{1}{3} - 3$ : erit vis ut  $A^{\frac{1}{24}-3}$  vel  $A^{\frac{1}{12}-3}$  vel  $A^{\frac{1}{3}-3}$   
PRIMUS.  
PROP. vel  $A^{\frac{1}{3}-3}$ , id est, reciprocè ut  $A^{3-\frac{1}{24}}$  vel  $A^{3-\frac{1}{12}}$  vel  $A^{3-\frac{1}{3}}$   
XLV.  
PROBL. vel  $A^{3-\frac{1}{3}}$ . Si corpus singulis revolutionibus redierit ad apsidem  
XXXI. eandem immotam; erit  $m$  ad  $n$  ut 1 ad 1, ideoque  $A^{\frac{nn}{mm}-3}$

æqualis  $A^{-2}$  seu  $\frac{1}{AA}$ ; & propterea decrementum virium in ra-  
tione duplicatâ altitudinis, ut (f) in præcedentibus demon-  
stratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quar-  
tis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad ap-  
sidem eandem redierit; erit  $m$  ad  $n$  ut  $\frac{1}{4}$  vel  $\frac{1}{3}$  vel  $\frac{1}{2}$  vel  $\frac{1}{4}$  ad 1,  
ideoque  $A^{\frac{nn}{mm}-3}$  æqualis  $A^{\frac{16}{9}-3}$  vel  $A^{\frac{2}{3}-3}$  vel  $A^{2-3}$  vel  $A^{16-3}$ ;

& (g) propterea vis aut reciprocè ut  $A^{\frac{11}{9}}$  vel  $A^{\frac{1}{3}}$  aut direc-  
tè ut  $A^6$  vel  $A^{11}$ . Denique si corpus pergendo ab apside sum-  
mâ ad apsidem summam confecerit revolutionem integram, &  
præterea gradus tres, ideoque apsis illa singulis corporis revo-  
lutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit  $m$  ad  $n$

ut 363 gr. ad 360. gr. sive ut 121 ad 120, (h) ideoque  $\frac{nn}{mm} - 3$   
erit

(f) \* Ut in præcedentibus demonstra-  
tum est. In hoc enim casu corpus de-  
scribit ellipsum immotam circulo finitimam  
(per cor. 1. prop. XIII) intereadam æqua-  
liter movetur in ellipsi simili & æquali  
circa umbilicum revolvante eum celeritate  
duplâ ejus quâ corpus idem in eadem el-  
lipse mobili fertur (446).

(g) \* Et propterea vis aut reciprocè.  
Ut  $A^{\frac{11}{9}}$ , vel  $A^{\frac{1}{3}}$ , vel directè aut  $A^6$ ,  
vel  $A^{11}$ . Est enim  $A^{\frac{16}{9}-3} = A^{-\frac{11}{9}} =$   
 $\frac{1}{A^{\frac{11}{9}}}$ , &  $A^{\frac{2}{3}-3} = \frac{1}{A^{\frac{1}{3}}}$  &  $A^{2-3} = A^{-1}$   
&  $A^{16-3} = A^{13}$ .

(h) \* Ideoque  $A^{\frac{nn}{mm}-3}$  erit æqualis  
 $A^{\frac{29523}{14641}}$ . Erit enim in hac hypothesi  
 $\frac{nn}{mm} = \frac{14400}{14641}$ , &  $\frac{nn}{mm} - 3 = \frac{14400}{14641} - 3 = \frac{29523}{14641}$ .  
Est autem  $\frac{29523}{14641} = 2 + \frac{241}{14641} = 2 + \frac{4}{243}$ ,  
proximè; nam  $241 \times 243 = 58563$ , &  $4 \times$   
 $14641 = 58564$ ; decrevit igitur vis cen-  
tripeta in ratione paulò majore quam du-  
plicatâ, sed quæ vicibus 59  $\frac{1}{3}$ , propius  
ad duplicatam quam ad triplicatam acce-  
dit.

erit æquale  $A - \frac{29523}{24643}$ ; & propterea vis centripeta reciprocè ut  $A^{\frac{29523}{24643}}$  seu reciprocè ut  $A^{\frac{4}{243}}$  proximè. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus 59 $\frac{1}{4}$  propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

*Corol. 2.* Hinc etiam si corpus, vi centripetâ quæ sit reciprocè ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illâ extraneâ orietur: &

contra. Ut si vis quâ corpus revolvitur in ellipsi sit ut  $\frac{1}{AA}$ , & vis extranea ablata ut  $cA$ , ideoque vis reliqua ut  $\frac{A - cA^4}{A^{cub.}}$ ; erit (in exemplis tertiis)  $b$  æqualis 1,  $m$  æqualis 1, &  $n$  æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apfides æqualis angulo graduum  $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ . (i) Ponamus vim illam extraneam esse 357. 45 partibus minorem quam vis altera quâ corpus revolvitur

dit, differentia enim inter 2, &  $2 + \frac{4}{243}$ , est  $\frac{4}{243}$ ; differentia verò inter 3 &  $2 + \frac{4}{243}$  est  $1 - \frac{4}{243} = \frac{239}{243}$ . Porro  $\frac{239}{243}$  est ad  $\frac{4}{243}$  seu 239 ad 4 ut 59  $\frac{1}{4}$  ad 1.

(i) \* Ponamus esse  $c \propto A$  ad  $\frac{1}{AA}$ ; hoc est, ponendo  $A$  vel  $T = 1$ ,  $c$  ad 1, ut 100 ad 35745, id est, ut 1 ad 357, 45, & erit  $c = \frac{100}{35745}$ ,  $1 - c = \frac{35645}{35745}$ ,  $1 - 4c = \frac{35345}{35745}$ ; unde  $\frac{1-c}{1-4c} = \frac{35645}{35345}$ , & hinc  $180 \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 180 \times \sqrt{\frac{35645}{35345}}$  &c.

454. Scholium. Hermannus in scholio ad prop. 25. lib. 1. *Phoronomia* formulam invenit quâ ex datâ vi centripetâ motus apsidum determinatur, & contrâ; hanc ipsam ex prius ostensis hic demonstrabimus. Iisdem igitur positis quæ in not. 449, sit vis centripeta in ellipseos mobilis loco quo vis p, seu (451) vis  $\frac{VFFA + VRGG - VRFF}{A}$

$= \frac{y}{A} = \frac{y}{z}$ , ponendo altitudinem  $A = z$ , & erit (450)  $= VFFz + VRGG - VRFF$ ; capiantur utrinque fluxiones & invenietur  $dy = VFFdz$ , & faciendo  $Qdz = dy$ , erit  $Q = VFF$ . Loco  $VFF$ , ipsius valor  $Q$  substituatur in superiori æquatione, & erit  $y = Qz + \frac{QRGG - QRFF}{FF} = Qz - QR + \frac{QRGG}{FF}$ .

Jam

# 360 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo- vitur in ellipfi, id est  $c$  esse  $\frac{100}{35745}$ , existente  $A$  vel  $T$  æquali 1 ;

TU COR- &  $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$  evadet  $180 \sqrt{\frac{1.5645}{35745}}$ , seu  $180.7623$ , id est ;

LIBER PRIMUS.  $180 \text{ gr. } 45 \text{ m. } 44 \text{ s.}$  Igitur corpus de apside summâ disce-

PROP. dens, motu angulari  $180 \text{ gr. } 45 \text{ m. } 44 \text{ s.}$  perveniet ad

XLV. apsidem imam, & hoc motu duplicato ad apsidem summam

PROBL. redibit : ideoque apsis summa singulis revolutionibus progredien-

XXXI. do conficiet  $1 \text{ gr. } 31 \text{ m. } 28 \text{ sec.}$  Apsis lunæ est duplo velo-  
cior circiter.

Haëtenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam scriptores qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares : & pari jure motus corporum viribus quibuscunque centra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolutè lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo describunt. Et eadem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus.

SEC.

Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, erit  $z = R = T$ ,

& proindè  $y = \frac{QTGG}{FF}$  & hinc  $G : G :$

$FF = y : QT$ , ac  $G : F = \sqrt{y} : \sqrt{QT}$  quæ est formula generalis quæsitæ. Nam fit,

exempli causâ, vis centripeta ut  $\frac{bz^m + cz^n}{z}$ ,

hoc est  $y = bz^m + cz^n$ , erit  $dy = Qdz$

$= mbz^{m-1}dz + ncz^{n-1}dz$ ; unde  $Q$

$= mbz^{m-1} + ncz^{n-1}$ , atque ità per

formulam inventam  $GG : FF = bz^m + cz^n :$

$Tmbz^{m-1} + Tncz^{n-1}$ , & ponendo

$z = T = 1$ ,  $GG : FF = b + c : mb + nc$ ,

ut in exemplis tertijs NEWTONUS invenit.

Sit nunc data ratio  $G$  ad  $F$ , nempe  $m$  ad  $n$ , & vis centripeta sit ut dignitas aliqua non data altitudinis  $z$ , illius dignitatis index dicatur  $p$ , sitque aded vis centripeta

ut  $z^p$ , & erit  $\frac{y}{z} = z^p$ , ac  $y = z^{p+1}$ ,  $dy =$

$Qdz = p + 1 \times z^p dz$ ,  $Q = p + 1 \times z^{p-1}$ . Hinc  $G^2 : F^2 = m^2 : n^2 = z^{p+1} : p + 1 \times Tz^{p+1}$ , hoc est, ponendo  $z = T = 1$ ,

$mm : nn = 1 : p + 1$ , atque ità  $\frac{nn}{mm} = p + 1$ ,

&  $\frac{nn}{mm} - 1 = p$ , ut in cor. 1. repertum est.

SECTIO X.

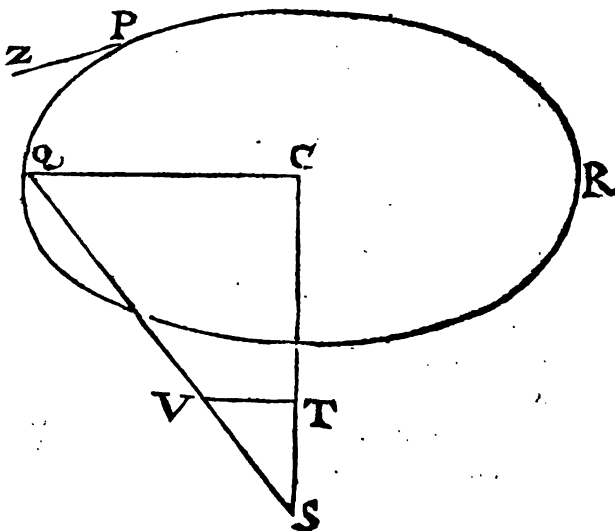
*De motu corporum in superficiebus datis, deque  
funipendulorum motu reciproco.*

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

*Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum  
plano quocunque in quo corpus revoluitur, & concessis figurarum cur-  
vilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, da-  
tâ cum velocitate, secundum rectam in plano illo datam egressi:*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XLVI.  
PROBL.  
XXXII.

Sit  $S$  centrum viri-  
um,  $SC$  distantia mini-  
ma centri hujus à pla-  
no dato,  $P$  corpus de  
loco  $P$  secundum re-  
ctam  $PZ$  egrediens,  $Q$   
corpus idem in traje-  
ctoriâ suâ revolvens, &  
 $PQR$  trajectory illa,  
in plano dato descrip-  
ta, quam invenire oportet.  
Jungantur  $CQ$ ,  
 $QS$ , & si in  $QS$  ca-  
piatur  $SV$  propor-



tionalis vi centripetæ quâ corpus trahitur versus centrum  $S$ ;  
& agatur  $VT$  quæ sit parallela  $CQ$ , & occurrat  $SC$  in  $T$ : Vis  
 $SV$  resolvetur (per legum corol. 2.) in vires  $ST$ ,  $TV$ ; quarum  
 $ST$  trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem,  
nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera  $TV$ ,  
agendo secundum positionem plani, trahit corpus directè ver-  
sus punctum  $C$  in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud  
in hoc plano perinde moveatur, ac si vis  $ST$  tolleretur, & cor-  
pus vi solâ  $TV$  revolveretur circa (\*) centrum  $C$  in spatio li-  
bero. Datâ autem vi centripetâ  $TV$  quâ corpus  $Q$  in spatio

(\*) \* 455. Circâ centrum  $C$  in spa- dens in loco quovis  $Q$ , dicatur  $Q$ , & erit  
tio libero. Vis centripeta  $SV$ , ad  $S$  ten- ob triangula  $SVT$ ,  $SQC$  similia.  $SQ$ :  
Tom. I. Z z Q C

# 362 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO- libero circa centrum datum  $C$  revolvitur, datur (per prop. XLII.)  
TU COR- tum trajectory  $PQR$ , quam corpus describit, tum locus  $Q$ , in  
FORUM. quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum denique  
LIBER velocitas corporis in loco illo  $Q$ ; & contra.  $Q. E. I.$   
PRIMES.

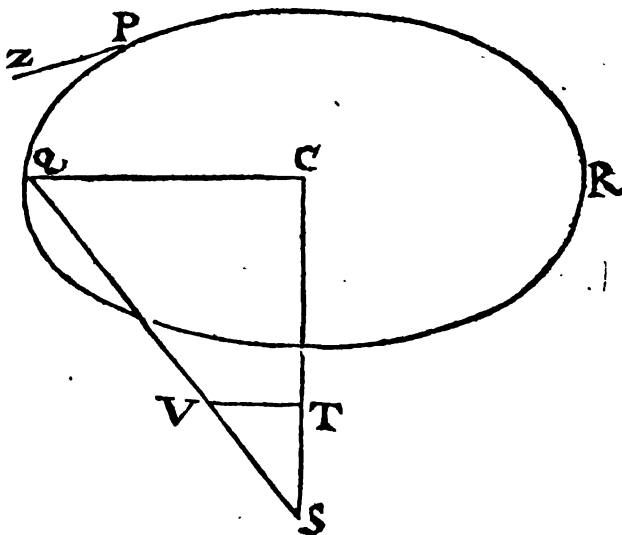
PROP.

## PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

XLVII.

THEOR. Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantia corporis à cen-  
XV. tro; corpora omnia in planis quibuscunque revolvuntia describunt  
ellipses, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque  
moventur in lineis rectis, ultrò citròque discurrendo, singulas eun-  
di & redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.

Nam, stantibus quæ  
in superiore propositio-  
ne, vis  $SV$ , quâ cor-  
pus  $Q$  in plano quovis  
 $PQR$  revolvens trahi-  
tur versus centrum  $S$ ,  
est ut distantia  $SQ$ ; at-  
que ideo ob proportio-  
nales  $SV$  &  $SQ$ ,  $TV$   
&  $CQ$ , vis  $TV$ , quâ  
corpus trahitur versus  
punctum  $C$  in orbis  
plano datum, est ut  
distantia  $CQ$ . Vires



igitur, quibus corpora in plano  $PQR$  versantia trahuntur ver-

$QC = SV$  seu  $Q:VT = \frac{Q \times QC}{SQ}$ . Sed  
ob angulum  $QCS$  rectum  $SQ^2 = QC^2$   
 $+ SC^2$ , ergò  $VT$ , seu vis ad  $C$  ten-  
dens in loco  $Q$ , five  $\frac{Q \times QC}{SQ}$  erit  
æqualis  $\frac{Q \times QC}{\sqrt{QC^2 + SC^2}}$ . Cum igitur da-  
ta sit  $SC$  distantia minima centri  $S$  à pla-  
no  $QPC$  positione dato, si loco  $SQ$  in  
quantitate  $Q$ , scribatur  $\sqrt{QC^2 + SC^2}$ ,  
obtinebitur valor vis. ad  $C$  tendentis in lo-

co  $Q$  ex solâ distantia  $QC$  & quantita-  
tibus datis compositus. Exempli causâ, si  
vis  $SV$ , ad  $S$  tendens in loco  $Q$  sit ut  
distantia  $SQ$ , erit  $VT$ , seu vis ad  $C$   
tendens in eodem loco  $Q$ , ut  $\frac{SQ \times QC}{SQ}$   
hoc est, ut  $QC$ . Si vis  $SV$  fuerit ut  
 $\frac{1}{SQ^2}$ , erit  $VT$ , ut  $\frac{QC}{SQ}$ , hoc est, ut  
 $\frac{QC}{QC^2 + SC^2 \times \sqrt{QC^2 + SC^2}}$ , & ita  
de cæteris suppositionibus.

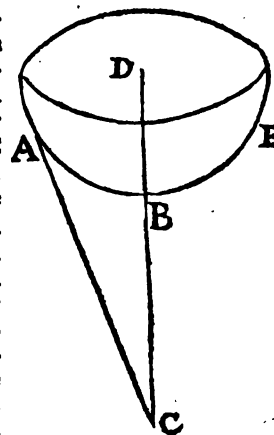
fus punctum  $C$ , sunt <sup>(1)</sup> pro ratione distantiarum æquales viribus DE MO-  
quibus corpora undiquaque trahuntur versus centrum  $S$ ; & prop- TU COR-  
terea corpora movebuntur iisdem temporibus, in iisdem figu- PORUM.  
ris; in plano quovis  $PQR$  circa punctum  $C$ , atque in spatiis LIBER  
liberis circa centrum  $S$ ; ideoque ( *per corol. 2. prop. X. & corol. PRIMUS.*  
2. prop. XXXVIII ) temporibus semper æqualibus, vel describent XLVII.  
ellipses in plano illo circa centrum  $C$ , vel periodos movendi ul- THEOR.  
trò citròque in lineis rectis per centrum  $C$  in plano illo ductis, x v.  
complebunt.  $Q. E. D.$

*Scholium.*

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficie-  
bus curvis. <sup>(m)</sup> Concipe lineas curvas in plano describi, dein  
circum axes quosvis datos per centrum virium transeuntes revol-  
vi, & eâ revolutione superficies curvas describere; tum corpo-  
ra ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo re-  
periantur. Si corpora illa obliquè ascendendo & descendendo  
currant ultrò citròque; peragentur eorum motus in planis per  
axem transeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revo-  
lu-

(1) \* *Sunt pro ratione distantiarum &c.*  
Hoc est vires absolutæ ad  $S$  &  $C$  tendentes  
sunt æquales, ita ut si alicubi fuerit  $PC = QS$ ,  
vis in loco  $P$  ad  $C$  tendens æqualis erit  
vi in loco  $Q$  ad  $S$  tendenti. Nam vis  
quæ corpus in loco  $Q$  ad  $C$  trahitur,  
est ad vim quæ versùs  $S$  urgetur, ut  $QC$   
ad  $QS$ , & vis in loco  $Q$  ad  $C$  tendens est  
etiam ad vim in loco  $P$  ad idem centrum  
 $C$  urgentem ut  $QC$  ac  $PC$  seu  $QS$ ;  
quare vis in loco  $Q$  ad  $S$  tendens æqua-  
lis est vi ad  $C$  tendenti in loco  $P$ ; Cor-  
pora verò quæ moventur viribus centripe-  
tis quæ sunt ut distantia, temporibus sem-  
per æqualibus ellipses quasvis, utut inæ-  
quales, describent circa sua centra ( *per*  
*Prop. X* ). Si autem ellipseos  $PQR$  quam  
corpus in plano describit, latitudo in in-  
finitum minuat, describet corpus rectam  
aliquam  $QCR$ , motu accelerato ad cen-  
trum  $C$  accedens, & motu retardato ab  
ipso recedens usque ad  $R$ , deindè rursum  
ex loco  $R$ , ad centrum  $C$  recidens, &  
itâ circa centrum  $C$ , ultrò citròque oscil-  
labitur.

(m) \* *Concipe li-  
neam curvam  $AB$  in  
plano  $ACED$  de-  
scriptam circa axem  
datum  $DBC$  per  
centrum virium  $C$   
transeuntem revolvi  
& eâ revolutione  
superficiem curvam  
 $AEB$  describi, tùm  
corpus aliquod  $A$  itâ  
moveri, ut illius  
centrum in hac su-  
perficie perpetuò re-  
periat. Si corpus  
illud obliquè def-  
cendendo & ascen-  
dendo per  $ABE$ ,  $EBA$  currat ultrò citro-  
que peragetur illius motus in plano  $ACED$   
per axem  $CD$  transeunte, atque aded in  
lineâ curvâ  $ABE$ , cum ( *ex hyp.* ) nulla  
adfit vis quæ corpus à plano illo cogat de-  
flectere; si perfcies  $AEB$  perfectè terfâ  
ac polita supponitur.*





DE Mo- lutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Iſtis igitur in caſi-  
TU COR- bus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP.

XLVIII.

THEOR.

XVI.

### PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

*Si rota globo extrinſecus ad angulos <sup>(n)</sup> rectos inſiſtat, & more rota-  
rum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo iti-  
neris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum,  
ex quo globum tetigit, confecit, ( quodque cycloidem vel epicy-  
cloidem nominare licet ) erit ad duplicatum ſinum verſus arcus  
dimidii qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut ſum-  
ma diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.*

### PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

*Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat & revol-  
vendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei  
quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum  
tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii  
qui globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia  
diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.*

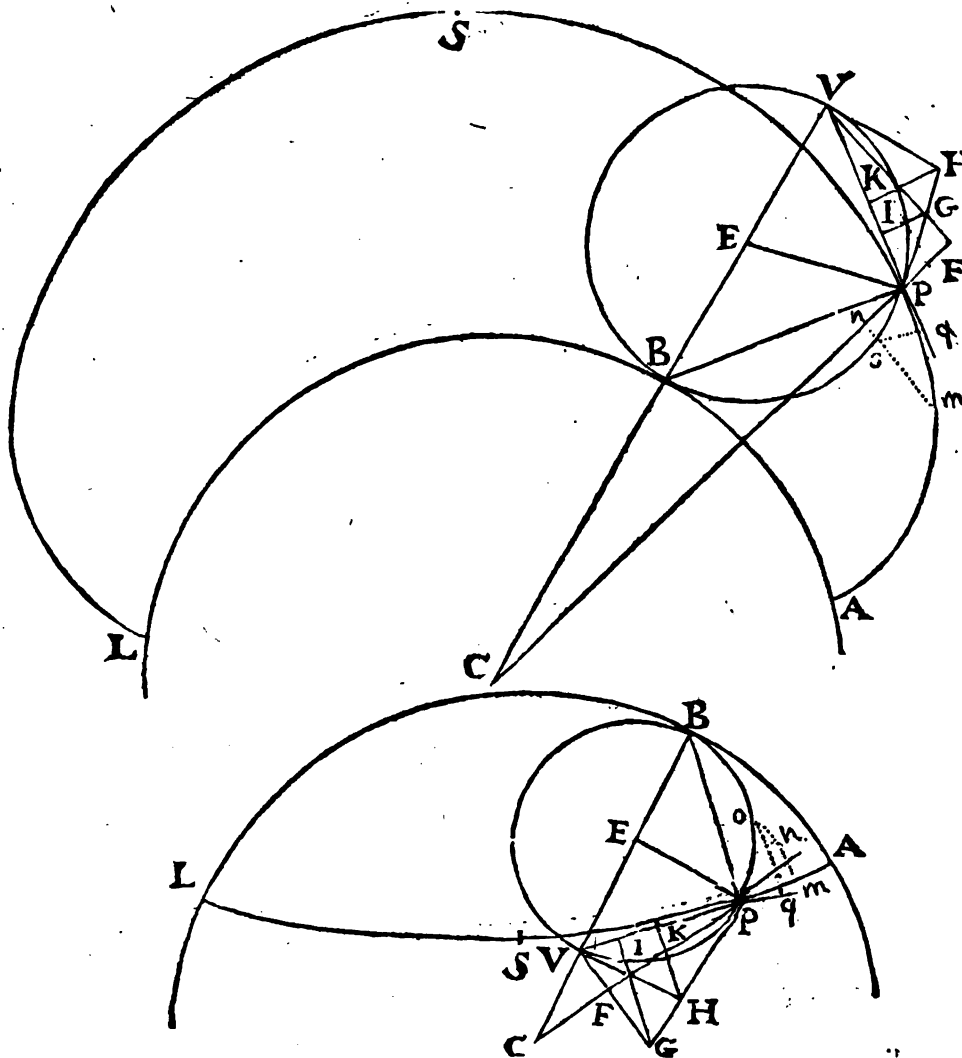
Sit  $ABL$  globus,  $C$  centrum ejus,  $BPV$  rota ei inſiſtens,  $E$  centrum rotæ,  $B$  punctum contactus, &  $P$  punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo  $ABL$  ab  $A$  per  $B$  verſus  $L$ , & inter eundem ita revolvi ut arcus  $AB$ ,  $PB$  ſibi invicem ſemper æquentur, atque punctum illud  $P$  in perimetro rotæ datum interea deſcribere viam curvilineam  $AP$ . Sit autem  $AP$  via tota curvilinea deſcripta ex quo rota globum tetigit in  $A$ , & erit viæ hujus longitudo  $AP$  ad duplum ſinum verſum arcus  $\frac{1}{2}PB$ , ut  $2CE$  ( $^{\circ}$ ) ad  $CB$ . Nam recta  $CE$  (ſi opus eſt producta) occurrat rotæ in  $V$ , junganturque  $CP$ ,  $BP$ ,  $EP$ ,  $VP$ , & in  $CP$  productam demittatur normalis  $VF$ . Tangant  $PH$ ,  $VH$  circulum in  $P$  &  $V$  concurrentes in  $H$ , ſecetque  $PH$ , ipſam  $VF$  in  $G$ , & ad  $VP$  demittantur normales  $GI$ ,  $HK$ . Centro item  $C$  & intervallo quovis deſcribatur circulus  $nom$  ſecans rectam  $CP$  in  $n$ , rotæ peri-

(n) \* Ad angulos rectos, id eſt, ita ut planum rotæ productum per centrum globi tranſeat, illudque proinde in duo hæmiſpheria diviſat ac circulum maximum in ejus ſuperficie ſignet.

(o) \* Ut  $2CE$  ad  $CB$ . Hoc eſt, ob  $2CE = 2CB + 2BE$ , vel  $2CE = 2CB - 2BE$ , ut ſumma vel differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 363

metrum  $BP$  in  $o$ , & viam curvilineam  $AP$  in  $m$ ; centroque  $V$  & De Mo-  
intervallo  $Vo$  describatur circulus secans  $VP$  productam in  $q$ . TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XLIX.  
THEOR.  
XVII.



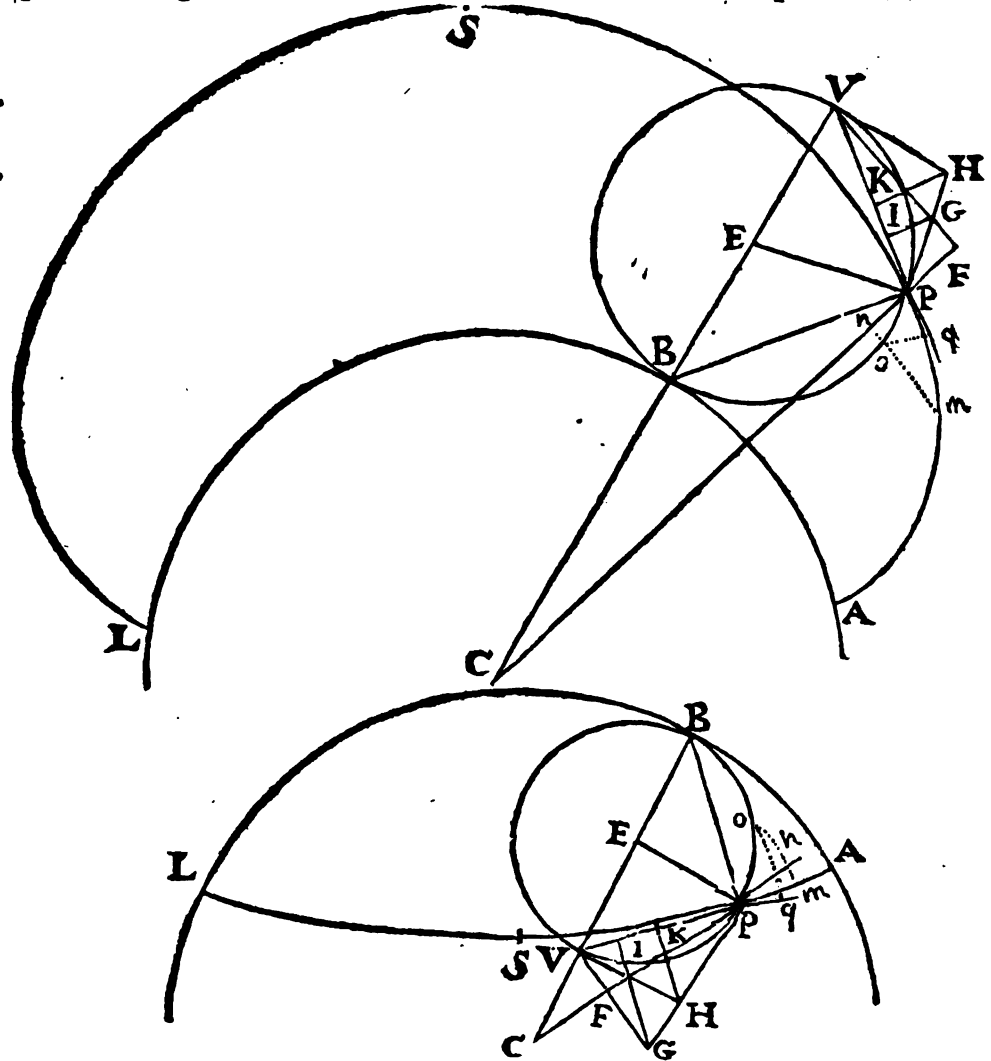
Quoniam rota eundo semper revolvitur circa punctum con-  
tactus  $B$ , (p) manifestum est quod recta  $BP$  perpendicularis est ad

(p) \* *Manifestum est quod recta  $BP$  &c.*  
Nam evidens est in circuli  $BPV$  revolutio-  
ne, centro  $B$  radio  $BP$  singulis tempusculis  
describi arcum circuli seu incrementum na-  
scens curvæ  $AP$ , ad quod proinde radius  $BP$

perpendicularis est, sed ob angulum  $VPB$   
in semicirculo rectum, linea  $VP$  in eum ra-  
dium  $BP$  est perpendicularis, ergo linea  
 $VP$  est Tangens ejus arcus nascentis seu in-  
crementi curvæ  $AP$ , ideoque ipsius curvæ  
 $AP$ .  
Z z 3

DE MOTU CORP. lineam illam curvam  $AP$  quam rotæ punctum  $P$  describit, atque ideo quod recta  $VP$  tanget hanc curvam in puncto  $P$ .

LIBER  
PRIMUS,  
PROP.  
XLIX.  
THEOR.  
XVII.



Circuli  $n o m$  radius sensim auctus vel diminutus æquetur tandem distantiae  $CP$ ; & ob (q) similitudinem figuræ evanescen-

(q) \* *Es ob similitudinem figuræ evanescen-* Hinc verò anguli ad verticem oppositi  $n P o$  &  $G P F$ ,  $O P m$  &  $G P I$ , erunt æqua-  
les, atque aded ob angulos  $o n P$  &  $G F P$ ,  
 $o q P$  &  $G I P$ , rectos, proindeque æqua-  
les, figura evanescens  $P n o m q$ , similis  
erit figuræ  $P F G V I$ .

les, atque aded ob angulos  $o n P$  &  $G F P$ ,  
 $o q P$  &  $G I P$ , rectos, proindeque æqua-  
les, figura evanescens  $P n o m q$ , similis  
erit figuræ  $P F G V I$ .

tis  $P n o m q$  & figurâ  $P F G V I$ , ratio ultima lineolarum evanescentium  $P m$ ,  $P n$ ,  $P o$ ,  $P q$ , id (1) est, ratio mutationum momentanearum curvæ  $A P$ , rectæ  $C P$ , arcus circularis  $B P$ , ac rectæ  $V P$ , eadem erit quæ linearum  $P V$ ,  $P F$ ,  $P G$ ,  $P I$  respectivè. Cum autem  $V F$  ad  $C F$  &  $V H$  ad  $C V$  perpendiculares sint, angulique (1)  $H V G$ ,  $V C F$  propterea æquales; & (1) angulus  $V H G$  (ob angulos quadrilateri  $H V E P$  ad  $V$  &  $P$  rectos) angulo  $C E P$  æqualis est, similia erunt triangula  $V H G$ ,  $C E P$ ; & inde fiet ut  $E P$  ad  $C E$  ita  $H G$  ad  $H V$  (2) seu  $H P$  & ita (2)  $K I$  ad  $K P$ , & (3) compositè vel divisim ut  $C B$  ad  $C E$  ita  $P I$  ad  $P K$ , & duplicatis consequentibus ut  $C B$  ad 2  $C E$  ita (2)  $P I$  ad  $P V$ , atque ita  $P q$  ad  $P m$ . Est (2) igitur decrementum lineæ  $V P$ , id est, incrementum lineæ  $B V - V P$  ad incrementum lineæ curvæ  $A P$  in datâ ratione  $C B$  ad 2  $C E$ , & propterea (per corol. lem. 1 v.) longitudines  $B V - V P$  &  $A P$ , incrementis (b) illis

(1) \* Id est ratio mutationum momentanearum, seu incrementorum vel decrementorum nascentium curvæ  $A P$ , quæ ex  $A m$  fit  $A P$ , rectæ  $C P$ , quæ ex  $C m$  fit  $C P$  arcus circularis  $B P$ , qui ex  $B o$  fit  $B P$ , ac rectæ  $V P$ , quæ ex  $V q$  fit  $V P$ .

(1) \* Angulique  $H V G$ ,  $V C F$ , propterea æquales. Ob angulum  $V F C$  rectum, summa angulorum  $F C V$ ,  $C V F$  æqualis est angulo recto  $C V H$ , quare detracto communi angulo  $C V F$ , fit angulus  $F C V = F V H$  five  $H V G$ .

(1) \* Et angulus  $V H G$  &c. Tangentes  $H V$ ,  $H P$  cum radiis  $E V$ ,  $E P$  angulos rectos constituunt, adeoque quadrilateri  $H V E P$ , anguli duo reliqui  $V H P$  five  $V H G$  &  $V E P$ , sunt simul æquales duobus rectis, quare cum sint quoque anguli  $V E P$ ,  $C E P$  simul duobus rectis æquales, liquet angulum  $C E P$ , æqualem esse angulo  $V H G$ , & in secunda figura cum anguli quadrilateri  $V H P E$  in  $V$  &  $P$  sint recti, reliqui anguli  $V H P$ ,  $V E P$  æquales sunt duobus rectis, sed etiam  $V H P$  &  $V H G$  sunt æquales duobus rectis, ergo detracto communi  $V H P$ ,  $V E P$  five  $C E P$  est æqualis  $V H G$ .

(u) \* Ad  $H V$ , seu  $H P$ . Nam circuli tangentes  $H V$ ,  $H P$  sunt æquales.

(x) \* Et ita  $K I$  ad  $K P$ . Etenim ob

parallelas  $H K$ ,  $G I$ , est  $H G : H P = K I : K P$ .

(y) \* Et compositè vel divisim. Cum sit  $E P$ , seu  $B E : C E = K I : K P$ , si rota globo intrinsecus insistat, erit compositè  $B E + C E$ , seu  $C P : C E = K I + K P$ ; seu  $P I : P K$ . Si verò rota globo extrinsecus insistat, erit divisim  $C E - B E$ , seu  $C B : C E = K P - K I$ , seu  $P I : P K$ .

(2) \* Ità  $P I$  ad  $P V$ . Nam in triangulo  $P H V$  isoscele, est  $P K = K V$ , adeoque 2  $P K = P V$ .

(2) \* Est igitur decrementum lineæ  $V P$  &c. Dum arcus  $A m$  crescit fitque  $A P$ , recta  $V q$  decrescit & fit  $V P$ ; quare est  $P m$  incrementum curvæ  $A m$  seu  $A P$ . &  $P q$  decrementum rectæ  $V P$ . Cum autem sit  $B V$  circuli diameter constans, quantum decrescit  $V P$ , tantum crescit differentia  $B V - V P$ , unde decrementum lineæ  $V P$ , æquale est incremento lineæ  $B V - V P$ . Est igitur incrementum lineæ  $B V - V P$ , ad incrementum lineæ curvæ  $A P$  &c.

(b) \* Incrementis illis genitæ &c. Cum punctum  $P$  est in  $A$ , punctum  $B$  est etiam in  $A$ , fitque  $V P = V B$ , adeoque  $B V - V P = 0$ . Simul ergò crescere incipiunt lineæ  $B V - V P$  &  $A P$ , & quoniam in datâ ratione crescunt, erit semper  $B V - V P$  ad  $A P$  in datâ illâ ratione  $C B$  ad  $C E$ .

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.

XLIX.

THEOR.

XVII.

# 368 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo. genitæ, sunt in eâdem ratione. Sed, (c) existente  $BV$  radio,  
TU COR. est  $VP$  cosinus anguli  $BVP$  seu  $\frac{1}{2} BEP$ , ideoque  $BV - VP$   
PORUM. sinus versus est ejusdem anguli; & propterea in hac rotâ, cujus  
LIBER radius est  $\frac{1}{2} BV$ , erit  $BV - VP$  duplus sinus versus arcus  $\frac{1}{2} BP$ .  
PRIMUS. Ergo  $AP$  est ad duplum sinum versus arcus  $\frac{1}{2} BP$  ut  $2 CE$   
PROP. ad  $CB$ . Q. E. D.

THEOR. Lineam autem  $AP$  in propositione priore cycloidem extra  
XVII. globum, alteram in posteriore cycloidem intra globum distinc-  
tionis gratiâ nominabimus.

Corol. 1. Hinc si (d) describatur cyclois integra  $ASL$  & bi-  
secetur ea in  $S$ , erit longitudo partis  $PS$  ad longitudinem  $VP$   
(quæ duplus est sinus anguli  $VBP$ , existente  $EB$  radio) ut  $2 CE$   
ad  $CB$ , atque ideo in ratione datâ.

Corol. 2. Et (e) longitudo semiperimetri cycloidis  $AS$   
æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad rotæ diametrum  $BV$  ut  
 $2 CE$  ad  $CB$ .

(c) 456. Sed existente  $BV$  radio &c. Ob  
angulum  $BPV$  rectum, est  $BV$  ad  $VP$  ut  
sinus totus ad sinum anguli  $VBP$  qui com-  
plementum est anguli  $BVP$  ad rectum. Qua-  
rè existente  $BV$  radio, est  $VP$  cosinus anguli  
 $BVP$  æqualis dimidio angulo ad centrum  
 $BEP$ . Est autem cujusvis anguli sinus versus  
æqualis differentie inter radium & cosinum  
ejusdem anguli, ergo existente  $BV$  radio,  
erit  $BV - VP$  sinus versus anguli  $\frac{1}{2} BEP$ ;  
& quoniam in diversis circularibus æqualium an-  
gulorum sinus omnes sunt ut circularum ra-  
dii, in hac rotâ cujus radius est  $\frac{1}{2} BV$ , erit  
 $BV - VP$ , duplus sinus versus arcus  $\frac{1}{2} BP$ .

(d) 457. Hinc si describatur &c. Ubi pun-  
ctum  $P$  pervenit ad  $S$ , arcus  $BP$  semicir-  
culo, arcus  $\frac{1}{2} BP$  quadrantis, & sinus ver-  
sus arcus  $\frac{1}{2} BP$  radio, æquales sunt. Qua-  
rè in hoc casu curva  $AS$ , est ad diame-  
trum  $BV$ , ut  $2 CE$ , ad  $CB$ ; cumque in  
loco quovis  $P$ , sit etiam curva  $AP$ , ad  
duplum sinum versus  $\frac{1}{2} BP$ , seu ad  $BV - VP$   
(456) ut  $2 CE$  ad  $CB$ , erit  $AS$ :  
 $BV = AP$ :  $BV - VP$ , & hinc  $AS = AP$ ,  
seu  $PS$ :  $BV - BV + VP$ , seu  $VP = AS$ :  
 $BV = 2 CE$ :  $CB$ .

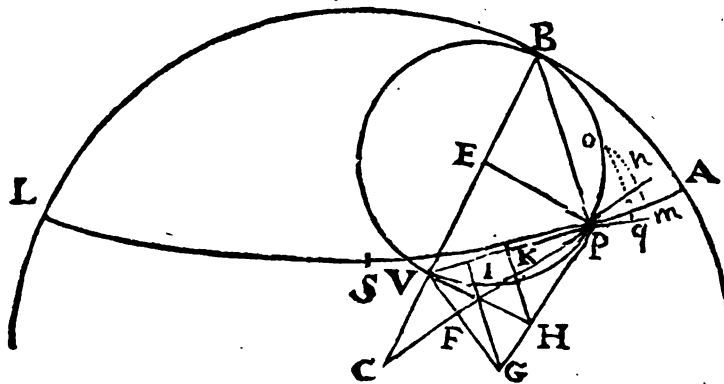
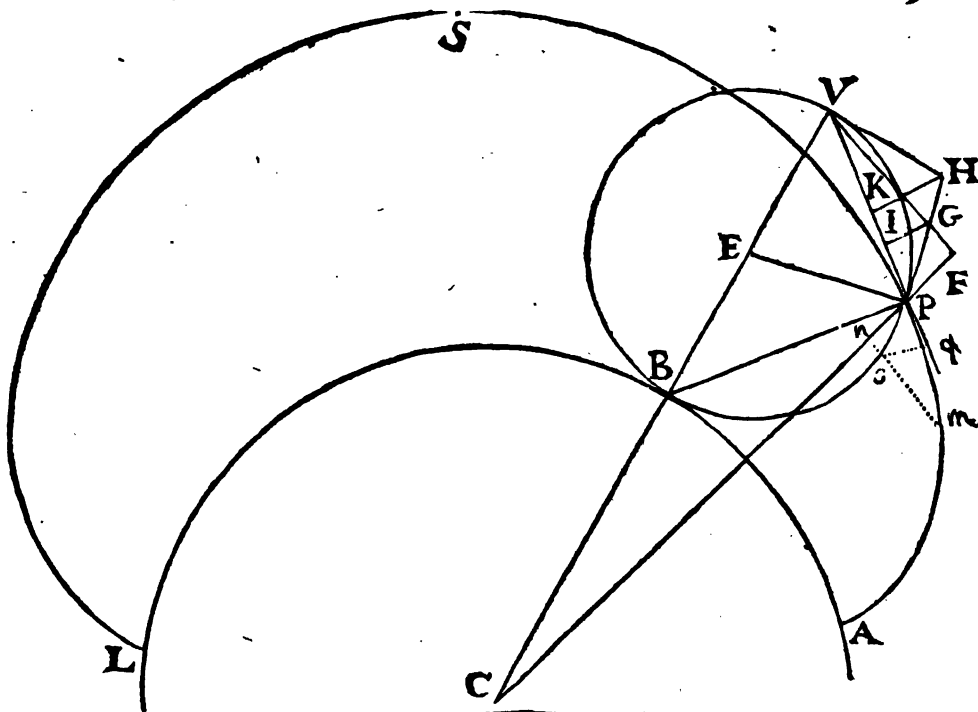
(e) \* Et longitudo semiperimetri. Patet  
per notam superiorem.

458. Coroll. 3. Recta  $CS$  cycloidi per-  
pendicularis est, & recta  $CA$  eam tan-  
git in  $A$ . Est enim  $BP$  ad cycloidem per-  
pendicularis, &  $VP$  tangens ejus in  $P$ ,  
at ubi punctum  $P$  pervenit in  $S$ ,  $BP$  fit  
 $BS$ , seu  $BV$ , & ubi punctum  $B$  est in  
 $A$ ,  $VP$  coincidit cum  $VB$ .

459. Coroll. 4. Si per punctum quodvis  
 $P$  agatur  $PV$  cycloidem tangens in  $P$ , & ad  
eam erigatur perpendicularum  $PB$  globo oc-  
currens in  $B$ , jungaturque  $CB$  tangentem  
secans in  $V$ , erit  $BV$  rotæ diameter.

460. Coroll. 5. Ex genesi cycloidis li-  
quet arcum globi  $AB$ , æqualem esse ar-  
cui rotæ  $BP$ .

461. Coroll. 6. Si rotæ diameter  $BV$   
æqualis constituatur semidiametro globi  
 $CB$ , cyclois intra globum evadet linea re-  
cta per centrum globi  $C$  transiens. Nam  
in hoc casu  $CS = 0$ , &  $2 CE = CB$ ; unde  
punctum cycloidis medium  $S$ , cum cen-  
tro coincidit, & quia (457)  $AS$ :  $BV =$   
 $2 CE$ :  $CB$ , erit  $AS = BV = CB$  atque  
adeo est  $AS$  linea recta per centrum  $C$  tran-  
siens, nam si curva esset, major foret semi-  
diametro  $CB$ . 462.



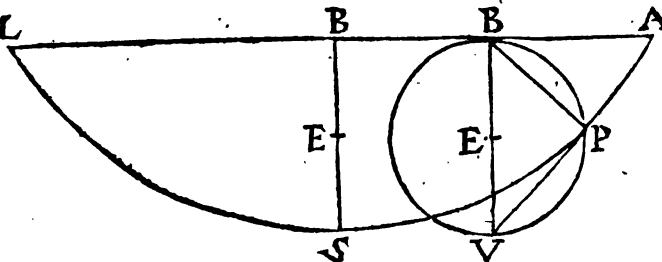
461. Coroll. 7. Si globi diameter  
augeatur in infinitum, mutabitur  
ejus superficies sphaerica in pla-  
num, fietque  $ABL$  linea recta, &  
 $BE$  finita manente seu nulla respec-  
tu infinitae lineae  $CB$ , erit  $CE$   
 $= CB$ , adeoque cyclois tam intra  
quam extra globum abibit in cy-  
cloidem vulgarem, quae describitur  
revolutione rotae in linea recta  
progredientis, cumque sit semper  
(457)  $AP:BV-VP=2CE:CB=2:1$ ,  
erit  $AP=2 \times (BV-VP)$ , sed  $BV-VP$ ,  
est duplus sinus versus arcus  $\frac{1}{2} BP$ , exis-  
tente  $BE$  radio (456). Ergo in cycloi-  
de vulgari  $AP$  aequatur quadruplicato fi-

Tom. I.

nui verso dimidii arcus  $BP$ , inter pla-  
num  $ABL$  & punctum describens  $P$  in-  
tercepti; Hinc etiam erit  $AS=4BE=$   
 $2BS=2BV$ ; Est enim  $BE$  sinus versus  
quadrantis.

A 2 a

PRO.



DE MO-  
TU COR-

**PORUM.**

**LIBER**

**PRIMUS.**

**PROP. L.**

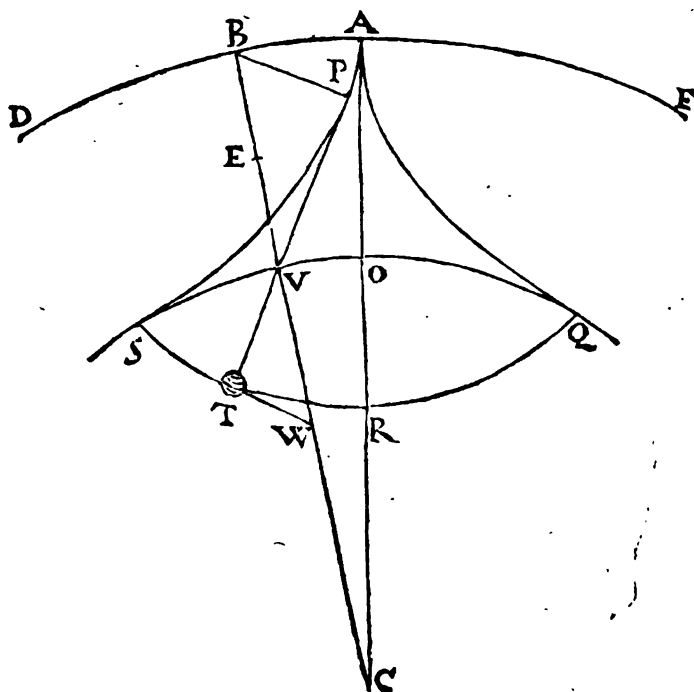
**PROBL.**

### XXIII.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

*Facere ut corpus pendulum oscilletur in cycloide datâ.*

PROB. XXXIII. Intra globum  $QVS$ , centro  $C$  descriptum, detur cyclois  $QRS$  bisecta in  $R$  & punctis suis extremis  $Q$  &  $S$  superficiei globi hinc inde occurrens. Agatur  $CR$  bifecans arcum  $QS$



in  $O$ , & producatur ea ad  $A$ , ut sit  $CA$  ad  $CO$  ut  $CO$  ad  $CR$ . Centro  $C$  intervallo  $CA$  describatur globus exterior  $DAF$ , & intra hunc globum à rotâ, cujus diameter fit  $AO$ , describantur duæ semicycloides  $AQ$ ,  $AS$ , quæ <sup>(f)</sup> globum in-

(f) \* *Qua globum interiorem tangant in Q & S, & globo exteriori occurrant in A. Probandum semicycloides descriptas per motum rotæ (cujus diameter est AO) ex A proficiscentē terminari ad superficiem globi interioris in punctis extre-*

mis Q & S cycloidis Q R S datæ. Producantur itaque lineæ C Q, CS ad F & D, eritque  $FQ = DS = AO$ , & super Diametros F Q, D S intelligantur descriptæ rotæ quarum motu fiunt semicycloides, dicaturque P punctum rotæ semi-

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 371

teriolem tangant in  $Q$  &  $S$  & globo exteriori occurrant in  $A$ . DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP. L.  
PROBL.  
XXXIII.  
 $A$  puncto illo  $A$ , filo  $APT$  longitudinem  $AR$  æquante, pen-  
deat corpus  $T$ , & ita intra semicycloides  $AQ$ ,  $AS$  oscilletur, ut  
quoties pendulum digreditur à perpendiculo  $AR$ , filum parte sui  
superiore  $AP$  applicetur ad semicycloidem illam  $APS$  versus  
quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur,  
parteque reliquâ  $PT$  cui semicyclois nondum obicitur, proten-  
datur in lineam rectam; & pondus  $T$  oscillabitur in cyloide da-  
tâ  $QRS$ . *Q. E. F.*

Occurrat enim filum  $PT$  tum cycloidi  $QRS$  in  $T$ , tum cir-  
culo  $QOS$  in  $V$ , agaturque  $CV$ ; & ad fili partem rectam  
 $PT$ , è punctis extremis  $P$  ac  $T$ , erigantur perpendicula  $BP$ ,  
 $TW$ , occurrentia rectæ  $CV$  in  $B$  &  $W$ . Patet, (g) ex con-  
structione & genesi similium figurarum  $AS$ ,  $SR$ , (h) perpendicula  
illa  $PB$ ,  $TW$  abscindere de  $CV$  longitudes  $VB$ ,  $VW$  ro-  
tarum

cycloides describens; Liqueat arcus  $OQ$   
&  $AF$ ,  $OS$  &  $AD$  esse proportionales  
radiis  $CO$ ,  $CA$  live (per const.) radiis  
 $CR$ ,  $CO$  & divisum rotarum Diametris  
 $OR$ ,  $AO$ , ideoque (per nat. circuli) se-  
micircumferentiis rotarum super has Dia-  
metros descriptarum; Sed cum  $Q$  &  $S$  sint  
puncta extrema cycloidis datæ  $QRS$  &  
 $CO$  arcum  $QS$  bisecet, erunt arcus  $OQ$   
&  $OS$  æquales semicircumferentiæ rotæ  
super Diametrum  $OR$  descriptæ (460)  
ergo etiam arcus  $AF$  &  $AD$  æquales  
erunt semicircumferentiæ rotæ super Dia-  
metrum  $AO$  descriptæ, sed arcus  $FP$  aut  $DP$   
est semper æqualis arcui  $AF$  aut  $AD$   
(460); erunt ergo arcus  $FP$  &  $DP$  se-  
micirculi, &  $P$  cadet in extremitatibus  
 $Q$  &  $S$ . Diametrorum  $FQ$ ,  $DS$ , sed  
ubi  $P$  semicircumferentiam rotæ percur-  
rit semicyclois est descripta, ergo semi-  
cycloides descriptæ per motum rotæ ex  $A$   
proficiscientis terminantur in  $Q$  &  $S$ . *Q. E. D.*

(g) 463. Patet ex constructione & ge-  
nesi similium figurarum  $AS$ ,  $SR$ ; Figu-  
ræ illæ dicuntur similes quia  $AO$  diameter  
rotæ quâ describuntur semicycloides  $AS$ ,  
 $AQ$  est ad globi  $DAF$  radium  $AC$   
ut diameter  $OR$  rotæ quâ describitur cy-

clois  $QRS$  ad globi  $QOS$  radium  $OC$ ,  
(per const.) unde manifestum quod cy-  
cloides  $AS$ ,  $AQ$ ,  $QR$ , quæ eodem mo-  
do describuntur ac determinantur sunt in-  
ter se similes.

(h) \* Perpendicula illa &c. 1°. Pro-  
bandum quod perpendiculum  $PB$  abscindat  
de  $CV$  longitudinem  $VB$  rotæ Diametro  $OA$   
æqualem. Fingatur rotam ita positam ut  
ejus punctum Cycloidem describens sit in  
 $P$ , liquet, ex constructione, eam hujus ro-  
tæ Diametrum quæ in hoc casu globo est  
perpendicularis, & quæ, si producat, tran-  
sire debet per centrum  $C$ , utrinque termi-  
nari debere in superficie globorum; Jam  
verò (per Demonstr. Prop. XLVIII. XLIX.)  
Tangens Cycloidis transit semper per unam  
extremitatem ejus Diametri rotæ quæ glo-  
bo est perpendicularis & perpendiculum in  
Tangentem è puncto contactus erectum  
transit per alteram ejusdem Diametri ex-  
tremitatem, ergo, cum sit (ex const.) fi-  
lum  $PT$  Tangens Cycloidis in puncto  $P$ ,  
&  $PB$  perpendiculum in illud, intersec-  
tiones  $V$  &  $B$  linearum  $PT$  &  $PB$  cum glo-  
bis  $QOS$  &  $DAF$  erunt extremitates  
ejus Diametri rotæ quæ si producat  
transit per centrum  $C$ , ergo ducta  $CV$ ,  
per-



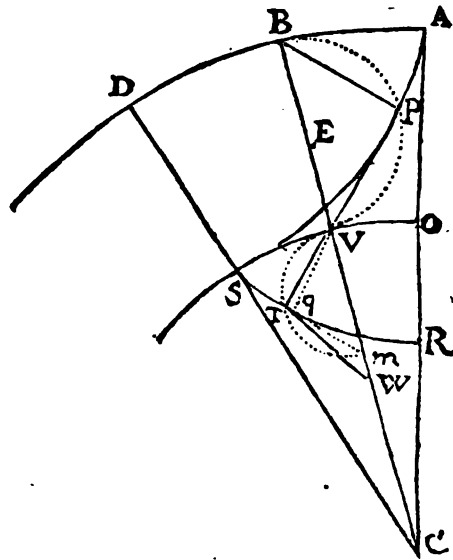
DE MO  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP. L.  
PROBL.  
XXXIII.

tarum diametris  $OA$ ,  $OR$  æquales. Est (i) igitur  $TP$  ad  $VP$  (duplum finum anguli  $VBP$  existente  $\frac{1}{2} BV$  radio) ut

perpendicularum  $PB$  abscindet de  $CV$  longitudinem  $VB$  rotæ Diametro  $OA$  æqualem. Q. E. 1<sup>o</sup>. D.

2<sup>o</sup>. Perpendicularum  $TW$  abscindit de  $CV$  longitudinem  $VW$  rotæ diametro  $OR$  æqualem. Fingatur rota Cycloidem  $SRQ$  describens ita posita, ut ejus Diameter globo  $SOQ$  insistens sit in lineâ  $CV$  globumque tangat in  $V$ , dicatur in altera extremitas ejus Diametri, & dicatur  $q$  punctum illius rotæ Cycloidem describens: Arcus  $VS$  erit æqualis arcui  $Vq$  (460) utque totus arcus  $SO$  est æqualis arcui  $Vm$ , erit  $VO = qm$ , &  $qm$  est mensura dupli anguli  $CVq$ ; Sit verò rota describens cycloidem  $APS$  posita sicut in priore casu, hoc est, ejus Diameter globo  $DAF$  insistens sit in productione lineæ  $CV$ , erit arcus  $BA$  æqualis arcui  $BP$  (460) & est  $BP$  mensura dupli anguli  $BVP$ ; Est autem arcus  $VO$  five  $qm$  ad  $BA$  five  $BP$ , ut  $CO$  ad  $CA$  ideoque ut Diametri rotarum  $OR$  ad  $AO$  (iuxta const.), arcus verò diversorum circulorum qui sunt inter se ut suorum circulorum Diametri, sunt similes ideoque ejusdem numeri graduum; ergo angulus  $CVq$  est æqualis angulo  $BVP$ , quoniam arcus qui sunt mensura eorum dupli, sunt ejusdem numeri graduum, ideoque illi anguli  $CVq$ ,  $BVP$  sunt per verticem oppositi &  $PVq$  est linea recta; itaque, filum  $PV$  productum ad  $T$  transit tam per extremitatem  $V$  Diametri rotæ globo insistentis quam per ejus rotæ punctum  $q$  Cycloidem describens; Ergo (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) filum  $PT$  est perpendiculare in Tangentem Cycloidis in puncto illo  $q$  five  $T$ , ideoque ex constructione linea  $TW$  erit ea ipsa Tangens, & (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) transibit per extremitatem  $m$  Diametri rotæ quæ globo insistit, hoc est Diametri jacentis in lineâ  $CV$ , ergo  $TW$  abscindet de  $CV$  longitudinem rotæ Diametro  $OR$  æqualem. Q. E. 2<sup>o</sup>. D.

\* Idem aliter. Ex puncto  $V$  ducatur ad senicycloidem  $SR$  perpendicularis  $Vq$ , &  $qm$  tangens in  $q$  radio  $CV$  occurrens in  $m$ , erit (459)  $Vm = OR$ . Descriptis rotis  $BPV$ ,  $Vqm$ ,



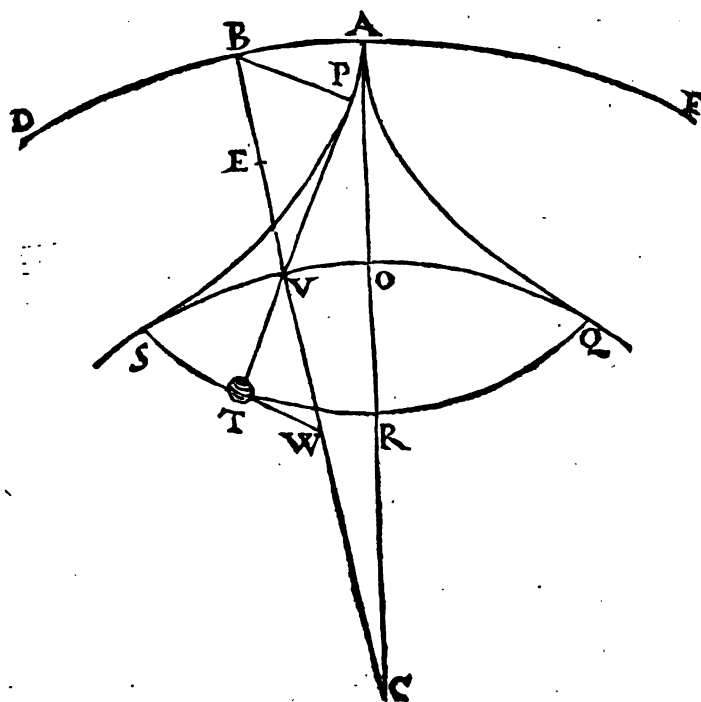
erit angulus  $BVP$ , æqualis arcui  $BP$ , ad diametrum  $BV$ , applicato seu  $\frac{BP}{BV}$ , hoc est, ob arcum  $BA = BP$  (460) &  $BV = AO$ , angulus  $BVP = \frac{BA}{AO}$ . Simili ratione, cum sit arcus  $Vq$  æqualis arcui  $SV$ , & semirota  $Vqm$  æqualis arcui  $SO$ , erit arcus  $qm = VO$ , adeoque angulus  $qVm = \frac{VO}{OR}$ . Quare angulus  $BVP : qVm = \frac{BA}{AO} : \frac{VO}{OR} = OR \times BA : AO \times VO$ ; sed  $BA : VO = CA : CO = AO : OR$  (per constr.) adeoque  $OR \times BA = AO \times VO$ , Ergo angulus  $BVP = qVm$ . Cum igitur anguli  $BVP$ ,  $TVW$  ad verticem oppositi sint etiam æquales, perpendicularis  $Vq$  coincidit cum  $VT$ , tangens  $qm$  cum  $TW$ , &  $Vm$  cum  $VW$ , undè tandem est  $Vm = OR = VW$ .

(i)\* Est igitur etc. Ob trianguia  $VPB$ ,  $VTW$  similia  $TV : VP = VW : VB$ , & componendo  $TP : VP = BW : BV$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 373

*BW* ad *BV*, seu *AO + OR* ad *AO*, id est ( cum sint *CA* ad *CO*, *CO* ad *CR* & divisim *AO* ad *OR* proportionales ) ut *CA + CO* ad *CA*, vel, si bisecetur *BV* in *E*, ut 2 *CE* ad *CB*. Proinde ( per corol. 1. prop. XLIX. ) longitudo partis rectæ fili *PT* æquatur semper cycloidis arcui *PS*, & filum totum *APT* æquatur semper cycloidis arcui dimidio *APS*, hoc est

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP. L.  
PROBL.  
XXXIII.



( per corol. 2. prop. XLIX. ) longitudini *AR*. Et propterea vicissim si filum manet semper æquale longitudini *AR* movebitur punctum *T* in cycloide datâ *QRS*. Q. E. D.

*Corol.* Filum *AR* æquatur semicycloidi *AS*, ideoque ad globi exterioris semidiametrum *AC* eandem habet rationem quam similis illi semicyclois *SR* habet ad globi interioris semidiametrum *CO*.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP.

L I.

THEOR.

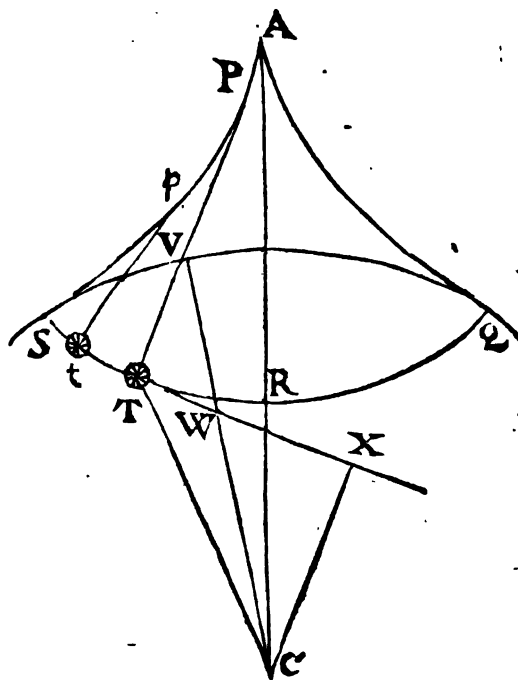
XVIII.

## PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

*Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum C sit in locis singulis ut distantia loci cujusque à centro, & hac solâ vi agente corpus T oscilletur (modo jam descripto) in perimetro cycloidis QRS: dico quod oscillationum utcumque inæqualium æqualia erunt tempora.*

Nam in cycloidis tangentem  $TW$  infinitè productam cadat perpendiculum  $CX$  & jungatur  $CT$ . Quoniam vis centripeta quâ corpus  $T$  impellitur versus  $C$  est ut distantia  $CT$ , atque hæc (per legum corol. 2.) resolvitur in partes  $CX$ ,  $TX$ , quarum  $CX$  impellendo corpus directè à  $P$  distendit filum  $PT$  & per ejus resistantiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera  $TX$ , urgendo corpus transversim seu versus  $X$  directè accelerat motum ejus in cycloide; manifestum est

quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo  $TX$ , id (1) est, ob datas  $CV$ ,  $WV$  iisque proportionales  $TX$ ,  $TW$ , ut longitudo  $TW$ , hoc est (per corol. 1. prop. XLIX.) ut longitudo arcus cycloidis  $TR$ . Pendulis igitur duobus  $APT$ ,  $ApT$  de perpendiculo  $AR$  inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi  $TR$ , &  $tR$ . Sunt (m) autem partes sub



(1) \* Id est ob datas. Ob triangu-  
la  $WXC$ ,  $WTV$  similia, est  $CW : WV$   
 $= WX : TW$ , & componendo  $CV : WV$   
 $= TX : TW$ ; quare ob datas  $CV$ ,  $WV$ ,  
data est ratio  $TX$  ad  $TW$ , id est  $TX$   
est ut  $TW$ .

(m) 464. Sunt autem arcuum  $tR$ ,  
 $TR$  partes sub initio eodem tempuscu-  
lo descriptæ ut accelerationes, hoc est,  
ut toti arcus  $tR$ ,  $TR$  sub initio de-  
scribendi & propterea divisum, partes ar-  
cium

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 375

initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendiculum  $AR$ . Cumque vicissim ascensus perpendiculorum de loco infimo  $R$ , per eisdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis à viribus iisdem à quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eisdem arcus factorum æquales esse, atque ideo temporibus æqualibus fieri, & propterea, cum cycloidis partes duæ  $RS$  &  $RQ$  ad utrumque perpendiculi latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent.

*Q. E. D.*

*Corol.* Vis (<sup>n</sup>) quæ corpus  $T$  in loco quovis  $T$  acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad totum corporis ejusdem pondus in loco

cum  $tR$ ,  $TR$  quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes his partibus proportionales sunt etiam ut toti arcus  $tR$ ,  $TR$ , & sic deinceps. Quoniam autem velocitates dato tempore genitæ sunt ut accelerationum summæ, quæ ob datam accelerationum rationem sunt in eadem ratione datæ arcuum  $tR$ ,  $TR$ , liquet accelerationes atque idem velocitates genitas & partes his velocitatibus descriptas, partesque describendas semper esse ut sunt toti arcus  $tR$ ,  $TR$ , & propterea si pars arcus  $TR$  describenda evanescat, quod fit dum corpus pendulum  $T$  pervenit ad  $R$ , pars arcus  $tR$ , simul evanescet, ob datam harum partium rationem. Unde corpora duo oscillantia  $t$  &  $T$  ex punctis  $t$  &  $T$  simul demissa, simul pervenient in  $R$ .

(<sup>n</sup>) \* Vis quæ corpus  $T$  in loco quovis  $T$  acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad vim quæ in loco altissimo  $S$ , vel  $Q$  acceleratur vel retardatur in cycloide, ut arcus  $TR$ , ad arcum  $SR$ , (ex demonstr. prop. 51. (sed vis quæ corpus in loco  $S$  vel  $Q$  acceleratur vel retardatur in cycloide, est vis tota quæ ad centrum  $C$ , perpendiculariter urgetur; radius enim  $CS$  cycloidem  $SR$  tangit in  $S$ , (458) adeoque directio vis in loco  $S$  in cycloide coincidit cum directione vis rectæ trahentis ad centrum  $C$ .)

465. Coroll. 1. Si centro  $A$  radio  $AR$  circulus describatur, cycloidis  $SRQ$  arcus nascens in loco infimo  $R$  cum circuli illius arcu nascente coincidit. Quare si longitudo penduli  $AR$  magna sit, eodem prope modo in exiguis circuli arcubus

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROPOSITIONES.  
LI.  
THEOREMA.  
XVIII.

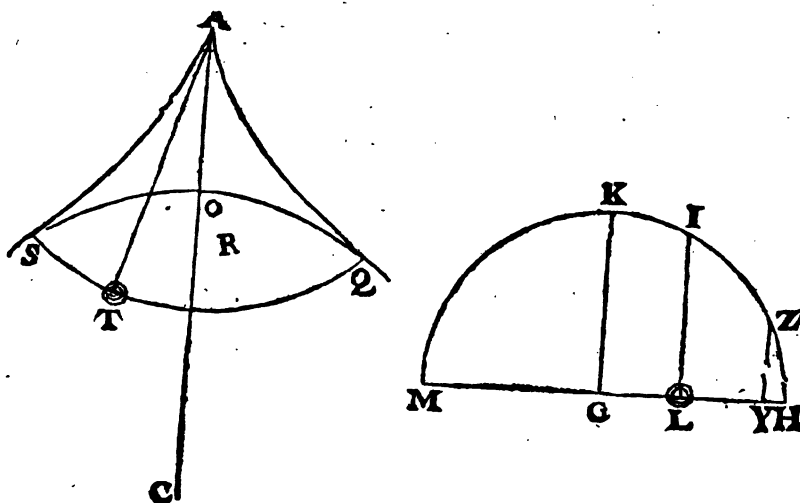


PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

*Definire & velocitates pendulorum in locis singulis, & tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.*

Centro quovis  $G$ , intervallo  $GH$  cycloidis arcum  $RS$  æquan-

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LII.  
PROBL.  
XXXIV.



te, describe semicirculum  $HKM$  semidiametro  $GK$  bisectum. Et si vis centripeta, distantis locorum à centro proportionalis, tendat ad centrum  $G$ , sitque ea in perimetro  $HIK$  æqualis vi centripetæ in perimetro globi  $QOS$  ad ipsius centrum tendenti; & ( $^{\circ}$ ) eodem tempore quo pendulum  $T$  dimittitur è loco

co dato  $H$ , & agatur  $AC$  rectæ  $HG$  parallela lineam  $LD$  secans in  $C$ , de loco  $H$  cadant corpora duo, quorum alterum vi constante  $HA$ , alterum vi variabili  $HB$  vel  $LD$  urgeatur, sintque illorum velocitates in eodem loco  $L$ ,  $V$ ,  $v$ , & erit  $V^2$  ad  $v^2$ , ut area  $HACL$  ad aream  $HBDL$ , (*per prop. 39. & not. 408.*) id est  $V^2 : v^2 = HL \times HA : HL \times BH + DL$   $\frac{2}{2} = 2HA : BH + DL$ . Et quo-

niam in centro  $G$  evanescit  $DL$  erit in illo centro  $V^2 : v^2 = 2HA : BH$ , &  $V : v = \sqrt{2HA} : \sqrt{BH}$ . Quare datis in loco  $H$  viribus  $HA$ ,  $HB$ , & velocitate in loco quovis  $L$  vel  $G$  vi constante acquisita, datur velocitas vi variabili in eodem loco acquisita.

( $^{\circ}$ ) \* Et eodem tempore. Id est, simul demittantur ex locis  $S$  &  $H$  corpora  $T$  &  $L$ .

DE MO- TU COR- PORUM. LIBER PRIMUS. PRO P. LII. PROBL. XXXIV. loco supremo  $S$ , cadat corpus aliquod  $L$  ab  $H$  ad  $G$ : quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio & spatiis describendis  $TR$ ,  $LG$  semper proportionales, atque ideo, si æquantur  $TR$  &  $LG$ , æquales in locis  $T$  &  $L$ ; patet corpora illa describere spatia  $ST$ ,  $HL$  æqualia sub initio, (<sup>p</sup>) ideoque subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare (*per prop. xxxviii.*) tempus quo corpus describit arcum  $ST$  est ad tempus oscillationis unius, ut arcus  $HI$ , tempus quo corpus  $H$  perveniet ad  $L$ , ad semiperipheriam  $HKM$ , tempus quo corpus  $H$  perveniet ad  $M$ . Et velocitas corporis penduli in loco  $T$  est ad velocitatem ipsius in loco infimo  $R$ , (hoc est, velocitas corporis  $H$  in loco  $L$  ad velocitatem ejus in loco  $G$ , seu (<sup>q</sup>) incrementum momentaneum lineæ  $HL$  ad incrementum momentaneum lineæ  $HG$ , arcubus  $HI$ ,  $HK$  æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata  $LI$  ad radium  $GK$ , five ut (<sup>r</sup>)  $\sqrt{SR^2 - TR^2}$  ad  $SR$ . Unde (<sup>f</sup>) cum, in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus

(p) \* Ideoque subinde pergere æqualiter urgetur & æqualia spatia iisdem nempe temporibus describere.

(q) \* Seu incrementum momentaneum &c. Nam incrementa illa sunt spatia eodem tempusculo uniformiter descripta, quæ proinde sunt ut velocitates in locis  $L$  &  $G$ , quibus describuntur, arcus autem  $HI$ ,  $HK$  quæ tempora exhibent, crescunt ut tempora, hoc est, æquabili fluxu.

(r) Sive ut  $\sqrt{SR^2 - TR^2}$  ad  $SR$ . Est enim, ex naturâ circuli  $LI^2 = ML \times LH = GH^2 - GL^2 = SR^2 - TR^2$ , adeoque  $LI = \sqrt{SR^2 - TR^2}$ , &  $LI : GK = \sqrt{SR^2 - TR^2} : GK$ , seu  $SR$ .

(f) 468. Unde cum &c. Datâ vi centripetâ in perimetro globi  $QOS$  vel in  $H$  datur tum velocitas quâ corpus hæc vi sollicitatum describit circulum  $HKM$ , tum tempus quo semiperipheriam  $HKM$  percurrit (201) hoc est, tempus unius oscil-

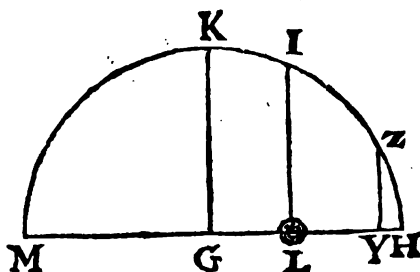
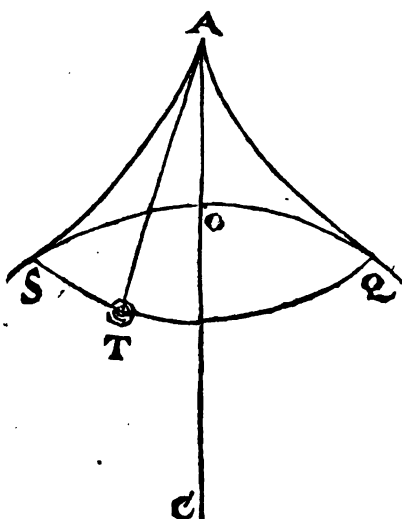
lationis integræ; & contrâ, Dato tempore unius oscillationis integræ, datur vis centripeta in  $H$  vel  $S$  (202). Porro dato arcu  $ST$ , vel rectâ æquali  $HL$ , datur  $LI$  sinus arcus  $HI$ , & hinc datur hic arcus, adeoque & ratio  $HI$ , ad  $HKM$ , id est, ratio temporis quo percurritur  $HL$  vel  $ST$  ad tempus datum oscillationis integræ. Et contrâ dato tempore quo describitur  $HL$  vel  $ST$ , datur arcus  $HI$ , & hinc datur illius sinus rectus  $LI$  sinusque versus  $HL$  vel arcus  $ST$ . Datâ vi centripetâ in  $S$  vel  $H$ , datur velocitas corporis de loco  $S$  vel  $H$  in  $R$  vel  $G$  pervenientis (467); hinc verò datur velocitas corporis in loco quovis dato  $T$  vel  $L$ ; cum (*ex demonstr.*) velocitas in  $R$  vel  $G$ , sit ad velocitatem in  $T$  vel  $L$ , ut  $GK$  ad  $LI$ , seu ut  $SR$  ad  $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ . Dato tempore quo describitur  $ST$  vel  $HL$ , datur arcus  $HI$ , & illius sinus rectus  $LI$ , adeoque & velocitas in  $L$  & contrâ.

Si

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 379

bus arcus totis oscillationum arcubus proportionales; habentur, De Mo-  
ex datis temporibus, & velocitates & arcus descripti in oscilla- TU COR-  
PORUM.

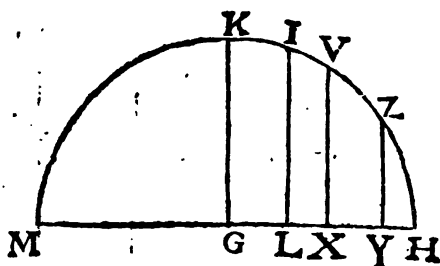
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LII.  
PROBL.  
XXXIV.



tionibus universis. Quæ erant primò invenienda.

Oscillantur jam funipendula corpora in cycloidibus diversis  
intra globos diversos, quorum (†) diversæ sunt etiam vires ab-  
solutæ, descriptis: & si vis absoluta globi cujuscvis QOS di-  
catur

Si corpus non ex summo loco S, vel H;  
sed ex alio quovis t, (vid. fig. prop. 31.)  
vel Y, demittatur, erit tempus quo ex  
loco t pervenit ad R, vel ex Y ad G, æ-  
quale tempori dato dimidiæ oscillationis.  
Hinc dato arcu T t, vel rectâ æquali Y L,  
dabitur & tempus quo describitur & velo-  
citas in T vel L, ac contrâ. Nam cum  
sint arcus seu spatia quævis æqualibus tem-  
poribus descripta in oscillationibus inæqua-  
libus, ut arcus vel spatia integris oscilla-  
tionibus percurra (464), dato arcu T t,  
vel spatio Y L, dabitur spatium H X, quod  
corpus de loco H demissum describit eo-  
dem tempore quo aliud corpus percurrit  
T t vel Y L; dato spatio H X, datur arc-  
us H V, & illius sinus rectus X V, & hinc  
datur tempus quo describitur H X & Y L,  
&c velocitas in X; cuiusque sit velocitas in



X, in corpore de loco H, cadente ad  
velocitatem in L, in corpore de loco Y  
cadente ut H G, ad Y G (464) dabitur  
velocitas in L, vel T; Et contrâ.

(†) 469. Quorum diversa sunt &c. Ex cen-  
tris C, c, per omne circumquaque spatium

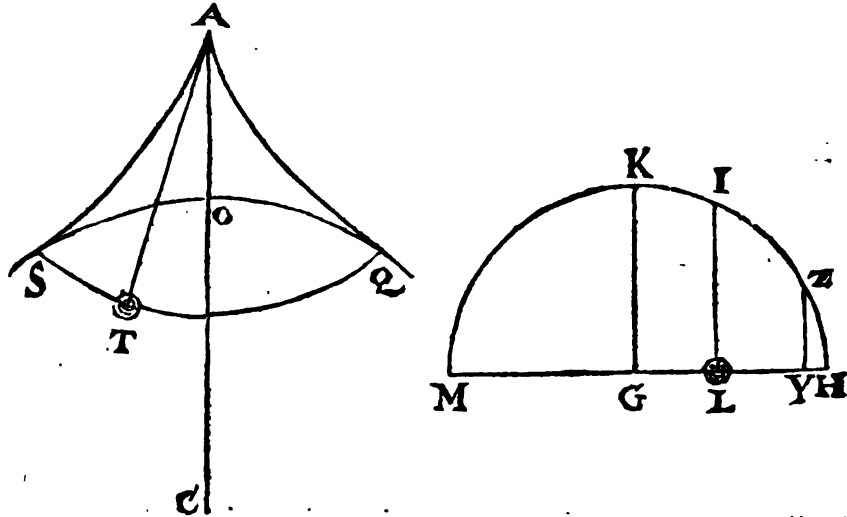
Bbb 2



# 380. PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo catur V, vis acceleratrix quâ pendulum urgetur in circumfe-  
TU COR- rentiâ hujus globi, ubi incipit directè versùs centrum ejus mo-  
PORUM. veri, erit ut distantia corporis penduli à centro illo & vis ab-

LIBER  
PRIMUS.  
PROB.  
L I I.  
PROBL.  
XXXIV.



soluta globi conjunctim, hoc est, ut  $CO \times V$ . Itaque (°) li-  
neola HY, quæ sit ut hæc vis acceleratrix  $CO \times V$ , describe-  
tur dato tempore; & , si (x) erigatur normalis YZ circumferen-

diffundi intelligantur vires centripetæ in ra-  
tione distantiarum à suis respectivè centris  
crescentes, vires accelera-  
trices in locis datis æquæ alti-  
tis A, a, dicantur A, a; in  
aliis locis æquæ altis D, d,  
dicantur V, u, & erit (ex  
hyp.)  $V : A = CD : CA =$   
 $cd : ca = v : a$ , adeoque  
 $V : v = A : a$ , sed evanes-  
centibus distantis, CD, c  
d, sunt V, v, vires absolu-  
tæ (per definitionem VI.  
Newt.) quare vires absolu-  
tæ sunt in ratione virium ac-  
celeratricium in locis æquæ  
altis. Jam verò vires acce-  
leratrices in locis quibuscumque O, o, dican-  
tur B, b, erit (ex Dem.)

$$V : v = A : a$$

$$\text{Et per hyp. } CO : CA = B : A$$

$$CA \text{ vel } ca : Co = a : b$$

$$\text{Ergò ex æquo } V \times CO : v \times Co = B : b, \text{ id}$$

est, vis acceleratrix in loco quovis O, est ut  
distantia à centro & vis absoluta conjunctim.

(u) \* Itaque lineola nascens HY, quæ  
sit ut hæc vis acceleratrix  $CO \times V$ , de-  
scribetur dato tempore. Nam quadratum  
temporis quo describitur nascens HY,

$$\text{est ut } \frac{HY}{CO \times V} \text{ (per cor. V. lem. X.)}$$

Undè cum data sit ratio HY ad  $CO \times V$  (ex  
hyp.), quadratum temporis adeoque &  
tempus ipsum quo describitur HY datum  
erit.

(x) \* Es si erigatur normalis &c. Arcus  
HZ erit ad semiperipheriam HKM, ut  
tempus datum quo describitur HY, ad tem-  
pus unius oscillationis (prop. 38.) quod  
proinde erit ut semiperipheria HKM,  
seu ut radius GH directè, & arcus HZ  
inversè. Est autem arcus nascens HZ  
æqualis chordæ HZ (per Lem. 7.) adeo-  
que (ex naturâ circuli)  $HZ = HY \times MH$   
 $= 2 GH \times HY$ ; Quare cum sit HY ut

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 381

tiæ occurrens in  $Z$ , arcus nascens  $HZ$  denotabit datum il-  
 lud tempus. Est autem arcus hic nascens  $HZ$  in subduplicatâ ratione rectanguli  $GHY$ , ideoque  $\sqrt{GH \times CO \times V}$ .  
 Unde tempus oscillationis integræ in cycloide  $QRS$  ( cum sit ut semiperipheria  $HKM$ , quæ oscillationem illam integram denotat, directè; utque arcus  $HZ$ , qui datum tempus similiter denotat, inversè ) fiet ut  $GH$  directè &  $\sqrt{GH \times CO \times V}$  inversè, hoc est, ob æquales  $GH$  &  $SR$ , ut  $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$ , five

( per corol. prop. L. ) ut  $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$ . Itaque oscillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuscunque cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione longitudinis fili directè, & subduplicatâ ratione distantiae inter punctum suspensionis & centrum globi inversè, & subduplicatâ ratione vis absolutæ globi etiam inversè. *Q. E. I.*

*Corol. 1.* Hinc etiam oscillantium, cadentium & revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si rotæ, quâ cyclois integra globum describitur, diameter constituitur æqualis semidiametro globi cyclois (  $\gamma$  ) evadet linea recta per centrum globi transiens, & oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hâc rectâ. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est (  $z$  ) enim hoc tempus ( per casum secundum ) ad tempus semioscillationis in cycloide quâvis  $QRS$  ut 1 ad  $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$ .

Co-

$CO \times V$ , erit  $HZ^2$  ut  $2 GH \times CO \times V$ ; seu, ut  $GH \times CO \times V$ ; & hinc tempus unius oscillationis ut  $\sqrt{\frac{GH}{CO \times V}}$  =  $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$  =  $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$  ob  $GH = SR$ , &  $\frac{AR}{AC} = \frac{SR}{CO}$ , ( per cor. prop. 50. )

(  $\gamma$  ) \* Cyclois evadet linea recta ( 461 );  
 (  $z$  ) \* Est enim hoc tempus &c. Quoniam cycloide  $QRS$  in rectam mutatâ fit  $AR = AC$ , erit ( per cas. 2. ) tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale ( prop. 38. ) per circuli quadrantem ut  $\sqrt{\frac{1}{V}}$ . Unde erit

Bbb 3 hoc

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

P R O P.

L I I.

PROBL.  
XXXIV.

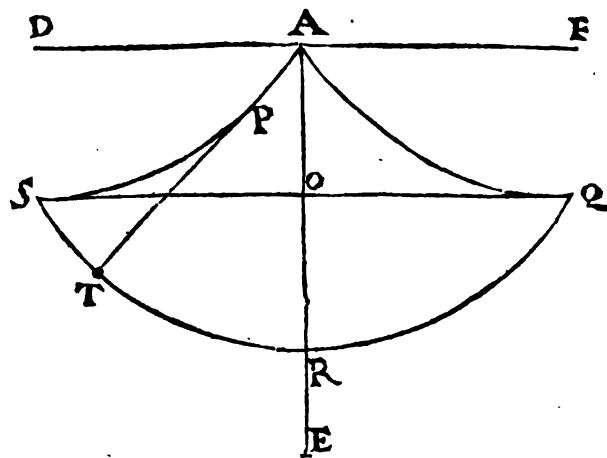
Corol. 2. Hinc etiam confectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de cycloide vulgari adinvenierunt. Nam (a) si globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus superficies sphaerica in planum; visque (b) centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & cyclois nostra abibit in cycloidem vulgi. Isto (c) autem in casu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus rotæ inter idem inter planum & punctum describens; ut invenit *Wrennus*; Et (d) pendulum inter duas ejusmodi cycloides in simili & æquali cycloide temporibus

hoc tempus ad tempus semiofcillationis in cycloide quavis Q R S in rectam non mutat ut  $\sqrt{\frac{1}{V}}$  ad  $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$ , hoc eff, ob datam V, ut 1 ad  $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$ . Quare dato tempore unius ofcillationis in cycloide quavis Q R S circa centrum C, dabitur tempus descensus de loco quovis ad idem centrum, & tempus huic æquale per quadrantem circuli ad quamvis distantiam descripti.

(a) \* Nam si globi diameter augeatur (462).

(b) \* Visque centripeta distantie infinitæ (quæ proinde non mutatur) proportionalis non mutabitur, & quoniam centro in infinitum abeunte, radii qui antè erant ad superficiem sphaericam perpendiculares fiunt paralleli; vis centripeta aget uniformiter secundum lineas huic superfici in planum mutatae perpendiculares.

(c) \* Isto autem in casu (462).



(d) \* Et pendulum inter duas &c. Erit enim in hoc casu diameter rotæ O R quæ describitur cyclois Q R S, æqualis diametro A O rotæ quæ describitur cyclois APS (462.), quare semicycloides S R, A S similes erunt & æquales.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 383

ribus æqualibus oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed (\*) DE Mo- & descensus gravium, tempore oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit. TU COR- PORUM.

Aptantur autem propositiones à nobis demonstratæ ad veram LIBER PRIMUS. PROPOSITIONES. constitutionem terræ, quatenus rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum, perimetris suis infixorum, cycloides extra globum; & pendula inferius in fodinis & cavernis terræ suspensa, in cycloidibus intra globos oscillari debent, PROBL. XXXIV. ut oscillationes omnes evadant isochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decrescit in progressu à superficie terræ, sursum quidem in duplicatâ ratione distantiarum à centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

P R O-

470. (e) \* Sed & descensus &c. Erit in hoc casu tempus unius oscillationis ad tempus descensus perpendicularis per diametrum rotæ A O vel O R, seu per dimidiam penduli longitudinem ut peripheria circuli ad ejus diametrum. Nam iisdem positis quæ (in prop. 52. & ejus cor. 2º.) erit tempus unius oscillationis æquale tempori semirevolutionis in circulo H K M (prop. 38.). Est autem (200.) tempus semirevolutionis in circulo H K M, ad tempus descensus uniformiter accelerati per dimidiam radii H G, ut peripheria circuli ad diametrum. Quare cum sit  $\frac{1}{2} H G = \frac{1}{2} S R = \frac{1}{2} A R = O R$  (462.) erit tempus unius oscillationis ad tempus descensus perpendicularis per dimidiam penduli longitudinem ut circuli peripheria ad diametrum.

471. Coroll. Dimidia penduli longitudo A O, est ad spatium A E descensu perpendiculari descriptum unius oscillationis tempore in duplicatâ ratione diametri ad peripheriam circuli. Sit enim tempus unius oscillationis t, diameter circuli ad peripheriam, ut d, ad p, & erit (469) tempus descensus perpendicularis per spatium A O =  $\frac{dt}{p}$ ; sed (27)  $\frac{ddt}{pp} : t :: A O : A E$ , ergo A O : A E = d d : p p. *Hugenius*, cui pendulorum theoria debetur,

prop. 25. part. 4. horologii oscillatorii, longitudinem penduli singulas oscillationes uno minuto secundo absolventis invenit pedum Paris. 3. & linearum  $8 \frac{1}{2}$ , hoc est,

linearum  $\frac{881}{2}$ , & hinc dimidia penduli longitudo erat linearum  $\frac{881}{4} = 220.25$ .

Est autem diameter circuli ad peripheriam ut 113, ad 355, quam proximè, & proinde quadratum diametri ad quadratum peripheriæ ut 12769. ad 126025; quare spatium uno minuto secundo descriptum à corpore gravi perpendiculariter cadente, est pedum Paris. 15.  $\frac{1}{12}$ , quam proximè.

472. Coroll. Quoniam propè telluris superficiem gravium directio horizonti ad sensum perpendicularis est gravitasque constans, atque adeò V gravitas absoluta, & A C distantia à centro telluris datæ sunt, in pendulis in cycloidem vulgarem aut etiam in exiguos arcus circuli (465) excurrentibus, tempus unius oscillationis (per cas. 2. prop. 52.) erit ut  $\sqrt{A R}$ , id est, in ratione subduplicatâ longitudinis penduli & proinde longitudo penduli in ratione duplicatâ temporis unius oscillationis.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP.

LIII.

PROBL.

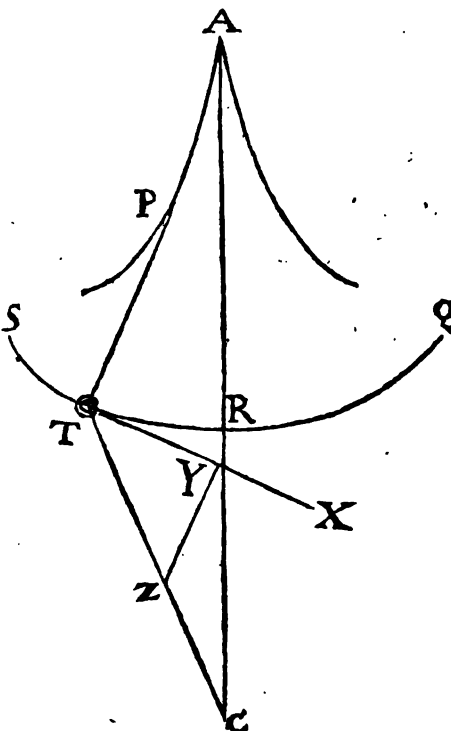
XXXV.

## PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

*Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oscillationes semper isochronas peragent.*

Oscilletur corpus  $T$  in curvâ quâvis lineâ  $STRQ$ , cujus axis sit  $AR$  transiens per virium centrum  $C$ . Agatur  $TX$  quæ curvam illam in corporis loco  $T$  quovis contingat, inque hac tangente  $TX$  capiatur  $TY$  æqualis arcui  $TR$ . Nam <sup>(f)</sup> longitudo arcus illius & figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innotescit. De puncto  $Y$  educatur recta  $YZ$  tangenti perpendicularis. Agatur  $CT$  perpendiculari illi occurrentes in  $Z$ , & erit vis centripeta proportionalis rectæ  $TZ$ . *Q.E.I.*

Nam si vis, quâ corpus trahitur de  $T$  versus  $C$ , exponatur

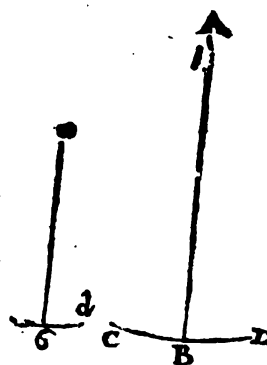


473. *Corol.* Numeri oscillationum isochronarum à duobus pendulis  $AB$ ,  $ab$ , eodem tempore confectarum sunt reciproce ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt. Nam si pendulum  $ab$ , bis oscilletur eo tempore quo  $AB$  semel;  $ab$ , quatuor oscillationes absolvet, dum  $AB$  duas conficit, & ita porro in aliis suppositionibus, ut patet. Quare numeri oscillationum isochronarum eodem tempore à duobus pendulis confectarum sunt in ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversè (472).

474. *Corroll.* Hinc si tempus unius oscillationis penduli  $AB$ , sit  $L$ , tempus unius oscillationis penduli  $ab$ , sit  $t$ , numeri oscillationum eodem tempore confectarum  $N$ ,  $n$ , erit  $T : t :: n : N$  (473), &  $TT : tt :: AB : ab$  (472) ac propterea  $nn : NN :: AB : ab$ . Datis igitur tribus harum proportionum terminis quartus datus est.

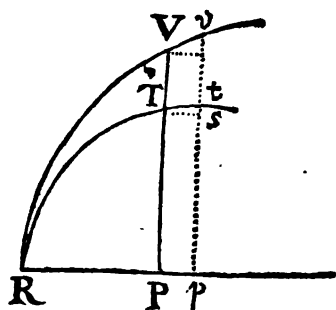
(f) 476. Nam longitudo arcus  $TR$  sit axis  $RP$ , vertex  $R$ , ad axem

ordinatim applicatæ  $TP$ ,  $tp$ , infinitè propinquæ  $T$  s axi parallela & ordinariæ  $t$   $p$  occur-



per rectam  $TZ$  captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in *DE MO-*  
vires  $TY, YZ$ ; quarum  $YZ$  trahendo corpus secundum longi-<sup>TU COR-</sup>  
tudinem fili  $PT$ , morum ejus nil mutat, vis autem altera  $TY$ <sup>FORUM.</sup>  
motum ejus in curvâ  $STRQ$  directè accelerat vel directè re-<sup>LIBER</sup>  
tardat. ( *g* ) Proinde cum hæc sit ut via describenda  $TR$ , ac-<sup>PRIMUS.</sup>  
celerationes corporis vel retardationes in oscillationum duarum <sup>PROP.</sup> *LIII.*

(ma-<sup>PROBL.</sup>  
XXXV.

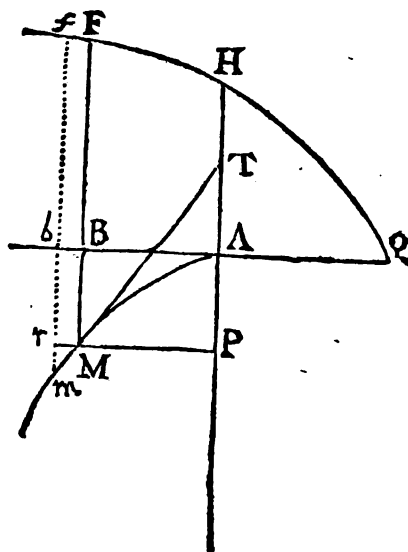


occurrens in  $s$ . Sit  $RP = x, PT = y$ , &  
erit  $Pp = Ts = dx, ts = dy, Tt^2 = dx^2$   
 $+ dy^2, Tt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ; quare  $RT$ ,  
fluens ipsius  $Tt$ , æqualis erit fluenti quan-  
tatis  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Ex æquatione ad  
curvam  $RT$ , quærat<sup>r</sup> valor ipsius  $dy$   
per  $dx$  & alias quantitates, sitque  $dy$   
 $= Q dx$ ,  $Q$  vero quantitas quælibet con-  
stans aut variabilis, erit  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$   
 $= dx \sqrt{1 + QQ}$ . In perpendiculo  $PT$ ,  
capiatur  $PV = A \times \sqrt{1 + QQ}$ , sitque  
 $A$  quantitas data, & curva  $RV$  locus punc-  
torum  $V$ , erit areæ  $RV P$  elementum  
 $Pp \times PV = A dx \sqrt{1 + QQ}$ , undè  $Tt =$   
 $dx \sqrt{1 + QQ} = \frac{Pp \times PV}{A}$ , & capiendo

utrinque fluentes  $RT = \text{areæ} \frac{RVP}{A}$ , cur-  
væ igitur  $RT$  rectificatio ad quadraturam  
figuræ  $RV P$  reducta est.

476. Idem aliâ methodo fieri potest.  
Sit curvæ hujus rectificandæ  $AMm$ , axis  
 $AP$ , & vertex  $A$ . Per punctum quodvis  
 $M$  agatur tangens  $MT$  axi occurrens in  
 $T$ ; &  $MF$  axi parallela rectam  $AB$  axi  
normalem secans in  $B$ ; capiatur semper

Tom. I.



$AB$  ad  $MT$  sicut constans quævis  $A$  ad  
 $BF$ , & punctum  $F$  curvam  $FHQ$  per-  
petuò tangat, erit spatium curvilineum  
 $BFHA$  æquale rectangulo sub arcu  $AM$   
& constanti  $A$  comprehenso, adeoque  
arcus  $AM = \frac{BFHA}{A}$ . Nam ductâ  $mf$

priori  $MF$  parrallelâ & infinitè propin-  
quâ, demissoque ad axem  $AP$  perpendi-  
culo  $MP$ , quod rectam  $mf$ , secat in  $r$ ;  
erit ob triangula  $MPT, Mrm$  similia  
 $Mr : Mm = MP$ , vel  $BA : MT = A : BF$   
( *per constr.* ) Ergò  $BF \times Mr$ , id est,  
elementum  $Bb fF = Mm \times A$ , ac proin-  
dè spatium fluens  $AHF B$  æquale fluenti  
 $AM \times A$ .

( *g* ) \* Proinde &c. Quæ sequuntur ma-  
nifesta sunt ( *ex dem. prop. 51.* )

Ccc



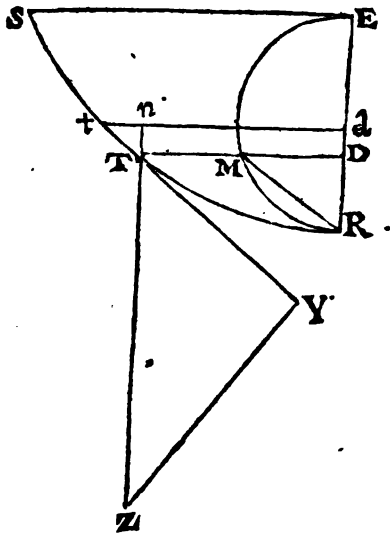
# PRINCIPIA MATHEMATICA.

387

*AR* ad finem *TN*, oscillationes <sup>(k)</sup> omnes erunt isochro- DE Mo-  
næ. TU COR-

(k) \* Oscillationes omnes erunt isochro-  
næ. Cum enim vis tota *TZ* quæ oscilla-  
tiones redduntur isochronæ sit (per cor. 1.)  
ad vim gravitatis *AT* seu *AR*, ut *TR*  
ad *TN*, erit  $TZ = \frac{AR \times TR}{TN}$ , adeoque  
vis tota *TZ*, ut  $\frac{AR \times TR}{TN}$ .

478. Ex demonstratis solvi potest hoc  
problema: Datâ lege vis centripetæ, in-  
venire curvam tautochronam *STR*, in quâ  
nimirum, corpus oscillationes semper ilo-  
chronas peragat.



Casus ius. Vis gravitatis directio *TZ*  
semper sit parallela axi *ER* curvæ *STR*,  
sint *SE*, *td*, *TD* ad axem *RE* ordinatim  
applicatæ, punctum *E* datum, puncta *D*,  
*d* infinitè propinqua, tangens *TY* æqua-  
lis arcui *TR*, *YZ* ad *TY* perpendicula-  
ris secet *TZ* in *Z*, & *ZT* producta secet  
*td* in *n*. Dicantur *RE* = *a*, vis gravita-  
tis in *E* vel *T* = *g*, in *D* vel *T* = *v*, pars  
lineæ verticalis per *S* ductæ determinata

ad modum verticalis *TZ*, sit = *b*, *RD* = *x*,  
*DT* = *y*, *TR* = *TY* = *s*. Ob triangula  
*Tnt*, *TYZ* similia, *Tn(dx)* : *Tt(ds)*  
= *TY(s)* : *TZ* =  $\frac{sds}{dx}$ ; ob angulum *Tnt*  
rectum  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ; & (per prop.  
*s3.*)  $g : v = b : TZ \left( \frac{sds}{dx} \right)$ , ideoque

$$sds = \frac{b}{g} v dx, \text{ \& sumptis fluentibus}$$

$$\frac{1}{2} ss = \frac{b}{g} S. v dx; \text{ fluens autem } S. v dx \text{ ita}$$

$$\text{sumi debet, ut evanescente } x, \text{ ea fluens eva-}$$

$$\text{nescat. Erit igitur } ss = \frac{2b}{g} S. v dx, s =$$

$$\sqrt{\frac{2b}{g} S. v dx}, \text{ \& sumptis fluxionibus}$$

$$ds = \frac{b v dx}{\sqrt{2bg S. v dx}}, \text{ proindeque } ds^2$$

$$= \frac{bb v v dx^2}{2bg S. v dx} = dx^2 + dy^2, \text{ \& hinc}$$

$$dx \sqrt{\frac{b v v - 2g S. v dx}{2g S. v dx}} = dy \text{ æquatio}$$

$$\text{ad curvam tautochronam } STR, \text{ in quâ}$$

$$\text{datâ lege vis gravitatis exterminabitur } v.$$

$$\text{Exemplum. Sit gravitas constans, seu}$$

$$v = g, \text{ \& erit } v dx = g dx, S. v dx = gx,$$

$$\text{quæ evanescit, ubi } x = 0. \text{ Quare æqua-}$$

$$\text{tio ad curvam } SR \text{ fiet } dx \sqrt{\frac{b - 2x}{2x}} =$$

$$dy. \text{ Quoniam vero } ss = \frac{2b}{g} S. v dx =$$

$$2bx, \text{ si ponatur } b = SR, \text{ ut verticalis per}$$

$$S \text{ ducta curvam tangat in } S, \text{ \& loco } s$$

$$\text{scribatur } b, \text{ ac loco } x \text{ scribatur } a, \text{ erit}$$

$$bb = 2ba, \text{ \& proinde } b = 2a, \text{ atque } ss =$$

$$4ax, \text{ hoc est, } SR = 2RE, \text{ \& } TR^2 =$$

$$4RE \times RD; \text{ porro si diametro } RE \text{ de-}$$



DE MO- Casus 2. Tendat vis centripeta ad punctum datum C. Centro C, radii CE, CD, C d descripti sint arcus circulares ES, DT, d t n, curvæ SR occurrentes in S, T, t, & rectæ CT in n, sintque PRIMUS. E punctum in axe CE datum, D, d puncta infinitè propinqua, tangentis TX per T ductæ pars TY æqualis arcui TR, & ZY, CX ad tangentem perpendiculares. Dicantur CE = a, CR = c, SL pars radii CS eodem modo determinata ac TZ pars radii CT sit = b, vis centripeta in E vel S = g, in D vel T = v, CD vel CT = x, TR vel TY = s, CX = p. Ob similitudinem triangulorum Tnt, TYZ, TXC, est Tn(dx) : Tt(ds) = TY

PROP.  
LIII.  
PROBL.  
XXXV.

$$(s) : TZ = \frac{s ds}{dx} \& TC(x) : CX(p) =$$

$$Tt(ds) : tn = \frac{p ds}{x}, \text{ ideoque ob an-}$$

$$\text{gulum Tnt rectum } ds^2 = dx^2 + \frac{pp ds^2}{xx};$$

$$\& \text{ proinde } ds^2 = \frac{xx dx^2}{xx - pp}.$$

$$\text{Verùm (per prop. 53.) } g : v = b : TZ \left( \frac{s ds}{dx} \right), \text{ undè } s ds = \frac{b}{g} v dx, \& \text{ sumptis}$$

$$\text{fluentibus } \frac{1}{2} ss = \frac{b}{g} S. v dx. \text{ Quoniam}$$

$$\text{autem evanescente } s, \text{ sit } x = c, \text{ fluens } S. v dx \text{ ita accipi debet, ut, posita } x = c,$$

$$\text{evanescat. Erit igitur } ss = \frac{2b}{g} S. v dx,$$

$$s = \sqrt{\frac{2b}{g}} S. v dx, \& \text{ sumptis fluxionibus}$$

$$ds = \frac{b v dx}{\sqrt{2bgS. v dx}}, \text{ undè } ds^2 = \frac{b v v dx^2}{2gS. v dx}$$

$$= \frac{xx dx^2}{xx - pp}, \text{ atque adeo } \frac{b v v}{2gS. v dx} =$$

$$\frac{xx - pp}{xx - pp} \text{ æquatio ad tautochronam STR,}$$

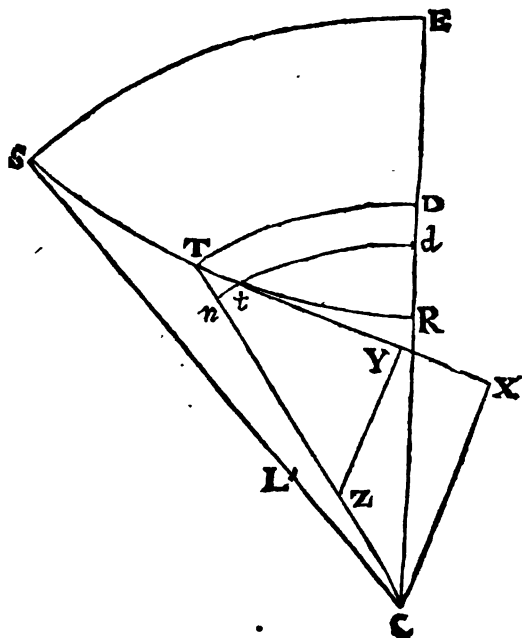
$$\text{in qua datâ lege vis centripetæ delebitur } v.$$

$$\text{Exemplum. Vis centripeta sit ut distantia à centro C, hoc est, } g : v = a : x,$$

$$\text{adeoque } v = \frac{g x}{a}, v dx = \frac{g x dx}{a}, S. v dx$$

$$= \frac{g x x}{2a} + Q(\text{constantem}) \& \text{ quoniam po-}$$

$$\text{sitâ } x = c, \text{ evanescit } S. v dx, \text{ erit } Q = \frac{-g c c}{2a},$$



$$\text{atque ita } S, v dx = \frac{g x x - g c c}{2a} \text{ Quare}$$

$$\text{erit } ss = \frac{2b}{g} S. v dx = \frac{b x x - b c c}{a}, \&$$

$$\text{æquatio ad tautochronam evadet } \frac{b x x}{a x x - a c c}$$

$$= \frac{x x - p p}{x x - p p}, \text{ seu } p p = \frac{b x x - a x x + a c c}{b}$$

Jam si in hac æquatione ponatur  $b = a$ , erit  $p = c$ , &  $ss = xx = cc$ , ideoque tautochrona SR linea recta ad CR perpendicularis in R.

Si ponatur  $b$  major quàm  $a$ , &  $c = 0$ ,

$$\text{erit } p = x \sqrt{\frac{b-a}{b}}, \text{ adeoque } p \text{ ad } x \text{ in ra-}$$

tione datâ, cumque sit  $p$  seu  $CX$  sinus anguli  $CTX$ , existente radio  $x$  seu  $CT$ , erit angulus  $CTX$  constans, & proinde tautochrona SR spiralis logarithmica.

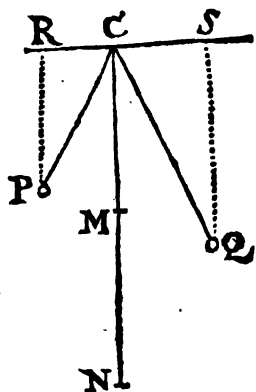
Si fuerit  $b$  minor quàm  $a$ , & recta CS curvam SR tangat in S, erit  $b = SR$ ;

$$\text{cùmque sit } ss = \frac{b x x - b c c}{a}, \text{ si ponatur}$$

$$s = SR = b, \& \text{ proinde } x = a \text{ fiet } bb = \frac{b a a}{b a a}$$

$\frac{b a a - b c c}{a}$ , &  $b = \frac{a a - c c}{a}$ . Jam si in æquatione ad curvam S R loco b scribatur  $\frac{a a - c c}{a}$ , erit  $p p = \frac{a a c c - c c x x}{a a - c c}$  æquatio ad cycloidem, quæ describitur rotatione circuli cujus diameter est R E seu  $a - c$  super concavam peripheriam circuli centro C radio C E seu a descripti, ut liquet per n. 466.

Schol. In superioribus de pendulorum motu propositionibus corporis penduli gravitatem in centro seu puncto coactam & filum gravitatis expers supposuimus, quæ pendulum simplex constituunt. Quamobrem ne demonstratæ oscillationum leges in experimentis valde perturbentur, filum usurpandum est tenue cum globo exiguo & ex materia gravissimâ confiato. Si verò filum aut virga e qua globus pendet gravis fuerit & globus major, pendulum non amplius simplex est, sed compositum, quod pluribus ponderibus inter se connexis instructum est.



Pendulum compositum CPQ, onustum quocumque pondusculis P, Q, &c. quorum commune gravitatis centrum M circa punctum suspensionis C oscilletur. Recta CM per punctum suspensionis C & commune gravitatis centrum M ducta vocatur axis penduli compositi PCQ, recta verò RCS in puncto suspensionis C ad axem penduli CM perpendicularis dicitur axis oscillationis. Si in axe penduli compositi CM, capiatur CN, æqualis longitudini penduli simplicis suas oscillationes in circulo eodem tempore quo pendulum compositum CPQ semper absolvent.

tis, pendulum illud simplex composito DEMO- C P Q synchronum vel etiam isochronum dicitur, & punctum N centrum oscillationis penduli compositi C P Q TU COR- appellatur. Porro si singulorum pondus- FORUM. culorum P, Q &c. gravitas in punctis LIBER PRIMUS. P, Q &c. collecta intelligatur, & lineæ PROP. PC, QC &c. gravitatis expertes supponantur, sique M summa pondusculorum om- LIII. nium P, Q, &c. atque ex punctis P, Q &c. PPOBL. ad axem oscillationis RCS demittantur XXXV. perpendicularia PR, QS &c. erit CN =  $\frac{P \times PR^2 + Q \times QS^2}{M \times MC} + \&c.$  id est,

si pondera singula penduli compositi ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis, oriatur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi. Hoc pulcherrimum theorema quo linearum ac figurarum omnium oscillantium centrum oscillationis determinatur, primus in horologio oscillatorio invenit ac demonstravit *Hugenius*. Idem theorema suo quisque modo postea demonstrarunt fratres celeberrimi *Jacobus* & *Joannes Bernoulli*, ille in Actis Lipsiensibus an. 1691. & Commentariis Paris. an. 1703. Hinc verò in Actis Lipsiensibus & Commentariis Paris. an. 1714. quorum demonstrationes exposuit clariss. *Wolffius* in Elementis Mechanices. *Hermannus* quoque lib. 1<sup>o</sup>. *Phoron. cap. 5<sup>o</sup>*. & initio Tomi 3<sup>i</sup>. *Acad. Petropol.* duas ejusdem theorematum demonstrationes edidit.

*Hugenius* horologii oscillatorii parte 4<sup>a</sup>. prop. 22. distantiam centri oscillationis à puncto suspensionis in sphaera filo tenui suspensa æqualem esse invenit longitudini fili cum radio sphaeræ atque duabus quintis partibus tertiæ proportionalis ad lineam compositam ex radio sphaeræ ac longitudine fili & radio ipsum, hoc est, si filum dicatur L, radius sphaeræ R, distantia centri oscillationis à puncto suspensionis D, erit  $D = L + R + \frac{2 R R}{5 (L + R)}$ .

Sed hæc omnia indicare, non verò demonstrare nobis licet, cum his Propositionibus non utatur Auctor noster.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP.

LIV.

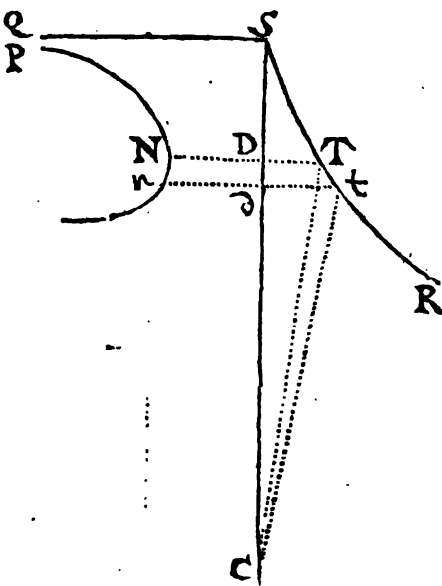
PROBL.

XXXVI.

## PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

*Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendant & ascendant.*

Descendat corpus de loco quovis  $S$ , per lineam quamvis curvam  $ST \& R$  in plano per virium centrum  $C$  transeunte datam. Jungatur  $CS$  & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque  $Dd$  partium illarum aliqua. Centro  $C$  intervallis  $CD$ ,  $Cd$  describantur circuli  $DT$ ,  $dt$ , lineæ curvæ  $ST \& R$  occurrentes in  $T$  &  $t$ . Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine  $CS$  de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine  $CT$  (per prop. xxxix.) <sup>(1)</sup> Tempus autem, quo corpus describit lineolam  $Tt$ , est ut lineolæ hujus longitudo, id est, ut secans anguli  $tTC$  directè; & velocitas inversè. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata  $DN$  ad rectam  $CS$  per punctum  $D$  perpendicularis, & ob datam  $Dd$  erit rectangulum  $Dd$



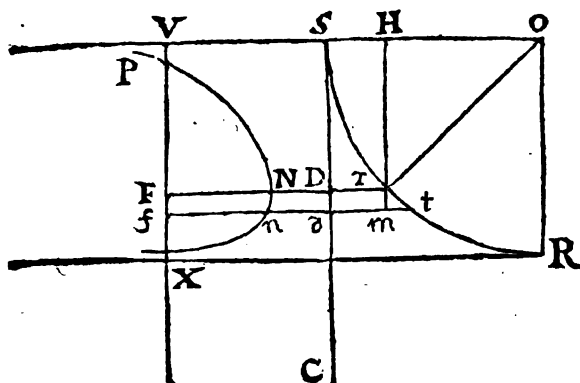
(1) \* *Tempus autem quo corpus &c.* Nam,  $Tt$ , est spatium nalcens velocitate uniformi descriptum; est autem tempus quo spatium aliquod æquabiliter describitur ut spatium illud directè & velocitas inversè (5). Porro si centro  $T$  radio dato  $Dd$ , æquali differentiæ rectarum  $TC$ ,  $tC$  circulus describi intelligatur, erit  $Tt$  se-

cans anguli  $tTC$ , quare ob datum radium  $Dd$  erit semper  $Tt$  ut secans anguli  $tTC$ , atque adeò tempus quo describitur  $Tt$  erit ut illa secans directè & velocitas inversè. Sed datâ tangente curvæ  $STR$  in puncto  $T$  datur anguli  $CTt$  secans; undè dabitur  $DN$  proportionalis tempori quo describitur  $Tt$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 391

$Dd \propto DN$ , hoc est area  $DNnd$ . eidem tempori proportionale. DE MO-  
Ergo si  $PNn$  sit curva illa linea quam punctum  $N$  perpetuo tan- TU COR-  
git, ejusque asymptotos sit recta  $SQ$  rectæ  $CS$  perpendiculariter LIBER  
insistens: erit area  $SQPNd$  proportionalis tempori quo corpus PRIMUS.  
descendendo descripsit lineam  $ST$ ; proindeque ex inventâ illâ PROP.  
areâ dabitur tempus. Q. E. I. LIV.

P R O- PROBL.  
XXXVI.



479. Exemplum. Centrum virium C; in infinitum abeat, ut sit vis centripeta constans, illiusque directio rectæ  $SDC$  semper parallela, & arcus  $DT$ ,  $dt$ , in rectas lineas ad  $SD$  normales mutantur. Sit curva  $STR$  circuli quadrans cujus centrum  $O$  & radius  $OS$  ad  $SD$  perpendicularis; producantur perpendiculara  $TD$ ,  $OS$  ad  $F$  &  $V$ , &  $DF$  constans gravitatem exhibeat in loco  $D$ , punctum  $F$  perpetuo tanget rectam  $VF$  lineæ  $SD$  parallelam, eritque (408) velocitas in  $D$  vel  $T = \sqrt{2SD \times FD}$ . Ex puncto  $T$  ad  $SO$  demittatur perpendicularum  $TH$  rectam  $dt$  secans in  $m$ , sitque  $SO = a$ ,  $SV = FD = b$ ,  $SD = TH = x$  & ob triangula  $TOH$ ,  $tTm$ , similia, erit  $HO (\sqrt{aa-xx}) : TO (a) = Tm (dx) : Tt = \frac{a dx}{\sqrt{aa-xx}}$ , velocitas in  $T = \sqrt{2SD \times DF} = \sqrt{2bx}$ . Quare tempus per arcum nascentem  $Tt = \frac{Tt}{\sqrt{2bx}} (s) = \frac{a dx}{\sqrt{2aax-2bx}}$  undè,

$DN = \frac{a}{\sqrt{2baax-2bx}}$ . Si  $ND$  dicatur  $y$ , erit  $yy = \frac{a^2}{2baax-2bx}$  æquatio ad curvam  $PNn$ , in quâ si ponatur  $x=0$  vel  $x=a$  erit  $y$  infinita, & proinde rectæ  $OV$ ,  $RX$  ad  $SD$  perpendiculares sunt hujus curvæ asymptoti. Similiter si corpus de loco  $R$  ascendat in semicirculo  $RTS$ , sitque ejus velocitas in  $R$  illa quâ possit ad altitudinem verticalem  $e$  ascendere, dicanturque  $XV$  seu  $RO = a$ ,  $FX = x$ , ideoque velocitas in  $T = \sqrt{2be-2bx}$ , &  $Tt = \frac{a dx}{\sqrt{aa-xx}}$ ; erit tempus per  $Tt = \frac{a dx}{\sqrt{2be-2bx} \times \sqrt{aa-xx}}$  &  $DN = y = \frac{a}{\sqrt{2be-2bx} \times (aa-xx)}$ , ubi  $DN$  per unitatis quadratum, ut serveetur homogeneitas, divisa intelligitur.

Scho-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS.

PROP.

L V.

THEOR.  
XXI.

# PROPOSITIO LV. THEOREMA XXI.

*Si corpus movetur in superficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium transit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.*

Sit  $BKL$  superficies curva,  $T$  corpus in eâ revolvens,  $STR$  trajectory, quam corpus in eâdem describit,  $S$  initium trajectory,  $OMK$  axis superficiei curvæ,  $TN$  recta à corpore in axem perpendicularis,  $OP$  huic parallela & æqualis à puncto  $O$ , quod in axe datur,educta,  $AP^{(m)}$  vestigium trajectory à puncto  $P$  in lineæ volubilis  $OP$  plano  $AOP$  descriptum;  $A$  vestigiî initium puncto  $S$  respondens;  $TC$  recta à corpore ad centrum ducta;  $TG$  pars ejus vi centriptæ quâ corpus urgetur in centrum  $C$ ,  
pro-

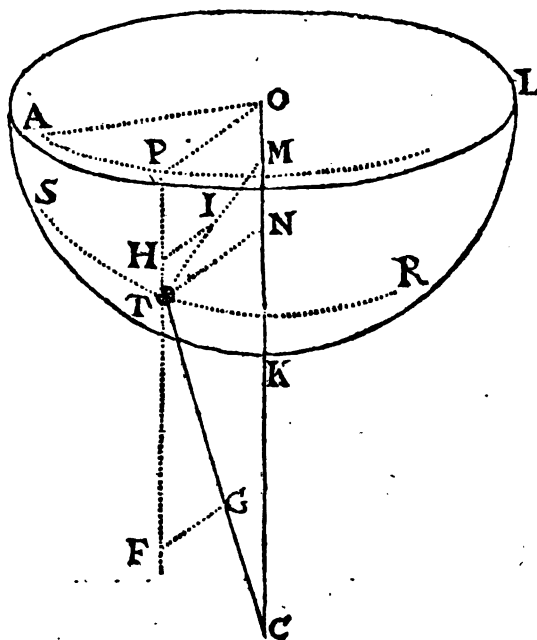
*Scholium.* Si ex his tribus, vi centripetâ in singulis locis, curvâ in quâ corpus ascendit vel descendit, & tempore quo singuli curvæ arcus percurruntur, duo data fuerint, tertium dabitur. Sit enim (in superioribus figuris)  $Dd = dx$ ,  $Tt = dt$ ,  $tm = dy$ , velocitas in  $T = c$ , & erit  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , &  $(s)cdt = dt$ , ideoque  $ccdt^2 = dx^2 + dy^2$ . Quare si, datâ vi centripetâ, seu (per prop. 39.) æquatione inter  $c$  &  $x$ , detur etiam æquatio inter  $s$  &  $x$  vel  $y$ , dabitur æquatio inter  $x$  &  $y$ , hoc est, æquatio ad curvam  $STt$ , & vice versâ. Exempli causâ, positâ vi centripetâ constante & ad distantiam infinitam tendente, corpus ita descendat in curva  $STt$ , ut tempus per arcum quemvis  $ST$  proportionale sit altitudini correspondenti  $Sd$ , dicanturque  $Sd = x$ ,  $DT = y$ , tempus per  $ST = t$ , velocitas in  $T = c$ ; & erit  $dt$  ut  $dx$ , &  $c$  ut  $\sqrt{x}$ , ideoque  $c dt$  ut  $dx \sqrt{x}$ , & hinc si fuerit  $a$  quantitas constans,  $c dt = dx \frac{\sqrt{x}}{a}$

& proinde  $\frac{x dx^2}{a} = dx^2 + dy^2$ , & hinc

$(x - a) dx^2 = a dy^2$ . Ponatur  $x - a = v$ , & erit  $dx = dv$ , &  $v^{\frac{1}{2}} dv = a^{\frac{1}{2}} dy$ , sumptisque fluentibus  $\frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}} y$ ,  $\frac{4}{9} v^{\frac{3}{2}} = ayy$ ,  $v^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} ayy$ , æquatio ad parabolam secundi generis, cujus est latus rectum  $\frac{9}{4} a$ , abscissa  $v$ , & ordinatim applicata  $y$ . Sed quoniam in illâ parabolâ, positâ  $y = 0$ , sit  $v = 0$ , adeoque  $x - a = v = 0$ , &  $x = a$ , patet corpus de altitudine  $a$  cadere debere antequam in parabola descendat, capiendamque esse  $SD = v$ , ut tempus per arcum  $ST$  sit proportionale altitudini  $v + a$ , seu  $x$ .

(m) \*  $AP$  vestigium &c. Si corpus in superficie quâcunque curvâ moveatur, suoque motu curvam describat quæ in plano posita non sit, ad planum est referenda, idque sit si in superficie curvâ aliquod fingatur planum ad quod ex singulis curvæ descriptæ punctis erigantur perpendiculares, quarum extremitates aliam in plano lineam describent, hæc linea primæ vestigium seu lineæ projectionis dicitur.

proportionalis;  $TM$  recta ad superficiem curvam perpendicularis;  $TI$  pars ejus vi pressiois, quâ corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus  $M$  à superficie, proportionalis;  $PTF$  recta axi parallela per corpus transiens, &  $GF$ ,  $IH$  rectæ à punctis  $G$  &  $I$  in parallelam illam  $PTHF$  perpendiculariter demissæ. Dico jam, quod area  $AOP$ , radio  $OP$  ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis



$TG$  (per legum corol. 2.) resolvitur in vires  $TF$ ,  $FG$ ; & vis  $TI$  in vires  $TH$ ,  $HI$ : Vires autem  $TF$ ,  $TH$  agendo secundum lineam  $PF$  plano  $AOP$  perpendicularem mutant solummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quatenus secundum positionem plani factus; hoc est, motus puncti  $P$ , quo trajectory vestigium  $AP$  in hoc plano describitur, idem est ac si vires  $TF$ ,  $TH$  tollerentur, & corpus solis viribus  $FG$ ,  $HI$  ageretur; hoc est, idem ac si corpus in plano  $AOP$ , vi ( $n$ ) centripetâ ad centrum  $O$  tendente & summam virium  $FG$  &  $HI$  æquante, describeret curvam  $AP$ . Sed vi tali describitur area  $AOP$  (per prop. 1.) tempori proportionalis. Q. E. D.

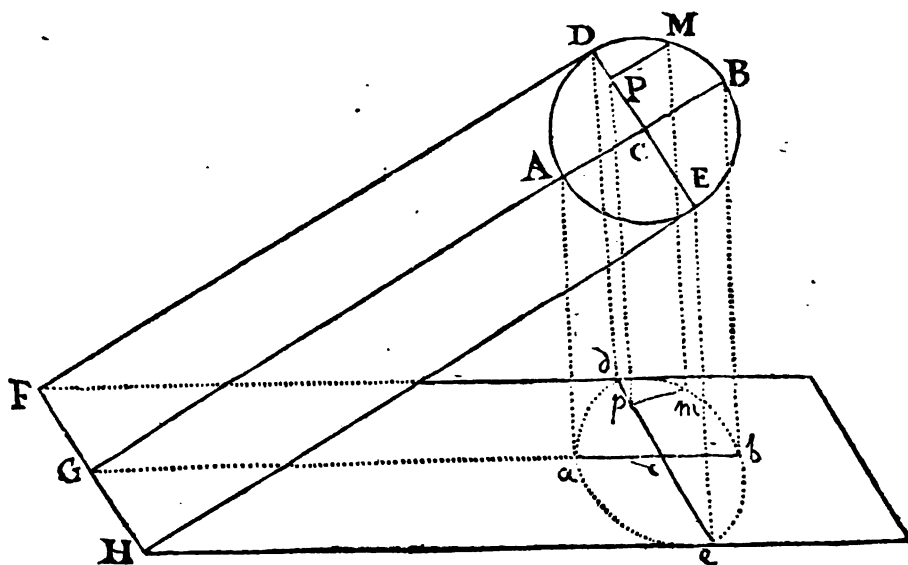
Corol. Eodem argumento si corpus, à viribus agitatum ad centra duo vel plura in eadem quâvis rectâ  $CO$  datâ tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam  $ST$ ; foret area  $AOP$  tempori semper proportionalis.

( $n$ ) \* Vi centripetâ ad centrum  $O$  &c. Nam curva superficies  $BSKL$  genita supponitur revolutione curvæ lineæ  $BSK$  circa axem suum  $OC$ , undè sequitur li-

neas omnes  $PO$ ,  $HI$ ,  $TM$ ,  $FG$ ,  $PF$ ,  $CO$  esse in eodem plano, atque idè vim centripetam agentem in plano illo ad centrum  $O$  juxta lineam  $PO$  dirigi.

D d d

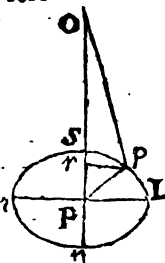
480



481. *Coroll.* Si linea projicienda, plano in quod projicitur parallela fuerit projectio erit linea recta lineæ projiciendæ æqualis & parallela; Nam in hoc casu angulus inclinationis nullus est, & ejus cofinus fit radius. Hinc si linea  $ED$ , ad rectam  $AB$  perpendicularis, fuerit plano  $FH$  ebd, parallela, projectio illius e d, erit ipsi  $ED$  æqualis.

lipſis cujus major axis  $d e$  æqualis erit dia-  
 metro circuli  $D E$ , & ad minorem axem  $a b$ ,  
 rationem habebit ſinûs totius ad coſinum  
 anguli  $B G b$ , inclinationis planorum. Aga-  
 tur enim  $P M$  ordinatim ad diametrum  
 circuli  $D E$ , & projiciatur in rectam  $P m$ ,  
 erit  $d p = D P$ , &  $p e = P E$  (481.) at-  
 que  $p m$  ad  $P M$ , ut ſinus anguli  $P M m$ ,  
 ſeu anguli  $A B b$ , ad ſinum totum (480)  
 hoc eſt, ut  $a b$ , ad  $A B$  ſeu  $d e$ , adeoque  
 $p m^2 : P M^2 = a b^2 : d e^2$ , ſed ex natura  
 circuli  $P M^2 = D P \times P E = d p \times p e$ ,  
 Ergo  $p m^2 : d p \times p e = a b^2 : d e^2$ . Eſt  
 igitur  $a e b d$ , ellipſis. Cætera patent per  
 Lemma ſuperius & ejus coroll.

483. *LEM.* Sint ellip-  
 ficos datæ  $LSmn$  axes  
 $Lm$ ,  $Sn$ , centrum,  $P$ ,  $O$   
 punctum in axe  $nS$  pro-  
 ducto datum,  $p$  punctum  
 perimetri non datum.  
 Datâ areâ trianguli  $OpP$ ,  
 dabitur perpendicularum  
 $p r$ , ex puncto  $p$ , ad  
 trianguli basim datam  
 $PO$  demissum & hinc  
 ex naturâ ellipficos dabitur  $rP$ , atque ob  
 angulum rectum ad  $r$ , dabitur  $Pp$ , & in-  
 de punctum  $p$  in perimetro cum angulo  
 $OPp$ , & positione rectæ  $Op$ .







XXXVII.

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

*Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curvâ cujus axis per centrum illud transit; invenienda est trajectory quam corpus in eâdem superficie describet, de loco dato, datâ, cum velocitate, versus plagam in superficie illâ datam egressum.*

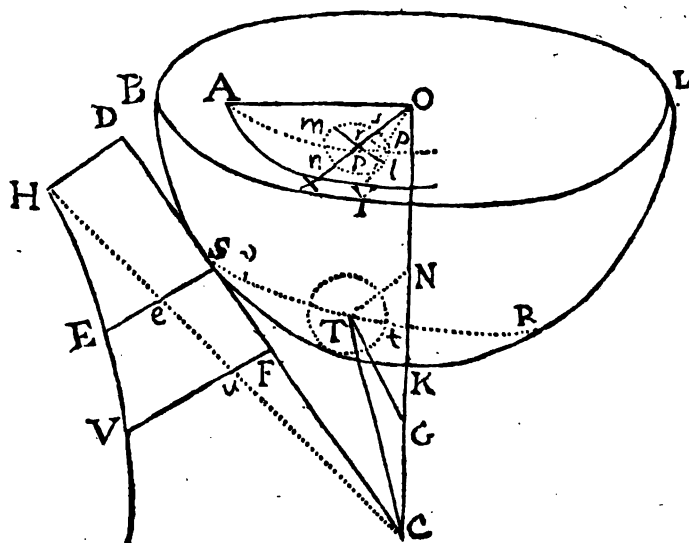
ob

(\*) \* *Dabitur ejus velocitas in alia &c*  
Nam (per prop. 40.) velocitas corporis in  
altitudine  $1\text{ C}$ , æqualis est velocitati  
quam corpus haberet ad eandem altitudi-  
nem in linea recta  $S\text{ C}$ , si de loco  $S$ ,  
rectè fuisset versus  $\text{C}$  projectum cum eā-  
dem velocitate quā trajectoriam  $S\text{ T R}$ ,  
incipit describere in  $S$ ; sed datā in  $1\text{ C}$ .

co S velocitate corporis per lineam S C  
versus centrum C projecti, datur illius  
velocitas in alio quovis loco lineæ S C,  
( per cor. 2. prop. 39. ). Ergo ex datâ  
corporis velocitate in altitudine S C, da-  
bitur ejus velocitas in aliâ quavis alti-  
tudine T C.



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LVI.  
PROBL.  
XXXVII.



prop. 39.) Et quoniam area PO<sub>p</sub>; seu  $\frac{PO \times pr}{2}$  est ut tempus quo describitur

T si five Pl, erit Pl, ut  $PO \times pr \sqrt{DHVF}$  hoc est, spatium uniformiter descriptum ut velocitas & tempus conjunctim (5). Quare si detur quantitas B erit Pl =  $B \times PO \times pr \times \sqrt{DHVF}$ . Est autem Pl semiaxis transversus ellipseos ad P s semiaxem conjugatum ut TH ad TN seu PO (486) quare erit  $Ps = \frac{B \times PO^2 \times pr \times \sqrt{DHVF}}{TG}$ ;

sed ex natura ellipseos  $Pl^2 : Ps^2 (= TG^2 : PO^2) = pr^2 : nr \times rs$  seu  $Ps^2 = Pr^2$ , atque adeò  $PO^2 \times pr^2 = TG^2 \times Ps^2 = TG^2 \times Pr^2$ ;

& hinc  $Pr^2 = Ps^2 = \frac{PO^2 \times pr^2}{TG^2} = \frac{B^2 \times PO^4 \times pr^2 \times DHVF - PO^2 \times pr^2}{TG^2}$ , proinde-

que  $Pr = \frac{PO \times pr \times \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}{TG \times Pr}$ ;

&  $pr = \frac{PO \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}{TG \times Pr}$ . Quare

$\frac{PO \times pr}{2} = \frac{PO^2}{2 \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$

Centro O & radio OA, describatur circuli arcus AXY, & producantur OP,

Op; ut arcui huic occurrant in X & Y; erit PO : OX seu AO = pr : XY =  $\frac{AO \times pr}{PO}$ ;

& hinc area OXY (five  $\frac{AO \times XY}{2}$ ) =  $\frac{AO^2 \times pr}{2 PO} = \frac{AO^2 \times TG \times Pr}{2 PO^2 \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$ .

Itaque si in recta dc, ad AO perpendiculari capiantur db =  $\frac{2 \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}{AO^2 \times TG}$

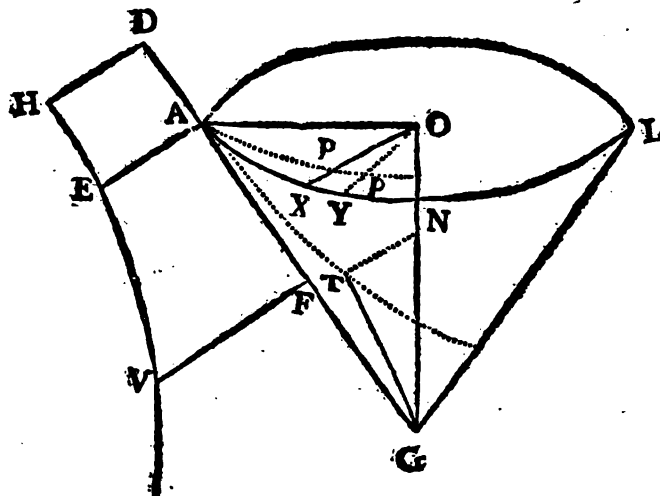
& dc =  $\frac{2 PO^2 \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}{AO^2 \times TG}$ ;

& describantur lineæ curvæ abz, acx, quas puncta b, c, perpetuò tangunt, de- que puncto A, ad lineam AO, erigatur perpendiculum Aa, ponendo dO = PO, patet fore areas Aabd, Aacd, arcis APO, AXO, æquales &c., (ut in prop. 41.)

488. Quantitas constans B, quam in superioribus æquationibus usurpavimus, facile determinatur. Nam datâ directione corporis trajectoriam STR, (vid. fig. not. 487.) describere incipientis, datur illius projectio AQ, quæ ut patet, est tangens vestigii A Pp in A, quâ vestigium A Pp incipit describi; projecto in tan- gen-



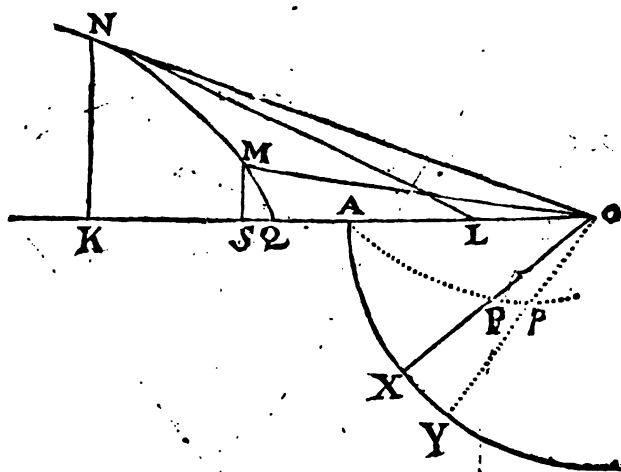




491. *Exemplum 3um.* Tendat vis centripeta ad conij vertexem G, & in triplicata ratione distantiarum ab illo puncto G decrescat, sitque H E V curva ad quam terminantur perpendiculara DH, AE, FV vim centripetam in locis singulis D, A, F, vel T, exhibentia, cætera verò maneant ut in exemplo superiori. Quoniam  $TG = \frac{f^x}{r}$  erit vis centripeta in loco T vel F ut  $\frac{r^4}{f^3 x^3}$ , adeoque si fuerit n quantitas data, vis centripeta supponi poterit  $= \frac{n^4}{x^3}$ . Sit DG = m, erit (431) area DHVF =  $\frac{n^4(mm-xx)}{mmxx} = \frac{kkmm-kkxx}{xx}$ , ponendo  $\frac{n^4}{mm} = kk$ . Quare si dicatur area DHEA = pp, erit PO p =  $\frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm-kkxx-4pp}}$  =  $\frac{qx dx}{\sqrt{hh-xx}}$  ponendo  $kkmm-CCpp=kkhh$ , &  $\frac{Cpf}{2rk} = q$ . Similiter inveniatur OXY =  $\frac{rrq dx}{x\sqrt{hh-xx}}$ . Quoniam autem crescen-

tibus arcibus APO, AXO, decrescit PO; seu x, scribendum est  $OPp = \frac{-qx dx}{\sqrt{hh-xx}}$  &  $OXY = \frac{-rrq dx}{x\sqrt{hh-xx}}$ . Fiat  $\sqrt{hh-xx} = z$ , & erit  $hh-xx=zz$  &  $-x dx=zdz$ , &  $POp = qdz$ , sumptisque fluentibus & addita constanti Q, erit  $APO = qz + Q = q\sqrt{hh-xx} + Q$ . Porro area APO evanescit ubi PO, seu x = AO = r, quare  $0 = q\sqrt{hh-rr} + Q$ , & hinc  $Q = -q\sqrt{hh-rr}$ , proindeque  $AP O = q\sqrt{hh-xx} - q\sqrt{hh-rr}$ . Et dato igitur tempore quo corpus describit AT, geometricè invenitur longitudo lineæ PO. Ponatur nunc  $x = \frac{hk}{y}$  & erit  $-dx = \frac{hdy}{y^2}$ ,  $hh-xx = \frac{h^2yy-h^2}{y^2}$ ,  $\sqrt{hh-xx} = \frac{h\sqrt{yy-h^2}}{y}$ , atque adeò  $OXY = \frac{-rrq dx}{x\sqrt{hh-xx}} = \frac{rrq dy}{h\sqrt{yy-h^2}}$ . Sit  $\frac{rrq}{hh} = \frac{1}{2}s$ , & erit  $OXY = \frac{1}{2}s \frac{hdy}{\sqrt{yy-h^2}}$ . Undè habetur constructio sequens.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LVI.  
PROBL.  
XXXVII.



Centro O, semiaxe transverso O A Q  
= h, semiaxe conjugato = s, describatur  
hyperbola Q M N, ex illius perimetri pun-  
cto quovis N, demittatur ad axem O Q,  
perpendicularum N K, & abscissa O K  
dicatur y, ductaque recta N L, quæ hy-  
perbolam tangat in N, & axi occurrat in  
L, erit (ex conic.) O K (y) : O Q (h)

= O Q (h) : O L =  $\frac{h h}{y} = x$ , & sector hy-

perbolicus O N Q = S.  $\frac{1}{2} \frac{s h d y}{\sqrt{h y - h h}}$  (427)

atque adeò A X O = O N Q + Q constan-

te. Si ponatur x, seu  $\frac{h h}{y} = O A = r$ , hoc

est y =  $\frac{h h}{r}$  evanescet area A X O, quare

si capiatur O S =  $\frac{h h}{r}$  & ad axem eriga-

tur perpendicularum S M, hyperbolæ occur-

rens in M, jungaturque O M, erit o =

O M Q + Q, & Q = - O M Q, unde A X O

= O N Q = O M Q = O N M. Sumatur

itaque sector circuli O A X = sectori hy-

perbolicus O N M, & in radio O X ca-

tur L N tangens hyperbolam in puncto  
aliquo N; Deinde capiatur sector circu-  
laris A X O = sectori hyperbolico O N M,  
& in radio O X, capiatur O P = O L, ac  
tandem ex puncto P, erigatur ad planum  
A O P (vid. fig. super.) perpendicularum  
P T, quod superficiæ conicæ occurrat in  
loco quæsito T.

Exempl. 4. Moveatur corpus de loco

A per trajectoriam A T R, in superficie

concavâ cylindri recti A K G L, in quo sit

baseos centrum O, manifestum est vesti-

gium trajectoriæ A T R, coincidere cum

baseos peripheriâ circulari A P L, quam

proinde punctum P, æquabili velocitate

describet (per prop. 56.) Sit vis centri

peta constans & per lineas lateri cylindri

A K parallelas semper agat, dicanturque

H D = a, D A = b, A F = P T = y, m t = d y,

arcus A P = x, P p = T m = d x, T t =

$\sqrt{d x^2 + d y^2}$ , erit area D H E A = a b,

area D H V F = a b + a y, velocitas in F

vel T =  $\sqrt{a b + a y}$ , unde tempusculum

quo describitur naicens T t vel P p erit =

$\sqrt{d x^2 + d y^2}$ . Et sit data velocitas quæ

describitur circulum A P L di-

caturque c erit tempusculum quo de-

scribitur P p =  $\frac{P p}{c} = \frac{d x}{c}$ ; quare  $\frac{d x}{c} =$

$\frac{d x}{\sqrt{d x^2}}$





## SECTIO XI.

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.

LVII.

THEOR.  
XX.

*De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.*

Haftenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuae sunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed <sup>(1)</sup> ambo (per legum corollarium quartum) quasi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia se mutuo attrahant; hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de causâ jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortasse, si physicè loquamur, verius dicantur impulsus. In mathematicis enim jam versamur; & propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus a lectoribus mathematicis facilius intelligi.

## PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

*Corpora <sup>(1)</sup> duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo, figuras similes.*

Sunt <sup>(2)</sup> enim distantiae corporum à communi gravitatis centro

<sup>(1)</sup> \* Sed ambo (per leg. corol. 4.) quasi attractione mutuâ vel ad se invicem rectâ lineâ serantur, vel, si ambo vi impressâ obliquè projiciuntur, circum gravitatis centrum commune quiescens aut uniformiter progrediens revolvantur.

<sup>(2)</sup> \* Corpora duo. Si corpora duo S, P se invicem trahentia revolvantur: circa commune gravitatis centrum C, peragendo de S. ad T. & de P. ad Q. similes

sunt hæc figuræ quatuor, nimirum PQC, STC, quas corpora S & T. circa commune gravitatis centrum C describunt, tum figura PQT quam corpus P describit circa corpus S spectatum tanquam immotum, & figura  $\pi$  TQ, quam S. circa P similiter spectatum describit.

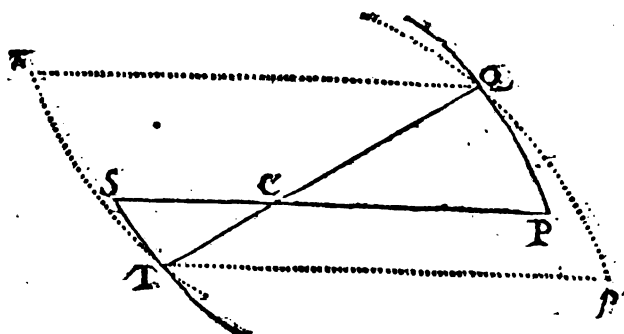
<sup>(3)</sup> \* Sunt enim distantie corporum à communi gravitatis centro QC, CT recte proportionales corporibus datis P, S.

(g2)

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 405

tro reciproce proportionales corporibus, atque ideo in datâ ratione ad invicem, & componendo in datâ ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantie circum terminum suum communem æquali motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuò. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in datâ ratione ad invicem, & æquali

DE MOTU CORP. LIBER PRIMUS. PROPOSITIONE LVII. THEOREMA XX.



(60) atque ideo in datâ ratione ad invicem, & componendo, QC est ad QT in datâ ratione corporis S ad summam corporum S + P. Feruntur autem distantie QC, TC, circa centrum terminum suum communem æquali motu angulari, id est, angulus QCP est semper æqualis angulo TCS propterea quod distantie QC, TC in directum semper jacent (60.) Quare (112) duæ figuræ PQC, STC similes sunt. Quod erat primum.

Agatur per T recta Tp lineæ SP æqualis & parallela, & si corpus S tanquam immotum spectetur, motus corporis P quod in Q pervenit idem erit respectu corporis S seu T, ac si corpus P de loco p translatus esset in locum Q; eritque QT ad Tp seu SP, ut QC ad CP, & angulus QTp = QCP unde figura PQ circa punctum S ut immotum spectatum à corpore P descripta erit similis figuræ PQC ideoque & figuræ STC, simili ratiocinio ostendetur figuram pQT circa punctum P immotum à corpore S descriptam, esse similem figuræ STC ideoque & figuræ PQC. Quod erat alterum.

Quod forte facilius adhuc intelligetur si ponamus in corpore S spectatorem qui se & lineam SP tanquam immota habeat, in hac enim hypothese, ubi corpus S pervenerit in locum T, linea SP, quæ tanquam immota spectatur erit Tp ipsi SP æqualis & parallela & spectator in T locatus motum corporis P videbit sub angulo QTp = QCP, & ad distantiam TQ. Cum igitur sit semper QC ad CP, ut QT ad SP, seu Tp, & angulus QCP æqualis angulo QTp, figura pQT, similis erit figuræ PQC, adeoque & figuræ STC. Pariter si per Q agatur Qp æqualis & parallela PS liquet figuram pTQ quam S circa P spectatum tanquam immotum describit esse similem & æqualem figuræ pQT quam corpus P, circa S spectatum tanquam immotum describit. Patet etiam harum omnium figurarum partes similes eodem tempore describi, ideoque etiam totas figuras æqualibus temporibus percurri.

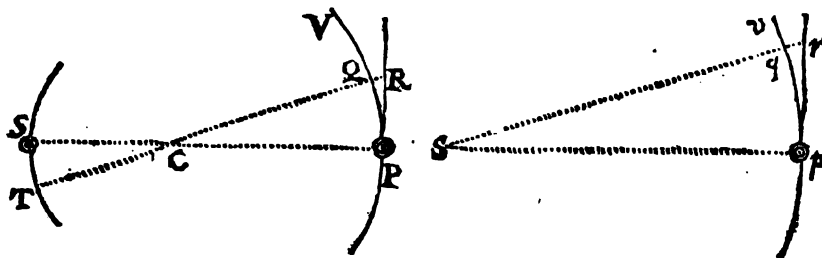
DE Mo-æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras cir-  
TU COR- cum eisdem terminos in planis, quæ unà cum his terminis vel  
PORUM. quiescunt, vel (a) motu quovis non angulari moventur, de-  
LIBER scribunt omninò similes. Proinde similes sunt figuræ, quæ his  
PRIMUS. distantis circumactis describuntur. Q. E. D.  
PROP.

L VIII.  
THEOR.  
XXI.

## PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

*Si corpora duo viribus quibuscvis se mutuo trahunt, & interea re-  
volvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris,  
quas corpora sic mota describunt circum se mutuò, potest figura  
similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus  
iisdem describi.*

Revolvantur corpora  $S$ ,  $P$  circa commune gravitatis cen-  
trum  $C$ , pergendo de  $S$  ad  $T$ , deque  $P$  ad  $Q$ . A da-  
to puncto  $s$  ipsis  $SP$ ,  $TQ$  æquales & parallelæ ducantur



semper  $sp$ ,  $sq$ ; & curva  $pqv$ , quam punctum  $p$  revolven-  
do circum punctum immotum  $s$  describit, (b) erit similis &  
æqualis curvis, quas corpora  $S$ ,  $P$  describunt circum se mutuò:  
proindeque (per theor. xx.) similis curvis  $ST$  &  $PQV$ , quas  
eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum  
 $C$ : idque quia proportionales linearum  $SC$ ,  $CP$ , &  $SP$  vel  $sp$   
ad invicem dantur.

Cas.

(a) \* Motu quovis non angulari. Vi-  
de Legum coroll. 5. & 6.

(b) \* Erit similis & æqualis curvis;  
ut patet ex demonstratione præcedentis  
superioris.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 407

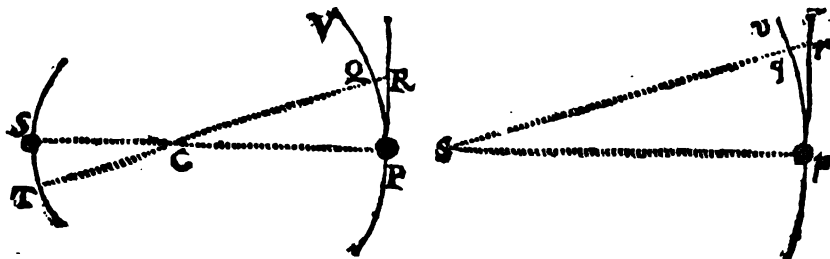
*Cas. 1.* Commune illud gravitatis centrum  $C$ , per legem co-  
rollarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in di-  
rectum. Ponamus primo, quod id quiescit, inque  $s$  &  $p$  locen-  
tur corpora duo, immobile in  $s$ , mobile in  $p$ , corporibus  $S$  &  $P$  similia & æqualia. Dein tangant rectæ  $PR$  &  $pr$  curvas  $PQ$  &  $pq$  in  $P$  &  $p$ , & producantur  $CQ$  &  $cq$  ad  $R$  &  $r$ .  
Et ob similitudinem figurarum  $CPRQ$ ,  $spqr$  erit  $RQ$  ad  $rq$  ut  $CP$  ad  $sp$ , ideoque in datâ ratione. Proinde si vis,  
quâ corpus  $P$  versus corpus  $S$ , atque ideo versus centrum in-  
termedium  $C$  attrahitur, esset ad vim, quâ corpus  $p$  versus  
centrum  $s$  attrahitur, in eâdem illâ ratione datâ; hæ vires æqua-  
libus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus  $PR$ ,  
 $pr$  ad arcus  $PQ$ ,  $pq$  per intervalla ipsis proportionalia  $RQ$ ,  
 $rq$ , ideoque vis posterior efficeret, ut corpus  $p$  gyraretur in  
curvâ  $pqv$ , quæ similis esset curvæ  $PQV$ , in quâ vis prior  
efficit, ut corpus  $P$  gyretur; & revolutiones iisdem tempori-  
bus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invi-  
cem in ratione  $CP$  ad  $sp$ , sed (ob similitudinem & æqua-  
litate corporum  $S$  &  $s$ ,  $P$  &  $p$ , & æqualitatem distantiarum  
 $SP$ ,  $sp$ ) sibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus  
æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus  
posterius  $p$  trahatur per intervallum majus  $rq$ , requiritur tem-  
pus majus, (c) idque in subduplicatâ ratione intervallorum; prop-  
terea quod (per *lemma decimum*) spatia ipso motus initio de-  
scripta sunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur ve-

loci

(c) Idque in subduplicatâ ratione inter-  
vallorum. Nâcentibus arcibus  $Pq$ ,  $PQ$   
tempora quibus describuntur intervalla  $rq$ ,  
 $RQ$  sunt in subduplicatâ ratione eorum-  
dem intervallorum, per *Lem. X*. Quare  
si velocitates uniformes quibus similes ar-  
cus nâcentes  $pq$ ,  $PQ$  æqualibus viribus  
centripetis describuntur, dicantur  $V$ ,  $v$ ,  
tempora  $T$ ,  $t$ , erit  $T^2:t^2=rq:RQ$   
 $=sp:CP=pq:PQ$ , est verò (s)  $V:v=$   
 $\frac{pq}{T}:\frac{PQ}{t}$  sive ut  $\frac{T^2}{t^2}:\frac{t^2}{T^2}$ , adeoque  
 $V:v=T:t=\sqrt{sp}:\sqrt{CR}$ . Itaque cor-

pora  $P$ ,  $p$ , viribus æqualibus semper at-  
tractâ, circum centra quiescentia  $C$ ,  $s$ ,  
nâcentes figuras similes  $PQ$ ,  $pq$ , adeo-  
que & figuras quavis similes  $PQV$ ,  $pqv$ ,  
describent temporibus & velocitatibus quæ  
erunt in subduplicatâ ratione distantiarum  
similium  $CP$ ,  $sp$ . Est autem (ex *Dem.*)  
figura  $pqv$ , similis & æqualis figuræ quam  
corpus  $P$ , circum corpus mobile  $S$ , (spe-  
ctatum tanquam immobile, ut in propo-  
sitione superiori exposuimus) describit eo-  
dem tempore, quo circa centrum  $C$ , de-  
scribit figuram similem  $PQV$ .

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LVIII.  
THEOR  
XXI.



locitas corporis  $p$  esse ad velocitatem corporis  $P$  in subduplicatâ ratione distantiae  $sp$  ad distantiam  $CP$ , eo ut temporibus, quæ sint in eadem subduplicatâ ratione, describantur arcus  $pq$ ,  $PQ$ , qui sunt in ratione integrâ: Et corpora  $P, p$  viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia  $C$  &  $s$  figuras similes  $PQV$ ,  $pqv$ , quarum posterior  $pqv$  similis est & æqualis figuræ, quam corpus  $P$  circum corpus mobile  $S$  describit. *Q. E. D.*

*Cas. 2.* Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, unâ cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; & (per legum corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, ideoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius; & propterea figuræ  $pqv$  similes & æquales. *Q. E. D.*

*Corol. 1.* Hinc corpora duo viribus distantiae suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per prop. x.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, ellipses concentricas; & vice versâ, si tales figuræ describuntur, sunt vires (d) distantiae proportionales.

*Corol. 2.* Et corpora duo, viribus quadrato distantiae suæ reciprocè proportionalibus, describunt (per prop. xi. xii. xiii.) &

(d)\* *Distantiæ proportionales.* Cum enim (ex Dem.) corpus  $p$ , circa  $s$ , & corpora duo  $P, S$ , circa commune gravitatis centrum  $C$ , & circum se mutuo

figuras similes vi centripetâ æquali describant, sitque (per prop. X.) figura  $pqv$ , ellipsis cujus centrum  $S$ , liquet veritas corollarii.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 409

& circum commune gravitatis centrum , & circum se mu- DE Mo-  
tuo, sectiones conicas umbilicum habentes in centro , circum TU COR-  
quod figuræ describuntur. Et vice versâ, si tales figuræ descri- PORUM.  
buntur, vires centripetæ sunt quadrato distantiae reciprocè pro- LIBER  
portionales. PRIMUS.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum com- LIX.  
mune gyrantia , radiis & ad centrum illud & ad se mutuò duc- THEOR.  
tis, (e) describunt areas temporibus proportionales. XXII.

## PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

*Corporum duorum S & P , circa commune gravitatis centrum C re-  
volvuntium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corpo-  
ris alterutrius P, circa alterum immotum S gyrantis, & figuris,  
quæ corpora circum se mutuo describunt, figuram similem & æqua-  
lem describentis, in subduplicatâ ratione corporis alterius S, ad  
summam corporum S + P.*

Namque , ex demonstratione superioris propositionis , tem-  
pora , quibus arcus quivis similes  $PQ$  &  $pq$  describuntur, sunt  
in subduplicatâ ratione distantiarum  $CP$  &  $SP$  vel  $sp$ , hoc  
est, in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum  
 $S + P$ . Et componendo, summæ temporum quibus arcus om-  
nes similes  $PQ$  &  $pq$  describuntur, hoc est, tempora tota ,  
quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eâdem subdu-  
plicatâ ratione. Q. E. D.

PRO:

(e) \* Describunt areas temporibus pro-  
portionales. Nam tempora quibus descri-  
buntur areæ quævis similes  $spq$ ,  $CPQ$ ,  
&  $spu$ ,  $CPV$ , sunt semper in datâ ra-  
tione, nimirum, subduplicatâ distantiarum  
similium  $sp$ ,  $CP$  (ex Dem.) & proinde  
tempus quo describitur area  $spq$ , est ad  
tempus quo describitur area  $spu$ , ut tem-  
pus quo describitur area  $CPQ$ , ad tem-  
pus quo describitur area  $CPV$ ; sed (per  
Iam. I

prop. x.) tempora quibus describuntur areæ  
 $spq$ ;  $spu$ , sunt arcis illis adeoque & arcis  
similibus  $CPQ$ ,  $CPV$  proportionalia ,  
ergo areæ  $CPQ$ ,  $CPV$  sunt ut tempo-  
ra quibus describuntur; & quoniam areæ  
quas corpora S, P circum centrum gra-  
vitatatis describunt similes sunt arcis quas  
iisdem temporibus describunt circum se  
mutuò, erunt quoque areæ istæ propor-  
tionales temporibus quibus describuntur.  
F f f

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
L X.  
THEOR.  
XXII.

## PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

*Si corpora duo S & P, viribus quadrato distantiae suae reciproce proportionalibus, se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos, quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum S.*

(f) Nam si descriptæ ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per theorema superius) forent in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum S + P. Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; ellipseos autem axis principalis (per prop. xv.) minuetur in ratione, cujus hæc est sesquuplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad S + P est triplicata; ideoque erit ad axem principalem ellipseos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter S + P & S ad S + P. Et inversè, axis principalis ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter S + P & S. Q. E. D.

P R O-

\* (f) \* Nam si descriptæ ellipses &c. Axis principalis ellipsium æqualium, quas corpora S, P circum se mutuo describunt (ut ad prop. 57. exposuimus) æqualis est axi principali ellipseos, p q u, quam corpus p vel P, circa corpus s vel S, reverâ immotum describit (ut in prop. 58. Hic axis dicatur A tempus periodicum quod in ellipsis quatuor quas corpora S, P circum C & circum se mutuo describunt (ut in prop. 57.) idem est, dicatur t, tempus periodicum in ellipsi p q u, quam corpus p, vel P, circa corpus S, vel s, reverâ immotum (ut in prop. 58.) de-

scribit dicatur T, sitque X axis principalis ellipseos quam corpus idem P, vel p, circa alterum S vel s reverâ immotum (ut in prop. 58.) describere posset tempore periodico t, erit (per prop. 59.)  $T^2 : t^2 = S + P : S$  & (per prop. 15.)  $T^2 : t^2 = A : X$ , quare  $A : X = S + P : S$ . Jam si capiantur duæ quantitates B, C mediæ proportionales inter S + P & S, erit S + P ad S in ratione triplicatâ. S + P, ad B, hoc est S + P : S = S + P : B, ac proinde A : X = S + P : B, ideoque A : X = S + P : B. Q. E. D.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 411

## PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXI.  
THEOR.  
XXIV.

*Si corpora duo viribus quibuscumque se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur, motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuo, sed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex respectu distantiae corporum à centro illo communi atque respectu distantiae totius inter corpora.*

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, (g) tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eadem sunt, ac si à corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam datur ratio distantiae corporis utriusvis à centro illo communi ad distantiam inter corpora, dabitur ratio cuiusvis potestatis distantiae unius ad eandem potestatem distantiae alterius; ut ratio quantitatis cuiusvis, quæ ex unâ distantia & quantitibus datis utcumque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ distantia, & quantitibus totidem datis, datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, sit directe vel inverse ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiae potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hac distantia & quantitibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe inidem vel inverse ut corporis attracti distantia à centro illo communi, vel ut eadem distantiae hujus potestas, vel denique ut quantitas ex hac distantia & analogis quantitibus datis similiter derivata. (h) Hoc est, vis trahentis eadem erit lex respectu distantiae utriusque. Q. E. D.

P R O-

(g) \* Tendens ad commune gravitatis centrum, est enim communis intersectio omnium rectarum quæ corpora revolvantia jungunt, & secundum quas, vires quibus corpora se mutuo trahunt, diriguntur.

(h) \* Hoc est vis trahentis eadem erit lex &c. Sit (in fig. prop. 58.)  $TQ = x$ ,  $CQ = y$ , &  $x$  ad  $y$  in ratione datâ  $a$  ad  $b$ , seu  $x = \frac{ay}{b}$ , vis quâ corpora S, P

Fff 2

in



## PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

*Corporum duorum, quæ viribus quadrato distantiae suæ recipro-  
cè proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur,  
determinare motus.*

Corpora ( *per theorema novissimum* ) perinde movebuntur ;  
ac si à corpore tertio in communi gravitatis centro consti-  
tuto traherentur ; & centrum illud ipso motus initio quiescet  
per hypothesin ; & propterea ( *per legum corol. 4.* ) semper  
quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum ( *per prop.  
xxv.* ) perinde ac si à viribus ad centrum illud tendentibus  
urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuò trahen-  
tium. *Q. E. I.*

## PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

*Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiae suæ recipro-  
cè proportionalibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secun-  
dum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare  
motus.*

( i ) Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis  
motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii, quod  
unà cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non  
corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem  
subsequentes ( *per legum corollarium quintum, & theorema no-  
vissi-*

in locis T, Q se mutuò trahunt sit ut  $x^m$ ;

erit  $x^m = \frac{a^m y^m}{b^m}$ , adeoque eadem vis

etiam ut  $x^m$ , ob datam rationem  $a^m$ , ad  
 $b^m$ , cumque vis quæ corpora se mutuò tra-  
hunt æqualis sit vi quæ ad commune gra-  
vitatis centrum C urgentur, erit quoque  
vis ad C tendens ut  $y^m$ . Sit nunc vis quæ  
corpora se mutuò trahunt ut  $c x^m + e x^m$ ,  
&  $c, e$  quantitates datæ, erit  $c x^m + e x^m$

$= \frac{c a^m y^m}{b^m} + \frac{e a^m y^m}{b^m}$ , ideoque vis ad C

tendens ut  $\frac{c a^m y^m}{b^m} + \frac{e a^m y^m}{b^m}$

( i ) \* Ex datis corporum motibus abso-  
lutis sub initio, datur uniformis motus ab-  
solutus centri communis gravitatis ( 67, 68,  
69 ) & hinc datur motus spatii quod unà  
cum hoc centro & eadem cum illo celeri-  
tate moveretur uniformiter in directum, nec  
non corporum motus initiales respectu hujus  
spatii.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 413

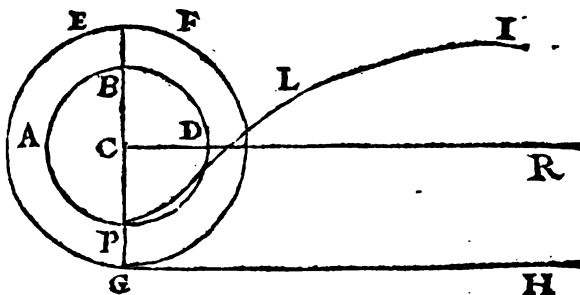
vissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum De Mo-  
unà cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora TU COR-  
non traherent se mutuo, sed à corpore tertio sito in centro il- PORUM.  
lo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobi- LIBER  
li, de loco dato secundum datam rectam, datâ cum velocitate PRIMUS:  
exeuntis, & vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, PRO P.  
(<sup>b</sup>) determinandus est motus per problema nonum & vicesi- LXXIII.  
mum sextum: & (<sup>l</sup>) habebitur simul motus corporis alterius PROBL.  
circum idem centrum. (<sup>m</sup>) Cum hoc motu componendus est XXXIX.  
uniformis ille systematis spatii & corporum in eo gyantium mo-  
tus progressivus supra inventus, & habebitur motus absolutus  
corporum in spatio immobili. Q. E. I.

(k) \* *Determinandus est motus per  
probl. 9. si corpora projiciantur secun-  
dum directionem quæ cum eorum distantia  
non coincidat, & per probl. 26. si coin-  
cidat directio projectionis cum distantia  
corporum.*

(l) \* *Et habebitur simul motus corpo-  
ris alterius è regione, si ex corpore cu-  
jus locus inventus est, per centrum gra-  
vitatibus commune duorum, agatur recta  
quæ ita determinetur ut sit corpus cujus  
locus quaeritur ad corpus aliud ut distantia  
data hujus à centro gravitatis communi  
ad eam rectam, in extremo hujus rectæ  
erit locus corporis quaeritus (60).*

(m) 493. *Cum hoc motu componendus est  
66. In hypothefi hujus problematis, cor-  
pora duo circa commune gravitatis centrum  
ceu umbilicum sectiones conicas descri-  
bunt (per cor. 2. prop. 58.) & satis est  
(ex uotâ superiori) unius corporis mo-  
tum determinare. Itaque, exempli gra-  
tia, corpus P circulum PABD unifor-  
miter describat intereadum circuli cen-  
trum C, cum ipsius circuli plano æqua-  
biliter movetur per rectam CR diame-  
tro PB perpendicularem, fitque semper  
circuli planum mobile in plano hujus sche-  
matis immoto. In linea CP capiatur  
CG ad CP in ratione velocitatis cen-  
tri C per lineam CR progredientis, ad  
velocitatem corporis P in circuli peri-  
pheriâ revolvētis, rota GEF centro C  
& radio CG descripta super regulam GH  
ad GC normalem progrediatur revolen-*

do circa axem suam; & punctum P in  
plano circuli GEF immotum describet in-  
terea trochoidem PLI quæ erit trajecto-  
ria quam corpus P motu absoluto de-  
scribit, (ut patet ex prop. 31. & nos.  
367). Hâc enim ratione centrum C per-  
curreret spatium CR = GH = semiperiphe-  
ria rotæ GEF, eodem tempore quo punc-  
tum P revolvetur per totam semiperiphe-  
riam PAB; eritque proinde velocitas cen-  
tri C per lineam CR ad velocitatem  
puncti vel corporis P in peripheriâ cir-  
culi PAB ut semirota ad semicirculum;  
hoc est, ut radius CG ad radium CP.  
Hinc si velocitas centri C æqualis sit ve-



locitati corporis P in circulo suo revol-  
ventis, trochoides PLI erit cyclois vul-  
garis; si velocitas centri C major exte-  
rit, erit PLI trochoides oblongata, si ve-  
locitas centri C minor, erit PLI trochoides  
decurtata.

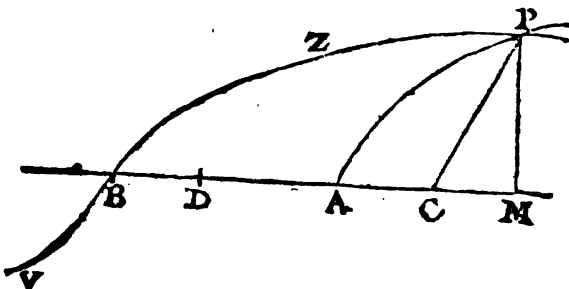
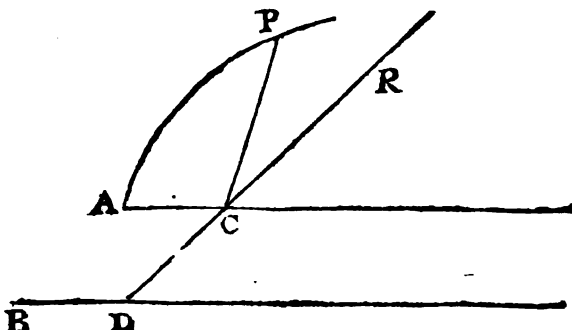
# 414 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXIII.  
PROBL.  
XXXIX.

Sit nunc AP sectio quævis conica cu-  
jus vertex A, umbilicus seu virium & gra-  
vitatæ commune centrum C, axis trans-  
versus AC, centrum C uniformiter mo-  
veatur in rectâ DR positione datâ, &  
cum illo planum curvæ APC, itâ trans-  
feratur in plano hujus schematis immo-  
to, ut axis AC, rectæ BD, positione  
datæ sit semper parallelus. Dum corpus  
P in curvâ AP revolvens est in vertice  
A, fit C in D & A in B, ex datâ  
velocitate uniformi centri C in lineâ DR,  
dabitur spatium DC quod centrum illud  
C dato tempore describit, nec non po-  
sitiō curvæ AP, capiatur (per prop. 30.  
vel 31. ejusve scholium) area APC rec-  
tæ datæ DD seu tempori proportionalis &  
obtinēbitur locus absolutus corporis P, hoc  
est, punctum trajectoriæ quam corpus P  
in plano hujus schematis immoto describit.

Sit AP parabola, & umbilicus C,  
cum plano APC uniformi motu progre-  
diatur in axe BC, dum corpus P est in  
vertice parabolæ A, fit umbilicus C in  
D & vertex A in B, & trajectoria BZP,  
quam corpus P, in plano hujus chartæ  
immoto describit, erit parabola secundi  
generis quæ cubica dici solet. Nam fit  
AC, seu BD = p, & proindē parabolæ  
AP, latus rectum = 4p (per theor. 2<sup>am</sup>.  
de parabolâ). PM ad axem AB ordina-  
tim applicatâ = y, BM = x, erit (ex naturâ  
Parabolæ, per theor. 1<sup>am</sup>. de Parabolâ)

$$\begin{aligned} AM &= \frac{yy}{4p}, \text{ adeoque } BA = DC = x = \\ \frac{yy}{4p} &= \frac{4px - yy}{4p}, \text{ CM (sive AM - AC)} \\ &= \frac{yy - 4ppy}{4p}. \text{ Porro (ex Archimedo} \\ \text{prop. 17. de quadr. Parab. quæ est theor.} \\ \text{4<sup>am</sup>. de parabolâ)} \text{ area APM} &= \frac{2}{3} AM \times PM \\ &= \frac{2y^3}{12p}, \text{ area trianguli CPM} = \frac{1}{2} CM \times PM \\ &= \frac{y^3 - 4ppy}{8p}; \text{ undē area APC} = \text{APM} - \\ \text{CPM} &= \frac{y^3 + 12ppy}{24p}. \text{ Est autem area} \end{aligned}$$



APC, tempori quo describitur proportio-  
nalis, seu ut linea DC vel BA =  $\frac{4px - yy}{4p}$ ,

quarē si fuerit  $\frac{a}{b}$  quantitas constans, erit  
 $\frac{y^3 + 12ppy}{24p} = \frac{4px - 4yy}{24p}$ ; hoc  
est  $y^3 + 12ppy + 44pyy = 44px$ , aqua-  
tio ad parabolam cubicam BZP, quæ  
crura habet contraria BZ, BV in infi-  
nitum progredientia.

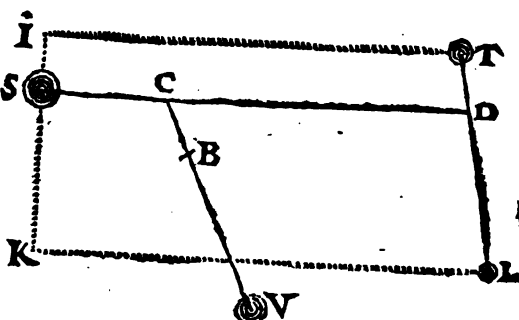
PROQ.

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

*Viribus quibus corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum à centris: requiruntur motus plurium corporum inter se.*

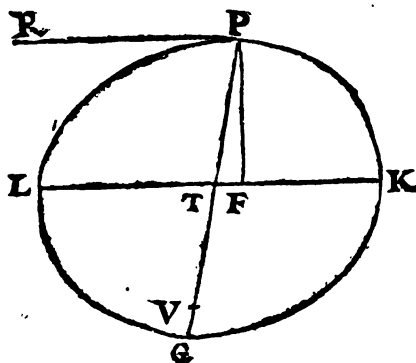
DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROP. LXIV.  
PROBL. XL.

Ponantur primo corpora duo  $T$  &  $L$  commune habentia gravitatis centrum  $D$ . Describent hæc ( per corollarium primum theorematismatis 21. ) ellipses centra habentes in  $D$ , quarum magnitudo <sup>(n)</sup> ex problemate v. innotescit.



Trahat jam corpus tertium  $S$  priora duo  $T$  &  $L$  viribus acceleratricibus  $ST$ ,  $SL$ , & ab ipsis vicissim trahatur. Vis  $ST$ , ( per legum corol. 2. ) resolvitur in vires  $SD$ ,  $DT$ ; & vis  $SL$  in vires  $SD$ ,  $DL$ . Vires <sup>(o)</sup> autem  $DT$ ,  $DL$ , quæ sunt

( n ) 494. Ex problemate 5. innotescit. Si enim corpus aliquod de loco dato  $P$  exeat cum datâ velocitate & secundum datam directionem  $PR$  ut ellipsim  $PLGK$ , circa centrum  $T$  datum describat, recta  $PR$  positione datâ ellipsim tanget in  $P$ ; ideòque diameter  $LK$ , ipsi  $PR$  parallela ( prop. 32. Lib. I. Conic. Apoll. sive Lem. IV. de Conic. & Theor. I. de Ell. ) dabitur positione. Præterea, si ex puncto  $P$  ad diametrum  $LK$  demittatur perpendicularum  $PF$ , erit vis centripeta data quâ corpus versus  $T$  urgetur secundum directionem  $PT$  ad partem vis illius quæ juxta directionem  $PF$ , agit, ut  $PT$  ad  $PF$ , proindeque pars illa vis centripetæ dabitur. Datâ autem vi centripetâ juxta directionem  $PF$  urgente, datâque corporis de loco  $P$  exeuntis velocitate in lineâ  $PR$ , ad  $PF$  perpendiculari, dabitur radius circuli ellipsim osculantis in  $P$ , quam corpus  $P$  cum hac velocitate atque vi centripetâ potest describere ( 199, ) & hinc dabitur altera diameter conjugata

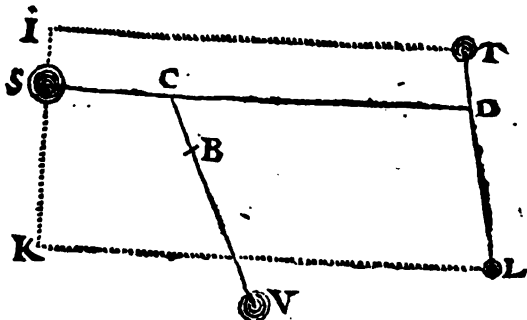


$LK$ ; & ellipsis describi poterit ( vide Probl. de Ellipsi p. 130 ).

( o ) \* Vires autem  $DT$ ,  $DL$ , quæ sunt ut ipsarum summa  $TL$  &c. Est enim  $DT$  ad  $TL$  in ratione datâ corporis  $L$  ad summam corporum  $T+L$ , &  $DL$  ad  $TL$ , in ratione datâ corporis  $T$  ad summam corporum  $T+L$  ( 60 ); quare vires  $DT$ ,  $DL$ , in quâcumque positione corporum  $T$  &  $L$ , sunt ut  $TL$ .

# 416 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO- sunt ut ipsarum summa  $T L$ , atque ideo ut vires acceleratri-  
TU COR- ces quibus corpora  $T$  &  $L$  se mutuo trahunt, additæ his viri-  
PORUM. bus corporum  $T$  &  $L$ , prior priori & posterior posteriori,  
LIBER componunt vires distantis  
PRIMUS.  $D T$  ac  $D L$  proportiona-  
PROP. les, ut prius, sed viribus  
LXIV. prioribus majores; ideo-  
PROBL. que (per corol. 1. prop.  
XL. x. & corol. 1. & 8. prop.  
1 v.) efficiunt ut corpo-  
ra illa describant ellipses  
ut prius, sed motu cele-  
riore. Vires reliquæ acceleratrices  $S D$  &  $S D$ , (p) actionibus  
motricibus  $S D \times T$  &  $S D \times L$ , quæ sunt ut corpora, trahendo  
corpora illa æqualiter & secundum lineas  $T I$ ,  $L K$ , ipsi  
 $D S$  parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt  
ut ipsa æqualiter accedant ad lineam  $I K$ ; quam ductam concipe  
per medium corporis  $S$ , & lineæ  $D S$  perpendiculararem. Impedietur  
autem iste ad lineam  $I K$  accessus (q) faciendo ut  
systema corporum  $T$  &  $L$  ex unâ parte, & corpus  $S$  ex alterâ,  
justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis cen-  
trum  $C$ . (r) Tali motu corpus  $S$ , eo quod summa virium  
motricium  $S D \times T$  &  $S D \times L$ , distantia  $C S$  proportiona-  
lium, tendit versus centrum  $C$ , describit ellipsin circa idem  
 $C$ ;



(p)\* Actionibus motricibus  $S D \times T$ ;  
&  $S D \times L$  (per def. 8. & not. 12.) quæ  
sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqua-  
liter ob æqualem vim acceleratricem  $S D$ ,  
ut sit in corporibus gravibus, quæ licet  
massis inæqualia, vi tamen gravitatis acce-  
leratrice, cadendo æqualiter acceleran-  
tur.

(q)\* Faciendo ut systema corporum  
 $T$ , &  $L$ , (seu  $D$  centrum gravitatis com-  
mune ipsorum) ex unâ parte, & corpus  $S$   
ex alterâ, justis cum velocitatibus in dato  
plano secundum directiones parallelas &  
contrarias impressis gyrentur circa  $C$  com-  
mune gravitatis centrum trium corporum.

(r)\* Tali motu corpus  $S$  &c. Corpus  
 $S$  à corporibus  $T$  &  $L$  trahitur viribus  
quæ sunt inter se ut  $S T \times T$  &  $S L \times L$   
(ex hyp.) & per resolutionem virium cor-  
pus  $S$  a corporibus  $T$  &  $L$  versus  $D$  &  
 $C$  juxta directionem  $S D$  seu  $S C$  tra-  
hitur viribus quæ sunt inter se ut  $S D \times T$   
&  $S D \times L$ , hoc est, vi quæ est ut  $S D \times T + L$ ,  
adeoque ut  $S D$ , ob datam corporum sum-  
mam  $T + L$ , & ut  $C S$ , ob datam ra-  
tionem  $S D$  ad  $C S$ , (61). Corpus idem  
 $S$  juxta directiones oppositas ipsis  $D T$ ,  
 $D L$  parallelas, trahitur viribus quæ sunt  
inter se ut  $D T \times T$  &  $D L \times L$ , hoc est,  
viribus æqualibus (60) quæ proinde nul-  
lam

$C$ ; & punctum  $D$ , ob proportionales  $CS$ ,  $CD$ , describet ellipsin consimilem è regione. Corpora autem  $T$  &  $L$  viribus motricibus  $SD \times T$  &  $SD \times L$ , prius priore, posterius posteriore, æqualiter & secundum lineas parallelas  $TI$  &  $LK$ , ut dictum est, attracta, pergunt (*per legum corollarium quintum & sextum*) circa centrum mobile  $D$  ellipses suas describere, ut prius. *Q. E. I.*

Addatur jam corpus quartum  $V$ , & (<sup>1</sup>) simili argumento concludetur hoc & punctum  $C$  ellipses circa omnium commune centrum gravitatis  $B$  describere; manentibus motibus priorum corporum  $T$ ,  $L$  &  $S$  circa centra  $D$  &  $C$ , sed acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. *Q. E. I.*

(<sup>1</sup>) Hæc ita se habent, etsi corpora  $T$  &  $L$  trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunt mutue omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantie ductæ in corpora trahentia, & (<sup>u</sup>) ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum  $B$ , in plano immobili describunt. *Q. E. I.*

PRO-

lam mutationem producant. Quare cum systema corporum  $T$  &  $L$ , seu ipsorum commune centrum gravitatis  $D$ , versus  $S$  seu  $C$  trahatur quoque vi quæ est ut  $SD$ , ac proinde ut  $CD$  (61), patet quod corpus  $S$ , ex una parte, & punctum  $D$  ex alterâ describant circum  $C$  ellipses consimiles, si iustis cum velocitatibus, ut supra dictum est, projiciantur.

(<sup>1</sup>) \* *Simili argumento*, considerando corpora  $T$  &  $L$  tanquam corpus unicum in centro  $D$  positum, concludetur &c.

(<sup>1</sup>) \* *Hæc ita se habent.* Nam propositionis demonstratio non supponit vires acceleratrices quibus corpora  $T$  &  $L$  ad distantiam datam trahunt corpus  $S$ , esse æquales viribus acceleratricibus quibus se mutuo ad eandem distantiam trahunt. Unde manet demonstratio, etsi corpus  $S$  à

Tom. I.

corpore v. gr.  $T$  ad distantiam datam trahatur majori vel minori vi acceleratrice quam corpus  $L$  ad eandem distantiam.

(<sup>u</sup>) \* *Et ex præcedentibus facile deducitur.* Vis enim seu actio acceleratrix, quæ corpus  $T$  versus  $D$  trahitur, est (*ex Dem. & Hyp.*) ut  $TL \times L + TD \times S$ , hoc est, ut  $TD \times S + T + L$ , ob  $TL \times L = TD \times T + L$  (60), & vis acceleratrix quæ punctum  $D$  versus  $C$  trahitur, est (*ex Dem. & Hyp.*) ut  $SD \times S$ , hoc est ut  $CS \times S + CD \times S$ ; sed (61)  $CS \times S = CD \times T + L$ , adeoque vis acceleratrix quæ punctum  $D$  versus  $C$  trahitur, est ut  $CD \times T + L + S$ . Quare vis acceleratrix quæ corpus  $T$  versus  $D$  trahitur, est

G g g. ad

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP.

LXV.

THEOR.

XXV.

# PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

*Corpora plura, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum ab eorundem centrâ, moveri posse inter se in ellipsis; & radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quam proximè.*

In propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in ellipsis accuratè. Quo magis recedit lex virium a lege ibi positâ, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri potest, ut corpora, secundum legem hic positam se mutuo trahentia, moveantur in ellipsis accuratè, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multum ab ellipsis errabitur.

*Cas. 1.* Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantque ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum ( *per legem corol. quartum* ) vel quiescit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibilibiter ab hoc centro: & maximum illud vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum, sine errore sensibili; minora autem revolvantur circa hoc maximum in ellipsis, atque radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; ( *γ* ) nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maxi-

ad vim acceleratricem quâ punctum D trahitur versùs C, ut T D ad C D, hoc est ut distantia à punctis ad quæ illæ vires diriguntur. Corpus igitur T ad punctum D, & punctum D ad C trahuntur viribus absolutis æqualibus, hoc est, eodem modo ad sua respectivè centra D & C trahuntur quo traherentur, si circa idem virium centrum ad distantias T D, D C revolverentur, sed in hoc casu æqualibus temporibus periodicis ellipses suas describerent ( *per cor. 2. prop. X.* ) ergò & in illo casu corpus T cir-

cà D & punctum D circa C, æqualibus temporibus periodicis suas ellipses describunt. Idem eodem modo demonstratur, cum plura sunt corpora revolvantia.

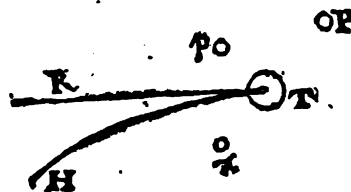
( *γ* ) \* *Nisi quatenus errores inducuntur &c.* Nam si corpus maximum à communi illo gravitatis centro non erraret, nullaque esset actio minorum corporum in se mutuo, quodlibet exiguum corpus revolveretur in ellipsi circa maximum, atque radiis ad idem ductis describeret areas temporibus proportionales ( *per cor. 2. & 3. prop. 58.* ).

ximi à communi illo gravitatis centro, vel per actiones mino- DE Mo-  
rum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora TU COR-  
minora, usque donec error iste, & (\*) actiones mutuae sint da- PORUM.  
tis quibuscumque minores; atque ideo donec orbes cum ellipsis qua- LIBER  
drent, & areae respondeant temporibus, sine errore, qui non sit PRIMUS.  
minor quovis dato. Q. E. O. PROP.  
LXV.

Cas. 2. (a) Fingamus jam systema corporum minorum mo- THEOR.  
do jam descripto circa maximum revolvendum, aliudve quod-XXXV.  
vis duorum circum se mutuo revolvendum corporum systema  
progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alte-  
rius longè maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad la-  
tus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora  
secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corpo-  
rum ad invicem, sed ut systema totum, servatis partium mo-  
tibus inter se, simul transferatur, efficiunt: manifestum est quod;  
ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus orietur  
mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum  
acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad in-  
vicem: secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractio-  
nes

(2) \* Et actiones mutuae sint datæ qui-  
busvis minores respectu actionis corporis  
maximi in corpora minora; nam cum cor-  
poris vis attractiva absoluta hic suppona-  
tur materiæ proportionalis, diminuta cor-  
poris massa, vis attractiva in eadem ra-  
tione minuitur.

(a) \* Fingamus jam corporum mino-  
rum, P, p,  $\pi$ , modo jam descripto circa  
maximum T revolvendum systema progre-  
di uniformiter in directum, seu totius sys-  
tematis commune gravitatis centrum T;  
progredi uniformiter per rectam TR, &  
interea vi corporis alterius longè maximi  
S, & ad magnam distantiam siti, urgeri  
ad latus secundum rectas PS, p s,  $\pi$  S;  
TS, atque à recta TR retrahi & in  
curvam TH cogi &c.





DE Mo- nes omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se re-  
 TU COR- ciprocè ut quadrata distantiarum; & augendo corporis maxim  
 PORUM. distantiam, donec reëtarum ab hoc ad reliqua ductarum diffe-  
 LIBER rentiæ respectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem  
 PRIMUS. minores sint, quam datæ quævis; perseverabunt motus partium  
 P R O P. systematis inter se sine erroribus, qui non sint quibuscvis datis  
 L X V. minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invi-  
 THEOR. cem distantiam, systema totum ad modum corporis unius at-  
 X X V. trahitur; movebitur idem hâc attractione ad modum corporis  
 unius; hoc est, <sup>(b)</sup> centro suo gravitatis describet circa corpus  
 maximum sectionem aliquam conicam (*viz.* <sup>(c)</sup> Hyperbolam  
 vel parabolam attractione languidâ, ellipsin fortiore) & radio ad  
 maximum ducto describet areas temporibus proportionales, sine  
 ullis erroribus, nisi quas partium distantia, perexiguæ fane &  
 pro lubitu minuendæ, valeant efficere. Q. E. O.

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in  
 infinitum.

*Corol. 1.* <sup>(d)</sup> In casu secundo, quo propius accedit cor-  
 pus omnium maximum ad systema duorum vel plurium, eo  
 magis turbabuntur motus partium systematis inter se; prop-  
 terea quod linearum à corpore maximo ad has ductarum jam  
 major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæ-  
 qualitas.

*Corol. 2.* Maximè autem turbabuntur, ponendo quod at-  
 tractiones acceleratrices partium systematis, versus corpus om-  
 nium maximum, <sup>(e)</sup> non sint ad invicem reciprocè ut quadra-  
 ta

<sup>(b)</sup> \* Hoc est, centro suo gravitatis, in  
 quo totum systema gravium P, p,  $\pi$ , T,  
 unitum ac contractum intelligitur (71).

<sup>(c)</sup> \* Hyperbolam vel parabolam attrac-  
 tione languidâ, ellipsim vel circulum fortio-  
 re; manente enim velocitate corporis cir-  
 câ centrum virium S projecti, & circu-  
 lum vel ellipsim describentis minui de-  
 bet illius ad centrum S attractio, ut ad  
 eandem distantiam possit Parabolam de-  
 scribere, & magis adhuc decrescere il-  
 lam attractionem oportet, ut describat Hy-  
 perbolam (per cor. 7. prop. 16. & Dem.  
 prop. 17).

<sup>(d)</sup> \* In casu 2<sup>o</sup>. quo propius acce-  
 dit corpus omnium maximum ad systema duo-  
 rum vel plurium corporum, eo magis re-  
 cedit à calu ubi perturbatio est nulla, nem-  
 pé quando corpus S infinite distat, ergo  
 eo magis turbabuntur motus partium syste-  
 matis inter se.

<sup>(e)</sup> \* Non sint ad invicem reciprocè &c.  
 Exempli causâ; Si corpora P, p, diversis le-  
 gibus traherentur, P, v. gr. in ratione re-  
 ciprocâ quadrati distantia suâ à corpore  
 maximo S; p verò in ratione cubi dis-  
 tantia.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 421

ta distantiarum à corpore illo maximo; (f) præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum à corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, perturbat motus inter se necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

*Corol. 3.* Unde si systematis hujus partes in ellipsis, vel circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eadem à viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissimè, aut urgentur æqualiter, & secundum lineas parallelas quamproximè.

## PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

*Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuo trahant; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quam si maximum illud vel à minoribus non attractum quiescat, vel multò minus vel multò magis attractum, aut multò minus aut multò magis agitetur.*

Liquet fere ex demonstratione corollarii secundi propositionis

G g g 3

præ-

(f) \* Præsertim si proportionis hujus inæqualitas &c. Exempli causâ, si inæqualitas attractionum acceleratricum in corporibus P, p, major sit inæqualitate distantiarum S P, Sp; Nam si illa inæqualitas

tes attractionum & distantiarum essent in datâ ratione, evanescente distantiarum S P, S p differentiâ, quando corpus maximum S longissimè distat, evanesceret quæque attractionum acceleratricum inæqualitas.

DE MO. præcedentis; sed argumento magis distincto & latius cogente sic  
TU COR. evincitur.

PORUM.

LIBER

PRIMUS.

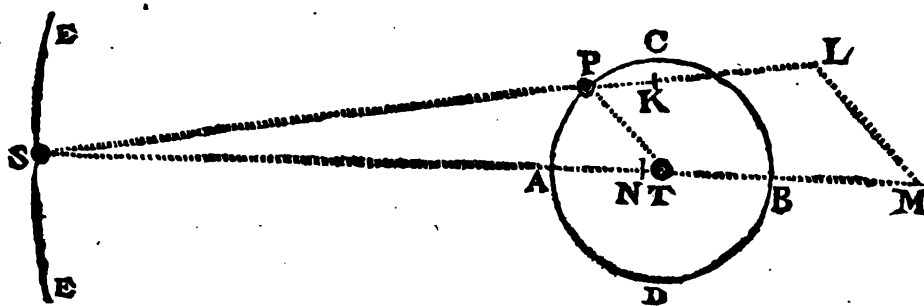
PROP.

LXVI.

THEOR.

XXVI.

*Cas.* 1. Revolvantur corpora minora  $P$  &  $S$  in eodem plano circa maximum  $T$ , quorum  $P$  describat orbem interiorem  $PAB$ , &  $S$  exteriorem  $ESE$ . Sit  $SK$  mediocris distantia corporum  $P$  &  $S$ ; & corporis  $P$  versus  $S$  attractio acceleratrix, in mediocri illâ distantia, exponatur per eandem. In duplicatâ ratione  $SK$  ad  $SP$  capiatur  $SL$  ad  $SK$ , & (g) erit  $SL$  attractio acceleratrix corporis  $P$  versus  $S$  in distantia quâvis  $SP$ . Junge  $PT$ , eique parallelam age  $LM$  occurrentem  $ST$  in  $M$ ;



& attractio  $SL$  resolvetur (per legum corol. 2.) in attractiones  $SM$ ,  $LM$ . Et sic urgebitur corpus  $P$  vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad  $T$ , & oritur à mutuâ attractione corporum  $T$  &  $P$ . Hâc vi solâ corpus  $P$  circum corpus  $T$ , five immotum, five hâc attractione agitatum, describere deberet & areas, radio  $PT$ , temporibus proportionales, & ellipsin cui umbilicus est in centro corporis  $T$ . Patet hoc per prop. XI. & corollaria 2. & 3. theor. XXI. Vis altera est attractionis  $LM$ , quæ quoniam tendit à  $P$  ad  $T$ , superaddita vi priori coincidet cum ipsâ, & sic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales describantur per corol. 3. theor. XXI. At (h) quoniam non est quadrato distantia  $PT$  reciproce

cè

(g) \* Et erit  $SL$  attractio acceleratrix &c. Est enim (ex Hyp.) ut  $SP^2$  ad  $SK^2$  ita attractio acceleratrix in  $K$  (quam exhibet linea  $SK$ ) ad attractionem acceleratricem in  $P$ , quam proinde exhibebit linea  $SL$ .

(h) 495. At quoniam non est quadrato distantia  $PT$  reciproce proportionalis. Est enim (ex consty.)  $SK^2 : SP^2 = SL : SK$ , adeoque  $SK : SP = SL \times SK : SK \times SP = SL : SP$ . Sed ob triangula  $MLS$ ,  $TPS$  simi-

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 423

cè proportionalis, componet eâ cum vi priore vim ab hâc proportionē aberrantem, idque eo magis, quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per prop. XI. & per corol. 2. theor. XXI.) vis, quâ ellipsis circa umbilicum  $T$  describitur, tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiae  $PT$  reciprocè proportionalis; vis illa composita, aberrando ab hâc proportionē, faciet ut orbis  $PAB$  aberret à formâ ellipsæos umbilicum habentis in  $T$ ; idque eo magis, quo major est aberratio ab hâc proportionē; atque ideo etiam quo major est proportio vis secundæ  $LM$  ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia  $SM$ , trahendo corpus  $P$  secundum lineam ipsi  $ST$  parallelam, componet cum prioribus vim, quæ non amplius dirigitur à  $P$  in  $T$ ; quæque ab hâc determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus  $P$ , radio  $TP$ , areas non amplius temporibus proportionales describat; atque ut aberratio ab hâc proportionalitate tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis verò  $PAB$  aberrationem à formâ ellipticâ præfatâ hâc vis tertia duplici de causâ adaugebit, tum quod non dirigatur à  $P$  ad  $T$ , (i) tum etiam quod non sit reciprocè proportionalis quadrato distantiae  $PT$ . Quibus intellectis, manifestum est, quod areae temporibus tum maximè fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod orbis  $PAB$  tum maximè accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipuè vis tertia fit minima, vi primâ manente.

Exponatur corporis  $T$  attractio acceleratrix versus  $S$  per lineam

similia  $SL:SP=LM:PT$ ; ergo  $LM:PT=SK:SP$ , & proinde vis  $LM$  est ut  $\frac{SK \times PT}{SP}$ , seu datâ  $SK$ , ut  $\frac{PT}{SP}$ ; undè crescente distantia  $PT$  crescit vis  $LM$ .

(i) 496. Tum etiam quod non sit reciprocè proportionalis &c. Nam  $PT$  est ad  $ST$  ut vis  $LM$  est ad vim  $SM$ , sed (495) vis  $LM$  est ut

$\frac{S'K \times P'T'}{SP}$ , & proinde vis  $SM$  est ut  $\frac{SK \times ST}{SP}$ . Quare vis  $SM$ , datâ  $SK$  &

$ST$ , est ut  $\frac{1}{SP}$ .

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

DE MO neam  $SN$ ; & si attractiones acceleratrices  $SM$ ,  $SN$  æquales  
 TU COR- essent; hæ, trahendo corpora  $T$  &  $P$  æqualiter & secundum  
 PORUM. lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Ii-  
 LIBER dem jam forent corporum illorum motus inter se (*per legum*  
 PRIMUS. PRO P. *corol. v i.*) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione  
 LXVI. si attractio  $SN$  minor esset attractione  $SM$ , tolleretur ipsa at-  
 THEOR. tractionis  $SM$  partem  $SN$ , & maneret pars sola  $MN$ , quâ  
 XXVI. temporum & arearum proportionalitas & orbitæ forma illa el-  
 liptica perturbaretur. Et similiter si attractio  $SN$  major esset  
 attractione  $SM$ , oriretur ex differentiâ solâ  $MN$  perturbatio pro-  
 portionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem  $SN$  reducitur  
 semper attractio tertia superior  $SM$  ad attractionem  $MN$ , at-  
 tractione primâ & secundâ manentibus prorsus immutatis: &  
 propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita  
 $PAB$  ad formam præfatam ellipticam tum maxime accedunt,  
 ubi attractio  $MN$  vel nulla est, vel quam fieri possit minima;  
 hoc est, ubi corporum  $P$  &  $T$  attractiones acceleratrices, factæ  
 versùs corpus  $S$ , accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem;  
 id est, ubi attractio  $SN$  non est nulla, neque minor mini-  
 mâ attractionum omnium  $SM$ , sed inter attractionum omnium  
 $SM$  maximam & minimam quasi mediocris; hoc est, non mul-  
 to major neque multo minor attractione  $SK$ . *Q. E. D.*

*Cas. 2. (k)* Revolvantur jam corpora minora  $P$ ,  $S$  circa  
 maximum  $T$  in planis diversis; & vis  $LM$ , agendo secundum  
 lineam  $PT$  in plano orbitæ  $PAB$  sitam, eundem habebit ef-  
 fectum ac prius, neque corpus  $P$  de plano orbitæ suæ deturba-  
 bit.

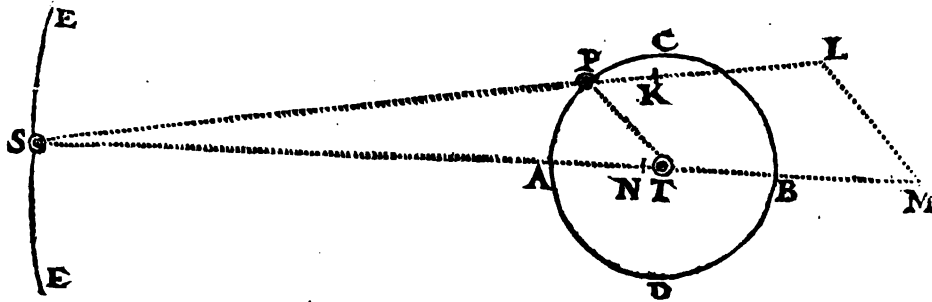
(k) 497. *Cas. 2.* Planum  $TESE$  cum hu-  
 jus schematis plano congruere supponatur,  
 orbitæ verò  $PAB$  planum alterâ sui parte,  
 v. gr.  $CAD$  suprà planum  $TESE$  emi-  
 nere, & altera parte  $DBC$  infrà planum  
 $TESE$  deprimi intelligatur, linea recta  
 $DC$  communis planorum  $TESE$  &  $PAB$   
 intersectio, linea nodorum dicitur, & il-  
 lius extrema puncta  $D$  &  $C$  nodi appellan-  
 tur. Nodi vel puncta quævis  $D$ ,  $C$  di-  
 cuntur esse in quadraturis seu aspectum qua-  
 dratum obtinere respectu corporis  $S$ , dum

sunt in lineâ rectâ ad  $ST$  in puncto  $T$  per-  
 pendiculari, quod in hoc casu corpus  $S$   
 & punctum  $C$  vel  $D$  sub angulo recto de  
 loco  $T$  videantur. Si super lineâ  $ST$  ere-  
 ctum intelligatur planum plano  $TESE$   
 verticale, sin:que puncta  $A$  &  $B$  in illo  
 plano verticali,  $A$  quidem inter corpora  
 $S$  &  $T$ ;  $B$  verò ultra  $T$ , punctum  $A$  di-  
 citur esse in conjunctione, & punctum  $B$   
 in oppositione respectu corporum  $S$  &  $T$ ;  
 & loca  $A$  &  $B$ , communi nomine syzigie  
 vocantur. Motus in longitudinem est quo  
 cor-

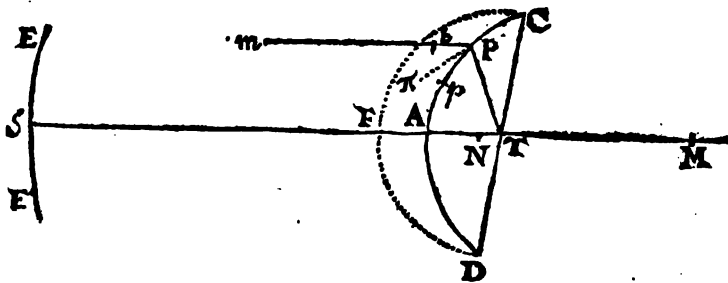
# PRINCIPIA MATHEMATICA. 425

bit. (1) At vis altera  $N-M$ , agendo secundum lineam quæ ipsi  $ST$  parallela est (atque ideo, quando corpus  $S$  versatur ex-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.



tra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ  $PAB$ ) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, indu-



corpus revolvens  $P$  à puncto suæ orbitæ dato; v. gr. à puncto  $C$  recedit per  $CPADB$ : motus in latitudinem est is quo corpus revolvens  $P$  ad planum immotum  $TESE$  accedit vel ab eo recedit. Si corporum revolventium  $P$  &  $S$  motus inter se conferantur, & utrumque in eandem plagam feratur, v. gr. ab Occidente in Orientem, motus in consequentia fieri dicitur; si verò alterum in unam plagam, alterum in alteram moveatur, motus unius in consequentia alterius vocatur in antecedentia, v. gr. motus ab Oriente in Occidentem in antecedentia fieri dicitur.

(1) \* At vis altera  $NM$  &c. Si orbitæ  $PAB$  (vid. fig. Newt.) pars  $ACB$  supra planum  $TESE$  elevata, pars verò altera  $ADB$  infra ipsum depressa intelligatur, ita ut linea nodorum  $AB$  coincidat cum lineâ  $TS$  sitque proinde corpus  $S$  in lineâ nodorum productâ, vis  $NM$  ut pote quæ in corpus  $P$  agit secundum lineam ipsi  $TS$  parallelam, jacebit in plano orbi-

Tom. I.

tæ  $PAB$ , & motum corporis  $P$  in latitudinem non perturbabit, hoc est, non efficiet ut corpus  $P$  ad planum  $TESE$  magis accedat aut ab eo recedat. Verùm si corpus  $S$  versatur extrâ lineam nodorum, vis  $NM$  inducet perturbationem motus in latitudinem. Sit enim  $CADT$  pars orbitæ quam corpus  $P$  exclusâ vi  $NM$  describeret supra planum  $TESE$  seu  $CFD$  eminens, sit  $CD$  linea nodorum,  $Pm$  recta æqualis & parallela  $NM$ ,  $p$  locus ad quem corpus  $P$  exclusâ vi  $NM$  tempusculo minimo perveniret,  $b$  locus in lineâ  $Pm$  ad quem corpus idem  $P$ , solâ vi  $NM$ , eodem tempusculo traheretur; corpus illud  $P$  duabus viribus impulsus, quarum altera agit secundum directionem  $Pp$  in plano  $CAD$  altera secundum directionem  $Pm$  ad planum  $CAD$  inclinam, motu composito describet lineam  $P\pi$  quæ non est in plano  $CAD$ .

H h h

## 426 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI. inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus  $P$  de plano suæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum  $P$  &  $T$  ad invicem situ, erit ut vis illa generans  $MN$ , ideoque minima evadet ubi  $MN$  est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio  $SN$  non est multo major, neque multo minor attractione  $SK$ . Q. E. D.

Corol. 1. (n) Ex his facile colligitur, quod, si corpora plura minora  $P, S, R$ , &c. revolvantur circa maximum  $T$ , motus corporis intimi  $P$  minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum  $T$  pariter à cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitur, atque à cætera se mutuo.

Corol. 2. In systemate vero trium corporum  $T, P, S$ , si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum; corpus  $P$ , radio  $PT$ , aream circa corpus  $T$  velocius describet prope conjunctionem  $A$  & oppositionem  $B$ , quam prope quadraturas  $C, D$ . Namque vis omnis qua corpus  $P$  urgetur & corpus  $T$  non urgetur, quæque non agit secundum lineam  $PT$  accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in consequentia vel in antecedentia dirigatur. (o) Talis est vis  $NM$ . Hæc in transitu corporis  $P$  à  $C$  ad  $A$  tendit in consequentia, motumque accelerat;

(n) \* Corollarium primum patet ex demonstratis cum duo tantum sunt corpora minora  $P, S$ ; addatur enim tertium corpus  $R$ , eodem modo demonstrabitur motum corporis intimi  $P$  minimè perturbari attractione ipsius  $R$ , ubi corpus maximum  $T$  pariter attrahitur à corpore illo  $R$ , ac corpus  $P$ , & ita de pluribus corporibus ratiocinari licet. Quare ex demonstratis facile colligitur quod si &c.

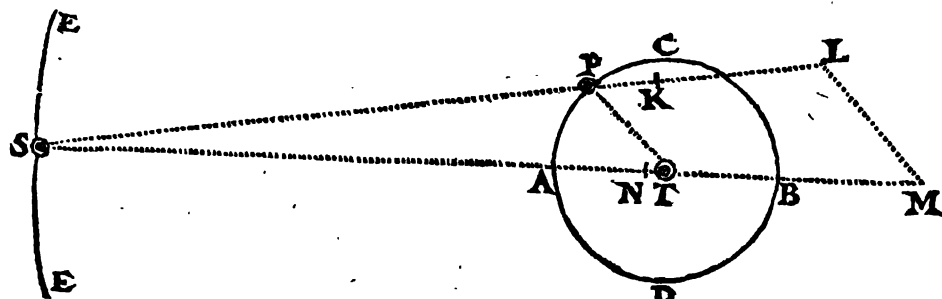
(o) 498. Talis est vis  $NM$ . Si supponamus orbem  $CADB$  (vid. fig. Newt.) esse circulo finitimum, & distantiam  $SD$  maximam respectu radii  $PT$ , erit fere  $SC = SK = ST = SN$ , & proinde  $NM = TM$ . Porro corpore  $P$  in quadraturis  $C, D$  versante, est  $SC = SP = SK$ ; quare cum sit, (per constr. prop. 66.)  $SL : SK = SK^2 : SP^2$ , erit in quadraturis  $SL = SK = SC$ , &  $LM$  coincidet cum  $CT$  seu  $PT$ , adeoque evanescet  $TM$  seu  $NM$ .

Nulla igitur erit virium  $SM, SN$ , in quadraturis differentia, & ideo corpus  $P$  reliquis viribus ad centrum  $T$  tendentibus agitatatum, radio vectore areas ibi describet temporibus proportionales. At ubi corpus  $P$  extra quadraturas est in hemiperipheriâ  $CAD$ , vis  $SM$  major est vi  $SN$  & corpus  $P$  virium differentia  $NM$  trahitur secundum directionem ipsi  $TS$  parallelam.

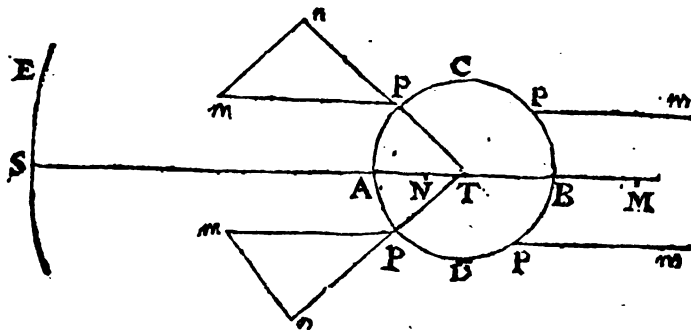
Sit  $Pm$  æqualis & parallela ipsi  $NM$ , & demisso ex  $m$  in radium  $TP$  productum perpendiculari  $mn$ , vis  $Pm$ , seu  $NM$ , in duas vires  $Pn, nm$  resolvitur, quarum altera  $Pn$  trahendo secundum directionem radii  $TP$ , corporis  $P$  motum in longitudinem nihil mutat, nec æquabilem arearum descriptionem turbat; altera vero  $NM$ , trahendo secundum directionem  $nm$ , radio  $TP$  perpendiculari, hoc est, secundum directionem tangentis in  $P$ , motum in longitudinem accelerat in primo qua-

## 427

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.



*Corol. 3.* Et eodem argumento patet quod corpus  $P$ , cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione & oppositione quam in quadraturis.



In altera hemiperipheriâ D B C, vis S M minor est vi S N, quoniam corpus P à corpore S longius distat quam corpus T unde si vires perturbantes ad solum corpus P referantur, virium S M, S N differentia N M negativa seu ablatitia erit, aut quod idem est, contrariâ directione ageat; Fingatur enim corpora T & P urgeri ambo vi S N ubique æquali & sibi parallela, pergent moveri inter se quasi omnino abesset illa vis per Cor. 6. Legum motûs, tum trahatur corpus P vi N M secundum directionem oppositam vi S N, ex eâ actione mutabuntur motus corporum T & P inter se, sed etiam ex eâ actione vis S N quæ

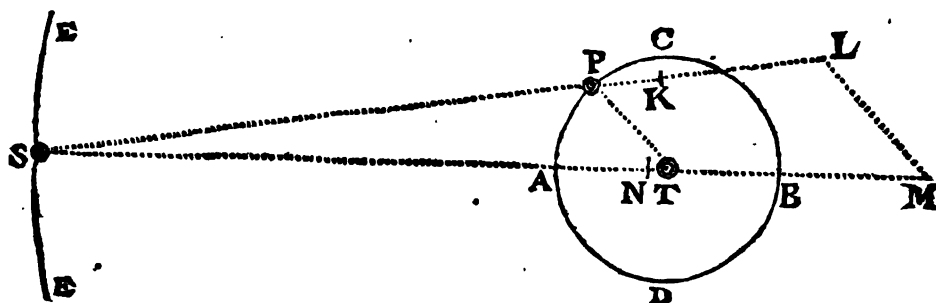
trahere corpus P fingebatur: reduceretur ad vim S M quæ est vis reverà agens dum vis S N agit in T, ergo si æstimentur motus corporum T & P inter se, quasi corpus P in hemiperipheriâ D B C urgeretur virium differentia N M in contrariam partem agente, obtinebuntur veræ mutationes motuum corporum T & P inter se, ex actionibus S N & S M ortæ, ideoque in posterum considerabitur corpus P in hemiperipheriâ D B C quasi urgeretur vi N M secundum directionem P m ipsi N M parallelam à P. versùs m agente; atque ideo, si vis P m in duas vires, ut in alterâ hemiperipheriâ factum est, resolvatur, manifestum erit motum in longitudinem in quadrante D B accelerari & in quadrante B C retardari.



# 428 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORP. LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

*Corol. 4.* Orbita corporis  $P$ , cæteris paribus, curvior est in quadraturis quam in conjunctione & oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt à recto tramite. Et (p) præterea vis  $KL$ , vel  $NM$ , in conjunctione & oppositione contraria est vi, quâ corpus  $T$  trahit corpus  $P$ ; ideoque vim illam minuit; corpus autem  $P$  minus deflectet à recto tramite ubi minus urgetur in corpus  $T$ .



*Corol. 5.* (q) Unde corpus  $P$ , cæteris paribus, longius recedat à corpore  $T$  in quadraturis, quam in conjunctione & oppositione. Hæc ita se habent excluso motu excentricitatis. Nam si orbita corporis  $P$  excentrica sit, excentricitas ejus (ut mox in hujus corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi apsidæ sunt in syzygiis; indeque fieri potest ut corpus  $P$ , ad apsidem summam appellens, absit longius à corpore  $T$  in syzygiis quam in quadraturis.

*Corol. 6.* Quoniam vis centripeta corporis centralis  $T$ , quâ corpus  $P$  retinetur in orbe suo, augetur in quadraturis per additio-

(p) 499. Et præterea vis  $KL$  &c. Iisdem positis quæ in notâ superiori, rectæ  $SL$ ,  $SM$  sunt fere parallelæ, ac proinde  $TM = PL$  &  $LM = PT$  quam proximè; quare coincidente  $P$  cum  $A$  &  $K$  cum  $T$ , fit  $LM = AT = PK$ , &  $NM$  seu  $TM = PL = AT + KL$ , &  $NM - LM = KL$ , hoc est, vis tota perturbans quâ corpus  $P$  in conjunctione  $A$  à corpore  $T$  verius  $S$  retrahitur, est ut  $KL$  quam proximè; vi enim  $LM$  trahitur  $P$  verius  $T$  & vi  $NM$  à corpore  $T$  verius  $S$  retrahitur. Idem

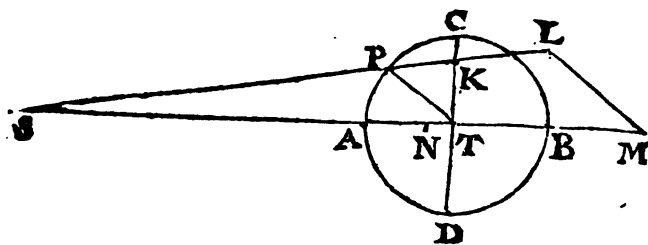
eodem modo demonstratur, corpore  $P$  in oppositione  $B$  posito.

(q) \* Unde corpus  $P$  &c. Nam cum orbita corporis  $P$  curvior sit in quadraturis  $C$  vel  $D$  quam in syzygiis  $A$  &  $B$  (per cor. 4.) necesse est, cæteris paribus, ut in syzygiis  $A$  &  $B$  depressior sit quam in quadraturis  $C$  &  $D$  ad instar ellipsæ cujus sit centrum  $T$  axis major  $CD$  axis minor  $AB$ . Hæc ita se habent; si, exclusis viribus perturbantibus, orbita corporis  $P$  fuerit circulus cujus centrum  $T$ .

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 429

ditionem vis  $LM$ , ac diminuitur in syzygiis per ablationem vis  $KL$ , & (1) ob magnitudinem vis  $KL$ , magis diminuitur quam augetur; est autem vis illa vi centripeta (*per corol. 2. prop. 1v.*) in ratione compositâ ex ratione simplici radii  $TP$  directè & ratione duplicatâ temporis periodici inversè: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis  $KL$ ; ideoque tempus periodicum, si maneat orbis radius  $TP$ , augeri, idque in subduplicatâ ratione, quâ vis illa centripeta diminuitur: atque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione sesquuplicatâ, (*per corol. vi. prop. 1v.*) Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus  $P$  minus semper & minus attra-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.



(1) 500. *Es ob magnitudinem vis KL*  
C. Si distantia mediocris  $SK$  vel  $ST$   
ingens fuerit respectu radii  $TP$  orbitæ  
 $PAB$ , in loco quovis corporis  $P$ , erit vis  
 $LM$  quam proximè ad vim  $N$  in ut sinus  
totus ad sinum triplum distantie angula-  
ris corporis  $P$  à quadraturâ proximâ.  
Nam ob ingentem distantiam corporis  $S$   
(*ex hyp.*) lineæ  $SL$ ,  $SM$  sunt fere paral-  
lelæ ac proinde  $LM = PT$ ,  $NM$  seu  $TM$   
 $= PL$ , &  $SP = SK$ ; cumque sit  $ST$  ad  
lineam quadraturarum  $CD$  perpendiculari-  
rit, erit etiam  $SK$  ad eandem normalis,  
& existente  $PT$  radio, erit  $PK$  sinus an-  
guli  $PTC$ , hoc est, sinus distantie angu-  
laris corporis  $P$  à quadraturâ proximâ  $C$ .  
Porro (*per prop. 66.*)  $SL: SK = SK^2:$   
 $SP^2$ , adeoque  $SL: SK = SK^2: SP^2$ ,  
 $SP^2: SP^2$ , hoc est,  $KL: SK = PK \times$   
 $SK + SP: SP^2 = PK \times 2SP: SP^2 = 2PK:$   
 $SP = 2PK: SK$ , ob  $SK = SP$ , &  $SK +$   
 $SP = 2SP$ . Quare erit  $KL = 2PK$ , &

$PL$  seu  $NM = 3PK$ , hoc est, vis  $LM$   
seu  $PT$  ad vim  $NM$  seu  $PL$  ut sinus to-  
tus  $PT$  ad  $3PK$  triplum sinum distantie  
angularis corporis  $P$  à quadraturâ proximi-  
mâ.

501. *Coroll.* Vis  $KL$  in conjunctione  
 $A$ , est ad vim similem in oppositione  $B$ ,  
ut  $AT$  ad  $TB$ , & si orbita  $PAB$  circula-  
ris fuerit vel circulo finitima, erit vis  
 $KL$  in syzygiis duplo major vi  $LM$  in  
quadraturis quam proxime. Nam corpo-  
re  $P$  in syzygiis versante, fit  $PK = AT$ ,  
 $= PT = LM$ , & proinde  $NM$  seu  $PL$   
fit  $= 3LM$ , &  $KL = 2LM$ . Tandem iis-  
dem positis, vis  $NM$  maxima est in sy-  
zygiis, quoniam ibi  $PK$  fit maxima, seu  
evadit  $= AT$ , &  $NM = 3AT$ .

Unde ob magnitudinem vis  $KL$  (500:  
501.) vis centripeta corporis centralis  
 $T$  magis diminuitur quam augetur, ideo-  
que centenda est pro absolute diminutâ  
ab actione corporis  $S$ .

H h h 3

## 430 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-attractum perpetuò recederet longius à centro *T*; & contra, TU COR- si vis illa augetur, accederet propius. Ergo si actio corporis FORUM. longinqui *S*, quâ vis illa diminuitur, (†) augeatur ac diminuat- LIBER tur per vices: augebitur simul ac diminuetur radius *TP* per vices; PRIMUS. & (†) tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione com- PROP. positâ ex ratione sesquuplicatâ radii, & ratione subduplicatâ, LXVI. quâ vis illa centripeta corporis centralis *T*, per incrementum THEOR. vel decrementum actionis corporis longinqui *S*, diminuitur vel XXVI. augetur. Co-

(†) \* *Augeatur ac diminuat per vi-*  
ces. Quoniam vis quâ corpus *P* trahitur  
à corpore *T*, est ejusdem corporis *P* vis  
centripeta quâ in orbitâ suâ retinetur; si  
remissor fuerit vis illa, corpus *P* minus  
attractum à centro *T* longius recederet;  
& contra, si augeatur vis illa, corpus *P*  
ad *T* propius accedet. Auctâ igitur ac-  
tione corporis *S* in *T* per accessum cor-  
poris *T* ad *S*, augetur vis *NM*, minui-  
turque vis centripeta corporis *P*, ac proin-  
dè crescit distantia *PT*. Econtrâ autem  
decrecente corporis *S* actione per reces-  
sum corporis *T* ab *S* decrescit quoque *NM*  
& augetur corporis *P* vis centripeta, mino-  
que fit distantia *PT*. Hæc omnia per vi-  
ces contingent, ubi nempe corpus *T* cor-  
pori *S* proximius fuerit, augebitur radius  
*PT*, ubi verò remotius evadet minuetur  
radius.

(†) \* *Es tempus periodicum augebitur ac*  
*diminuetur &c.* Corpus *P* circâ *T*, exclu-  
sâ corporis longinqui *S* vi ablatitiâ, in  
circulo *PAD* revolvatur, & accedente vi  
illâ ablatitiâ corporis *S* quæ, ob ingentem  
distantiam *ST*, parva admodum sit respec-  
tu vis quâ corpus *P* à corpore *T* trahi-  
tur, idem corpus *P* in orbe fere circulari  
adhuc revolvatur. Jam verò corporis cir-  
culum vel orbem circulo finitimum de-  
scribentis vis acceleratrix versus *T* dire-  
cta est semper (per cor. 2. prop. 4.) in  
ratione compositâ ex ratione simplici radii  
*TP* qui dicatur *R* directè & ratione du-  
plicatâ temporis periodici, quod dicatur  
inversè, hoc est, vis acceleratrix corpo-  
ris *P* versus *T*, est ut  $\frac{R}{t^2}$ , & manente ra-

dio ut  $\frac{1}{t^2}$ ; sed vis acceleratrix in distan-  
tiâ datâ est ut vis absoluta corporis tra-  
hentis, ergò si corporis *T* trahentis vis  
absoluta dicatur *V*, erit *V* ut  $\frac{1}{t^2}$  &  $t^2$  ut

$\frac{1}{V}$ , ac  $t$  ut  $\frac{1}{\sqrt{V}}$  manente radio *TP* seu  
*R*. Porro vis acceleratrix quâ corpus *P*  
versus *T* trahitur, exclusâ vi ablatitiâ cor-  
poris *S*, est reciprocè ut quadratum di-  
stantiæ *TP*, hoc est directè ut  $\frac{1}{R^2}$  (ex hyp.)

Et quoniam vis ablatitiâ corporis *S*, exi-  
gua admodum est respectu vis accelera-  
trici quâ corpus *P* à corpore *T* trahitur,  
accedente vi illâ ablatitiâ, vis reliqua ac-  
celeratrix in corpore *P* erit adhuc ut  $\frac{1}{R^2}$

quam proximè; quare eadem manente re-  
liquâ vi centripetâ absolutâ corporis *T*  
& mutato utcumque radio *R*, quadratum  
temporis periodici  $t^2$  erit ut distan-  
tiæ cubus  $R^3$ , ac proindè  $t$  ut  $\sqrt{R^3}$ . (per  
coroll. 6. prop. 4.) hoc est tempus pe-  
riodicum est in sesquuplicatâ ratione ra-  
dii *TP*. Si igitur neque maneat radius  
idem, neque eadem vis centripeta abso-  
luta in corpore *T*, sed per actionem cor-  
poris longinqui *S* radius augeatur, & vis  
centripeta minuatur, aut per diminutio-  
nem ejus actionis radius minuatur, & vis  
centripeta augeatur, quadratum temporis  
periodici  $t^2$  erit in ratione compositâ  
ex binis rationibus supra inventis, nimirum

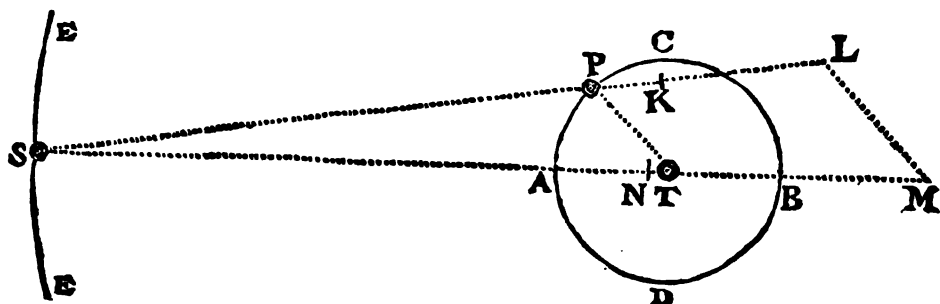
ex ratione  $\frac{1}{V}$ , & ratione  $R^3$ , hoc est  $t^2$

erit

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 431

*Corol. 7.* Ex (u) præmissis consequitur etiam, quod ellipseos à corpore *P* descriptæ axis, seu apsidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, sed magis ta-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.



men progreditur, & per excessum progressionis fertur in conse-  
quentia. Nam vis quâ corpus *P* urgetur in corpus *T* in qua-  
draturis, ubi vis *MN* evanuit, componitur ex vi *LM* & vi  
cen-

erit ut  $\frac{R}{V}$ , & proinde : ut  $\sqrt{\frac{R}{V}}$ , aut  
quod idem est, tempus periodicum auge-  
bitur ac diminuetur in ratione compositâ  
ex ratione  $\sqrt{R}$ , sesquuplicatâ radii, &  
ratione  $\frac{1}{\sqrt{V}}$  subduplicatâ hujus quâ vis il-  
la centripeta corporis centralis *T* per in-  
crementum vel decrementum actionis cor-  
poris longinqui *S* diminuitur vel augetur ;  
nam decrescente *V* crescit pariter  $\frac{1}{V}$ , &  
contrâ crescente *V* in eadem ratione de-  
crescit  $\frac{1}{V}$ .

502. *Scholium.* Hinc ut David Grego-  
rius in scholio ad prop. 17. Lib. 4. Af-  
tronomiæ physicæ & geometricæ obser-  
vavit, si vis centripeta corporis centra-  
lis *T* aliunde quam per vim extraneam cor-  
poris *S* augeatur & minuat per vices,  
ut si corporis *T* vis centripeta absoluta  
supponatur ipsius massæ proportionalis &  
nova ei addatur & detrahatur per vices  
materia, atque indè ejus vis absoluta in  
eadem ratione augeatur & minuat, cor-

pus *P* in minori & majori orbitâ per vi-  
ces revolvitur, diminuto & aucto per vices  
radio *TP* ejusque tempus periodicum mi-  
nuetur & augebitur per vices in ratio-  
ne compositâ ex ratione sesquuplicatâ radii  
directè & ratione subduplicatâ vis cen-  
tripetæ absolutæ corporis *T* inversè ut su-  
prâ. Vis enim acceleratrix composita &  
residua quâ corpus *T* auctum & diminutum  
per vices trahit corpus *P* est hic præcisè  
in duplicatâ ratione distantie inversè, quod  
in casu coroll. 6. quam proximè tantum  
obtinet.

(u) \* *Ex præmissis.* Si corpus *P* cir-  
cum *T* ellipsim circulo finitimam descri-  
bat cujus umbilicus sit *T* hujus ellipseos  
axis major seu apsidum linea motu angu-  
lari circa umbilicum *T* per vices progre-  
ditur seu fertur in consequentia & re-  
greditur, seu in antecedentia movetur ;  
progreditur nempe, dum corpus *P* est in  
syzygiis *A* & *B*, regreditur verò dum  
corpus *P* est in quadraturis *C* & *D*, sed  
magis tamen progreditur quam regreditur,  
& per excessum progressionis fertur in conse-  
quentia.

# 432 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-centripeta, quâ corpus *T* trahit corpus *P*. Vis (*v*) prior *LM*,  
 TU COR-si augeatur distantia *P T*, augetur in eâdem fere ratione cum  
 FORUM. hâc distantia, & vis posterior, decrefcit in duplicatâ illâ ra-  
 LIBER tione, ideoque summa harum virium (*z*) decrefcit in minore  
 PRIMUS. quam duplicatâ ratione distantiae *P T*, & (*a*) propterea (*per*  
 PROP. corol. 1. prop. XLV.) efficit ut aux, seu apsis summa, regredia-  
 LXVI. THEOR. tur. In conjunctione verò & oppositione vis, quâ corpus *P*  
 XXVI. urgetur in corpus *T*, differentia est inter vim, quâ corpus *T*  
 trahit

(*y*) \* *Vis prior LM &c.* Nam ob ingen-  
 tem corporis *S* à corporibus *P* & *T* di-  
 stantiam ( *ex Hyp.* ) *SL* est fere paral-  
 lela *SM*, & proinde *LM* ipsi *P T* pa-  
 rallela crescit ubique ut *P T*, quampro-  
 ximè; in quadraturis verò *LM* coincidit  
 cum *P T*.

(*z*) \* *Decrescit in minore quam du-  
 plicatâ illâ ratione*, hoc est, non tantum  
 minuitur in distantia majore, nec tantum  
 augetur in distantia minore, quantum mi-  
 nueretur vel augetur, si vis tota acce-  
 leratrix, seu virium summa esset semper ut  
 quadratum distantiae reciproce.

(*a*) \* *Et propterea per cor. 1. prop. 45.*  
 Sit *TP = A*, & *LM = c × A*; c verò quan-  
 titas data, & vis quâ corpus *P* versus *T*  
 exclusâ corporis *S* actione urgetur, erit ( *ex*

*Hyp.* ) ut  $\frac{1}{A^2}$ , & accedente vi exigua  
*LM* in quadraturis, harum virium summa  
 erit ut  $\frac{1}{A^2} + c \times A$ , adeoque hæc virium  
 summa decrefcet in ratione paulò minore  
 quam in duplicatâ distantiae *P T* seu *A*.  
 Nam si distantia variabilis *A* evadat *b × A*,  
 sitque *b* numerus unitate major, erit vis  
 in simplici distantia *A* ad vim in distantia  
 majore *b × A*, ut  $\frac{1}{A^2} + c \times A$ , ad  $\frac{1}{b^2 A^2}$   
 + *c b A*, hoc est, ut  $b b + c b b A$  ad  $1 +$   
*c b A* five ut  $b b \times 1 + c A$  ad  $1 \times 1 + c b A$ ;  
 hæc autem ratio minor est quàm ratio  
 $\frac{1}{A^2}$  ad  $\frac{1}{b^2 A^2}$ , seu  $b^2$  ad 1, cum (  $1 +$   
*c A* ) minus sit quàm  $1 + c b A$ . Pona-  
 mus itaque virium summam esse ut  $\frac{1}{A^2 - q}$ ,

seu ut  $A^{-2} + q$ , & *q*, numerum positivum  
 unitate longe minorem, & quoniam si mo-  
 tus totus angularis quo corpus *P* ab ap-  
 side unâ ad eandem apsidem redit, sit ad  
 motum angularem revolutionis unius seu  
 360°. ut numerus aliquis *m* ad *n* vis cen-

tripeta tota est ut  $A \frac{n n}{m m} - 1$ ; ( *per cor.*

*prop. 45.* ) erit hic  $\frac{n n}{m m} - 3 = q - 2$ ,  $\frac{n n}{m m}$

$= 1 + q$ ,  $\frac{n}{m} = \sqrt{1 + q}$ , & *m* ad *n*, seu

motus totus angularis ab apside ad ean-  
 dem apsidem ad 360°. ut 1; ad  $\sqrt{1 + q}$ ,  
 adeoque motus ille angularis ab apside

ad eandem  $= \frac{360^\circ}{\sqrt{1 + q}}$ , quare cum sit

$\sqrt{1 + q}$ , paulo major unitate, motus to-  
 tus angularis ab apside ad eandem apsi-

dem minor erit 360°. & ided apsidem ob-  
 viam ibunt corpori *P* revolventi, seu mo-

vebuntur in antecedentia, aut quod idem  
 est, regredientur. Idem facile demonstra-

tur ( *per cor. 2. prop. 45.* ) vel per exem-  
 pla tertia. Cum enim vis tota sit ( *ex*

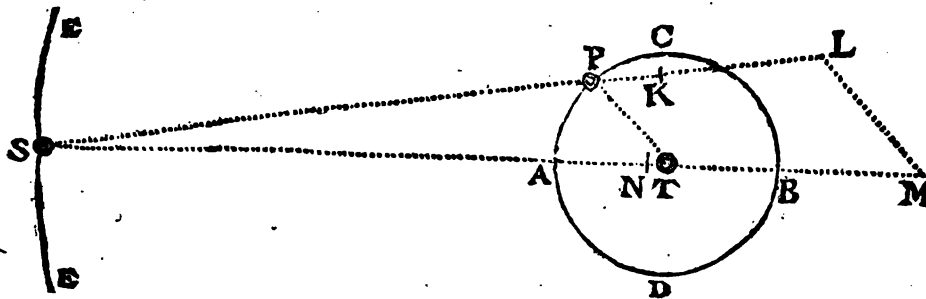
*Hyp.* ) ut  $\frac{1}{A^2} + c \times A$ , erit ( loco cita-

to ), angulus revolutionis corporis inter apsi-

des summam & imam  $= 180^\circ \times \sqrt{\frac{1 + c}{1 + 4c}}$ ,

sed quoniam *c* est numerus positivus,  
 $\frac{1 + c}{1 + 4c}$ , est numerus unitate minor, ergo

angulus revolutionis corporis *P* inter apsi-  
 des minor est 180°.



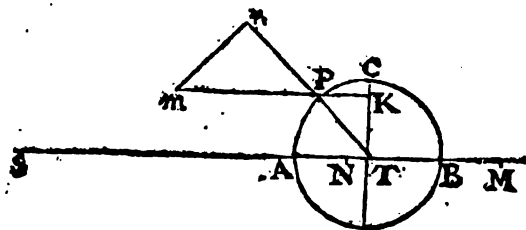
trahit corpus  $P$ , & vim  $KL$ ; & differentia illa, <sup>(b)</sup> propterea quod vis  $KL$  augetur quamproximè in ratione distantiae  $PT$ , decrescit in majore quam duplicatâ ratione distantiae  $PT$ , <sup>(c)</sup> ideoque (*per corol. 1. prop. XLV.*) efficit ut aux progrediatur. In <sup>(d)</sup> locis inter syzygias & quadraturas pendet motus augis ex causâ utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis  $KL$  in syzygiis sit quasi duplo major quam vis  $LM$  in quadraturis, excessus erit penes vim  $KL$ , transferetque augem in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis corollarii faci-

(b) \* *Propterea quod vis  $KL$  &c.* Est enim in syzygiis  $KL = 2 AT$ , seu  $2 PT$  quamproximè (501).

(c) \* *Ideoquæ per cor. 1. prop. 45.* Nam si in superiori calculo loco  $+q$  scribatur  $-q$ , vel loco  $+c \times A$ , scribatur  $-c \times A$ , quod vis  $KL$  sit ablatitia, inveniatur angulus totius revolutionis corporis  $P$  ab apside unâ ad eandem apsidem  $= \frac{360^\circ}{\sqrt{1-q}}$ , vel angulus inter apsidem

sumam & imam  $= 180^\circ \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ . Est autem  $\sqrt{1-q}$ , numerus unitate minor, &  $\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$  numerus unitate major, adeoque  $\frac{360^\circ}{\sqrt{1-q}}$ , arcus major  $\{360^\circ. \& 180^\circ$   $\times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ , arcus major  $180^\circ$ . quare apsidem in hoc casu progrediuntur.

Tom. I.



(d) 503. In locis inter syzygias & quadraturas &c. Iisdem positis quæ in Lemmate 500. quæritur distantia angularis corporis  $P$  à quadraturâ  $C$ , v. gr. ubi apsidem quiescunt. Per locum corporis  $P$  agatur  $Pm$  parallela & æqualis  $NM$  seu  $TM$ , & erit  $Pm = 3 PK$  (500). Vis  $Pm$ , si in radium  $TP$  productum demittatur perpendiculum  $mn$ , resolvitur in vires  $Pn$ ,  $nm$ , quarum  $nm$  agendo secundum lineam radio perpendicularem, vim

I i i

ac

TU COR-  
PORUM.  
LIBER

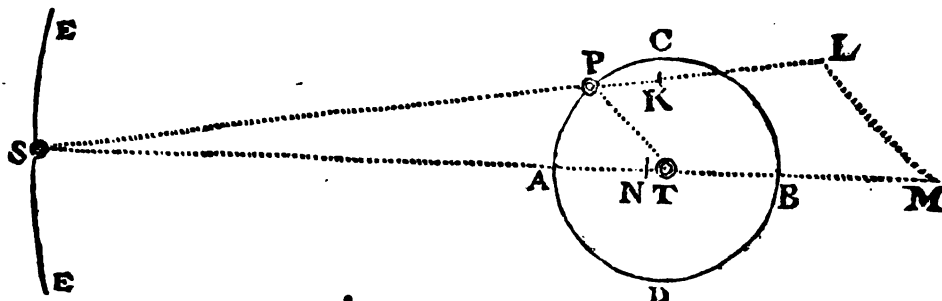
PRIMUS.

**PROP.**

L X V I.

## THEOR

**XXV L.**



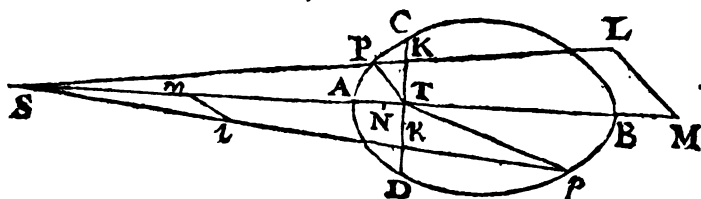
Ca-

504. Iidem positis, si orbita CPD, circulo finitima sit, erit vis addititia  $PT = P_n$ , maxima in quadraturis. Nam cum sit semper  $PT : PK = 3 PK : P_n$ , erit  $P_n = \frac{3 PK^2}{PT}$ , ac proinde  $PT = P_n = PF$ .

—  $\frac{3PK^2}{PT}$ , quæ quantitas maxima evadit ubi erit  $PK=0$ , quod in quadraturis contingit.

(c) \* *Namque horum afflionibus &c.* Hæc enim ratione corpus P erit semper in quadraturis simul & in syzygiis corporis, seu corporum S, adeoque cum vis ablatitia K L; in syzygiis & prope syzygias sit ferè duplo major quam vis addititia L M, in quadraturis & prope quadraturas, actio corporis T minuetur & indique, decrefcerque proinde in ratione pluriquam duplicatâ distantiz T P.

*Corol. 8. (f)* Cum autem pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ factò in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiae  $TP$ , in transitu corporis ab apside imâ ad apsidem summam; ut & à simili incremento in reditu ad apsidem imam; atque ideo maximus sit ubi proportio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ: manifestum est quod apsides in syzygiis suis, per vim ablatitiâ  $KL$  seu  $NM-LM$ , progredientur velocius, inque quadraturis suis tardius recedent per vim addititiâ  $LM$ . Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.



(f) \* Cum autem (per corol. 7.) pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ factò in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiae  $TP$  quæ augetur in recessu à centro  $T$ , sive in transitu corporis  $P$  ab apside imâ ad apsidem summam, ut & à simili incremento in accessu ad centrum, sive in reditu ab apside summâ ad apsidem imam, manifestum est progressum vel regressum apsidum maximum esse ubi ratio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ, porro dum linea apsidum seu major axis ellipseos  $BCAD$ , cujus umbilicus est  $T$ , in syzygiis  $A, B$  versatur, ratio vis totius corporis  $P$  in apside summâ positi ad vim ejus in apside imâ versantis, magis recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ quam in alio quovis lineæ apsidum situ. Sit enim  $B$  apsis summa,  $A$  apsis ima, & erit  $TB$  distantia maxima,  $AT$  minima (ex naturâ ellipseos). Unde corpore  $P$  in conjunctione  $A$  versante erit vis ablatitiâ  $KL$  (seu differentia virium acceleratricium cor-

porum  $T$  &  $P$  versus  $S$ ) omnium minima, & corpore  $P$  in oppositione  $B$  versante, erit differentia illa  $KL$  omnium maxima. Cum autem ob ingentem corporis  $S$  distantiam (ex Hyp.) sit sere  $KL$  ad  $kl$  ut  $AT$  ad  $TB$  (501) ratio vis corporis  $P$  in  $A$  versantis ad vim illius in  $B$  positi, exprimi hic poterit per rationem  $\frac{b}{AT^2} - c \times AT$ , ad  $\frac{b}{TB^2} - c \times TB$ , (si ratio  $b$  ad  $c$  exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus  $P$  versus  $T$ , ad vim absolutam ablatitiâ  $KL$ ) seu reductione ad eundem denominatorem factâ, per rationem  $TB^2 \times b - c \times AT^3$ ; ad  $AT^2 \times b - c \times TB^3$ , quæ ratio eò magis recedit à ratione  $TB^2$  ad  $AT^2$ , seu duplicatâ distantiarum inversâ, quo magis ratio quantitatis  $b - c \times AT^3$ , ad quantitatem  $b - c \times TB^3$ , recedit à ratione æqualitatis, seu quo minor est  $AT$  respectu  $TB$ , quare dum linea apsidum est in syzygiis  $A, B$ , ratio vis totius in apside summâ ad vim in apside imâ maximè

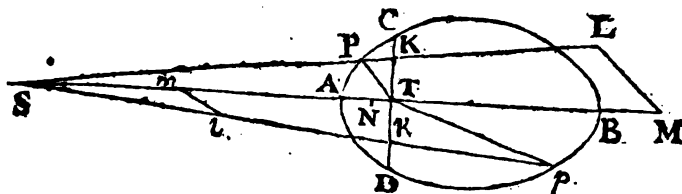


# 436 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.

*Corol. 9.* Si corpus aliquod, vi reciproce proportionali quadrato distantiae suae à centro revolveretur circa hoc centrum in ellipfi; & mox, in descensu ab apside summâ seu auge ad apsidem imam; vis illa per accessum perpetuum vis novæ augetur in ratione plusquam duplicatâ distantiae diminutæ: (manifestum est quod corpus, perpetuò accessu vis illius novæ impulsu semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum quam si urgeretur vi solâ crescente in duplicatâ ratione distantiae diminutæ; ideoque orbem describeret orbe elliptico interioriorem, & in apside imâ propius accederet ad centrum quam prius. (8) Orbis igitur, accessu huius vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis in recessu

COR-

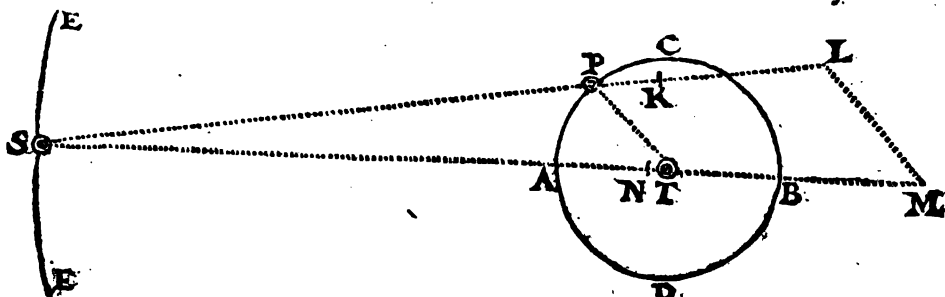


non recedit à ratione duplicatâ distantiarum inversâ. In hoc igitur lineâ apsidum sive apsidum celerrimè progrediuntur, corpore P in syzygiis vel prope syzygias versante. Dum vero corpus P est in quadraturis C, D, fit vis LM = CT, vel DT; Est autem ex naturâ ellipseos, summa linearum CT, DT, omnium minima; quare in integrâ corporis P revolutione, apsidum viribus CT, DT tardissimè regrediuntur in quadraturis corporis P, & celerrimè progrediuntur in ipsius syzygiis, atque adeo excessus progressus supra regressum erit in hoc casu omnium maximus, & apsidum in integrâ corporis P revolutione celerrimè movebuntur in consequentia. Ob contrarias prorsus causas, si lineâ apsidum in quadraturis posita sit, apsidum velocissimè regrediuntur, corpore P in quadraturis versante, & tardissimè progrediuntur corpore P in syzygiis existente, & ex hac utraque causâ fieri poterit ut integrâ corporis P circum T revolutione, regressus apsidum superet eorum progressum, proindeque ut apsidum in antecedentia ferantur; sed quoniam, cæteris paribus, vis

ablatitia KL quæ progressum apsidum in syzygiis corporis P inducit est (500) fere duplo major vi adjectitiâ LM quæ apsidum regressum in quadraturis corporis P producit, excessu progressus supra regressum, apsidum progrediuntur in integrâ sui revolutione circum T, hoc est, eo tempore quo apsidum ex T visæ omnes cum corpore S, aspectus subeunt; augetur verò progressus ille, si corpora P & S in suis orbitis ferantur in eandem plagam; In hac enim hypöthesi, apsidum diutius hærent in syzygiis quam in quadraturis, quia in syzygiis progrediuntur cum corpore S, atque adeo diutius illud quasi comitantur, in quadraturis verò feruntur in antecedentia & corporis S in consequentia revolventis aspectum quadratum veluti fugiunt; unde fit ut apsidum diutius progrediuntur in syzygiis suis quam regrediuntur in suis quadraturis.

(g) \* Orbis igitur accessu huius vis novæ fiet magis excentricus; manente enim distantia apsidum summæ ab orbis umbilico, decrescet distantia apsidum imæ ab eodem umbilico, majorque proinde erit ratio prioris distantia ad posteriorem, quam si

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP  
SLXVL  
THEOR  
XXVI.



**inter**

(k) \* At si consideretur ratio incrementi

$\frac{b}{CT^2} + n \times CT$ , ad  $\frac{b}{TD^2} + n \times TD$ ,  
(si ratio  $b$  ad  $n$  exprimat rationem vis ab-  
solutæ trahentis corpus  $P$  versus  $T$  ad vim  
absolutam additiæ  $LM$ ) & reductione ad  
eamdem denominationem factâ ut  $TD^2 \times$   
 $b + nCT$ ; ad  $CT^2 \times b + nTD$ , quæ ratio  
minor est quam ratio  $TD^2$ , ad  $CT^2$ , ob  
 $TD$ , majorem quam  $CT$ ; & quoniam  
in hoc lineæ apudum sit ratio  $TD$  ad  
 $QT$ . seu ratio distantiarum umbilici  $T$  ad

DE MO- inter apfides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis  
TU COR- in apfide imâ est ad vim in apfide summâ in minore quam du-  
PORUM. plicatâ ratione distantiae apfidis summæ ab umbilico ellipseos  
LIBER ad distantiam apfidis imæ ab eodem umbilico, & contra, ubi  
PRIMUS. apfides constituuntur in syzygiis, vis in apfide imâ est ad vim  
PROP. in apfide summâ in maiore quam duplicatâ ratione distantiarum.  
LXVI. THEOR. Nam vires  $L M$  in quadraturis additæ viribus corporis  $T$   
XXVI. componunt vires in ratione minore, & vires  $K L$  in syzygiis  
subductæ à viribus corporis  $T$  relinquunt vires in ratione ma-  
jore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius, in tran-  
situ inter apfides, minima in quadraturis, maxima in syzygiis:  
& propterea in transitu apfidum, à quadraturis ad syzygias per-  
petuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos; inque transi-  
tu à syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentri-  
citatem diminuit.

*Corol. 10.* Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fin-  
gamus planum orbis  $EST$  immobile manere; & ex errorum  
expo-

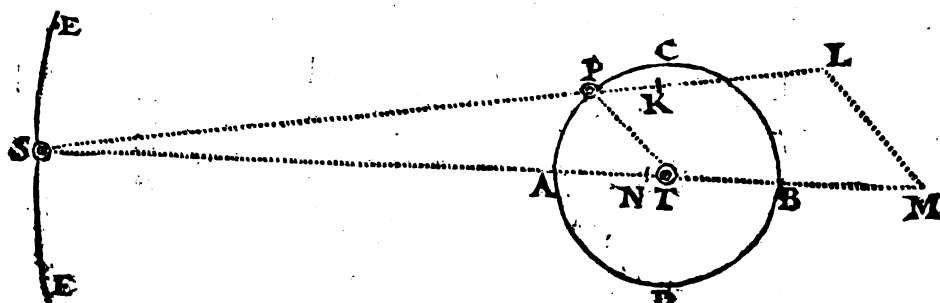
quadraturis maxima est, ( ex naturâ ellip-  
seos ) patet rationem totius decrementi &  
incrementi vis centripetæ in transitu cor-  
poris  $P$  inter apfides minimam esse in qua-  
draturis apfidum. Et contrâ si fuerit  $A$   
apfis ima,  $B$  apfis summa, erit vis in apfi-  
de imâ ad vim in apfide summâ ut  $T B^2 \times$   
 $b - c A T$ , ad  $A T^2 \times b - c T B$ ,  
adeoque in maiori ratione quam  $T B^2$ ,  
ad  $A T^2$ , & quoniam ratio  $T B$ , ad  $A T$ ,  
in his apfidum locis maxima est, ex na-  
turâ ellipseos, ratio decrementi & incre-  
menti totius in transitu inter apfides, ma-  
xima est in syzygiis apfidum, & propter-  
eâ singulis corporis  $P$  revolutionibus in  
transitu apfidum à quadraturis ad syzygias,  
hæc ratio perpetuò augetur, augetque ex-  
centricitatem ellipseos, & in transitu ap-  
fidum à syzygiis ad quadraturas perpetuò  
diminuitur, & excentricitatem diminuit.  
Maxima ergo est orbis excentricitas, ubi  
apfides sunt in syzygiis, minima ubi sunt  
in quadraturis.

505. Ex his etiam sequitur in unâquâ-  
que corporis  $P$  circum  $T$  revolutione ex-

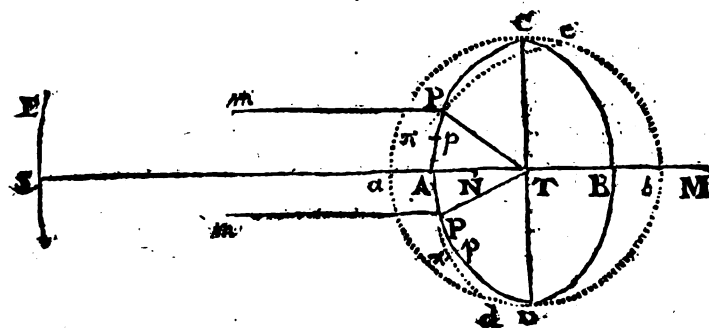
centricitatem orbis circa syzygias corpo-  
ris  $P$  augeri, & circa ejus quadraturas mi-  
nui, minimamque esse in illius quadratu-  
ris, maximam in syzygiis, cæteris paribus.  
Nam ( per cor. 7. ) corporis  $P$  vis centri-  
peta tota in syzygiis decrescit in maiori  
quam duplicatâ ratione distantiae auctæ, &  
crescit in maiori ratione quam duplicatâ  
distantiae diminutæ, & in quadraturis con-  
trâ. Quare corpus  $P$ , in syzygiis & pro-  
pe syzygias describit partem orbis magis  
excentrici, in quadraturis verò & prope  
quadraturas partem orbis minus excentri-  
ci ( ex demonstratis initio cor. 9. ) Et  
quoniam vis addititia  $L M$  in quadraturis  
corporis  $P$  maxima est, & vis ablatitia  
 $K L$  in syzygiis ejus etiam maxima, vis  
autem addititia excentricitatem diminuit  
& ablatitia auget, manifestum est quod  
( cæteris paribus ) in unâ corporis  $P$  re-  
volutione, excentricitas orbis minima sit  
in quadraturis corporis  $P$ , & maxima in  
illis syzygiis, atque adeo quod à quadra-  
turis ad syzygias perpetuò augeatur, & à  
syzygiis ad quadraturas perpetuò minuat.

expositâ causâ manifestum est, quod ex viribus  $NM$ ,  $ML$ , De Mo-  
quæ sunt causa illa tota, vis  $ML$  agendo semper secundum pla-  
num orbis  $PAB$ , nunquam perturbat motus in latitudinem; quod-  
que vis  $NM$ , ubi nodi sunt in syzygiis, agendo etiam secun-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.



dum idem orbis planum; (1) non perturbat hos motus; (m) ubi verò sunt in quadraturis, eos maximè perturbat, corpusque  $P$  de plano orbis sui perpetuò trahendo, (n) minuit inclinationem plani in transitu corporis à quadraturis ad syzygias, augetque vicissim.



(1) \* Non perturbat hos motus. Patet per cas. 2. prop. 66.

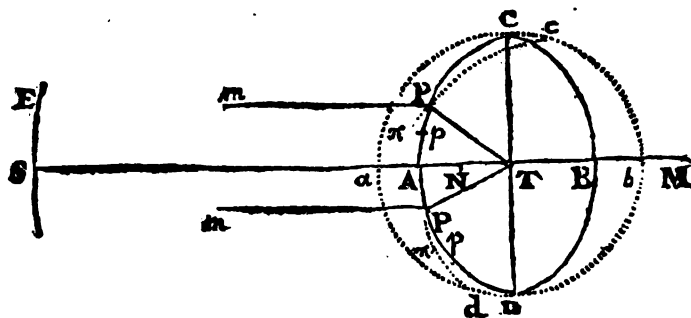
(m) 506. Ubi verò sunt in quadraturis eos maximè perturbat; Ubi nodi sunt in quadraturis C & D inclinatio directionis vis  $NM$  (quæ lineâ  $Pm$  exhibetur) ad planum orbitæ corporis  $P$  maxima est, ut pote æqualis planorum  $CAD$ ,  $EST$  inclinationi & proinde, cæteris paribus, maxime potenter agit; in alio enim lineæ nodorum situ, minor est inclinatio directio-

nis vis  $NM$  ad planum orbitæ corporis  $P$ ; & evanescit cum nodi sunt in syzygiis, crescitque aded in transitu nodorum à syzygiis ad quadraturas, & contrà decrescit in eorum transitu à quadraturis ad syzygias.

(n) 507. Minuit inclinationem plani &c. Si orbitæ corporis  $P$  nodi in quadraturis  $C$ ,  $D$  constituentur, angulus inclinationis orbitæ ad planum in motum  $DST$  perpetuò minuitur in transitu corporis  $P$  à quadraturis

DE MO- ciffim eandem in transitu à syzygiis ad quadraturas. Unde fit  
TU COR- ut (°) corpore in syzygiis existente inclinatio evadat omnium  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.



turis ad syzygias, augetur verò in transitu corporis à syzygiis ad quadraturas, & in utroque transitu nodi regrediuntur. Sic enim orbitæ PAB pars CAD suprà planum immotum EST elevata, altera verò pars CBD infrà illud depressa intelligatur; per locum corporis P agatur recta Pm parallela lineæ TS, exhibens directionem vis NM, & corpus P feratur primum à nodo seu quadraturâ C ad conjunctionem A, & quoniam corpus P vi revolutionis per arcum Pp urgetur, & vi NM per rectam Pm trahitur, tempore quam minimo, vi compositâ, describet lineolam Pπ quæ non est in plano CPT, sed ab eo deflectit versùs Pm, adeoque corpus movetur in plano TPπ quod productum plano EST non occurret in C sed ultra C versùs oppositionem B Centro T & intervallo TP describatur in plano EST circulus CADb, in plano CPD circuli arcus PC, & in plano πPT arcus P c circulo CADb, occurrens in c. Et quoniam vis NM minima est respectu vis revolutionis corporis P, angulus CPc, inclinationis planorum CPT & cPT minimus est seu infinitesimus, & arcus P c ab arcu PC nonnisi minimâ seu infinitesimâ quantitate differt; quare cum (ex hyp.) arcus PC à quadrante CA differat finitâ quantitate PA, summa arcuum PC, P c semicirculo minor est, hinc in triangulo spherico CPc, angulus externus PCA (per prop. 13. sphericorum

Menelai, vel per theor. 33. Sphericorum Clariss. Wolfii), major est angulo interno opposito P c C, hoc est, inclinatio plani cPT ad planum immotum EST minor est inclinatione plani CPT ad idem planum EST. In transitu igitur corporis P à quadraturâ C ad conjunctionem A orbitæ inclinatio perpetuò minuitur, & quoniam nodus C transfertur in c, fitque proinde obviam corpori revolventi, nodi regrediuntur. Eodem modo demonstratur inclinationem minui & nodos regredi in transitu corporis à quadraturâ D ad oppositionem B. Jam feratur corpus à conjunctione A ad quadraturam proximam D, & in loco quovis P, duplici vi, nempe vi revolutionis per arcum Pp & vi NM per rectam Pm urgetur, atque adeò describit lineolam Pπ, quæ ab arcu Pp versùs Pm declinat. Quare si centro T & intervallo TP describantur ut suprà tres arcus PD, a D, P d, eodem modo demonstrabitur nodum D transferri in antecedentia in d, & angulum Pd a majorem esse angulo interno opposito P D d, hoc est, inclinationem orbitæ augeri in transitu corporis P, à conjunctione ad quadraturam proximam, & eadem eodem modo ostenduntur fieri in transitu ab oppositione B ad quadraturam C. Q. E. D.

(o) \* Corpore in syzygiis existente. Vis enim NM, cæteris paribus maxima est in syzygiis (401).

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 441

minimâ, (P) redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi De Mo-  
corpus ad nodum proximum accedit. (q) At si nodi consti-  
TU COR-

tuan-  
PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROP.

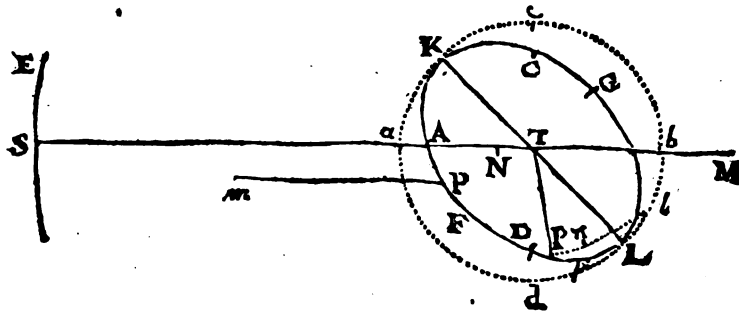
LXVI.

THEOR.

XXVI.

(p) \* *Redeatque ad priorem magnitudinem circiter.* Si enim orbita C A D B perfectè circularis maneret, æqualis esset vis N M in paribus corporis P distantis à nodis C & D, in utroque quadrante C A & A D, vel D B & B C; quare cum orbita C A D, circulo finitima supponatur, & per vim exiguam N M minuat incli-

natio plani in transitu corporis P à quadraturis ad syzygias, & contrà augeatur per æqualem vim N M in transitu corporis P à quadraturis ad syzygias; liquet quòd inclinatio redeat ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus P à syzygiâ ad nodum proximum in quadraturâ positum accedit.

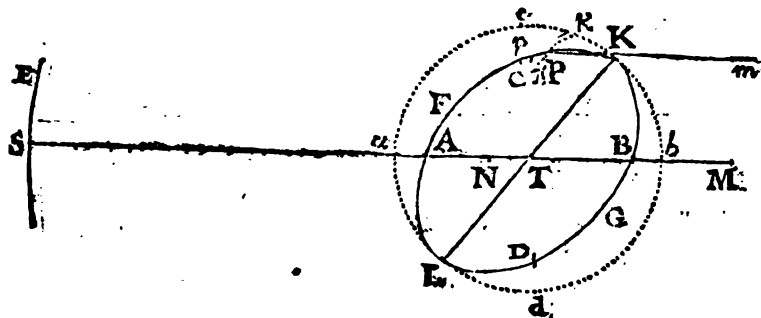


(q) 508. *At si nodi constituantur in eclanibus post quadraturas, id est in locis K & L ita ut anguli K T c, K T a sint æquales, seu 45°. 1°. Inclinatio plani perpetuò minuitur in transitu corporis P à nodo ad gradum inde nonagesimum F vel G. 2°. Augeatur in transitu à gradu illo 90°. ad quadraturam proximam. 3°. In utroque transitu regrediuntur nodi. 4°. In transitu à quadraturâ ad nodum proximum inclinatio minuitur & nodi progrediuntur. 1<sup>um</sup>, 2<sup>um</sup>, & 3<sup>um</sup>. Eodem modo demonstrantur ac superius (507). Quartum ita ostenditur. Dum corpus P à quadraturâ D ad nodum proximum L fertur, directio vis N M, quæ antè dirigebatur à P versus m, in contrariam mutatur; Quare corpus P*

inter D & L positum vi revolutionis urgetur per arcum P p & vi N M ab illo arcu retrahitur versus M atque vi utrâque fertur tempore minimo per lineolam P π quæ ab arcu P p in plagam M a deflectit. Si itaque centro T & intervallo T P describantur tres arcus circulares P L, P π, L l b a, in planis T P L, T P π, E S T eodem modo ac in notâ 507. patet angulum P l L minorem esse angulo P L a. Unde in transitu corporis à quadraturâ D ad nodum [proximum L inclinatio orbitæ minuitur & nodus progreditur; eadem fieri in transitu corporis à quadraturâ C ad nodum proximum K, eodem modo demonstratur. Q. E. D.

## 442 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORP. *tu* COR-*D* & *B*, intelligitur ex modo expositis, quod, in transitu PORUM. corporis *P* à nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, in- LIBER clinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proxi- PRIMUS. mos 45 gradus, usque ad quadraturam proximam, inclina- PRO P. tio augetur, & postea denuò in transitu per alios 45 gradus, LXVI. usque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque dimi- THEOR. nitur inclinatio quàm augetur, (r) & propterea minor est sem- XXVI. per in nodo subsequente quàm in præcedente. (f) Et simili ra- tiocinio, inclinatio magis augetur, quàm diminuitur, ubi nodi sunt.



(r) \*. *Et propterea minor est semper inclinatio in nodo subsequente quàm in præcedente*, quod verum quoque est, ubicumque constituitur nodus *K* inter *c* & *a*, ut patet ex ipsis demonstrationibus in notis 507. & 508. traditis.

(f) 509. *Et simili ratiocinio &c.* Si nodus *K* constituitur inter quadraturam *C* vel *c* & oppositionem *B* vel *b*, & nodus oppositus *L* inter quadraturam *D* vel *d*, & conjunctionem *A* seu *a*, feraturque corpus à nodo *K* per *C* ad alterum nodum *L*. 1°. In transitu corporis à nodo ad quadraturam proximam inclinatio plani perpetuò augetur & nodi progrediuntur. 2°. In transitu à quadraturâ *C* vel *D* ad gradum à nodo nonagesimum *F* vel *G* inclinatio minuitur & nodi regrediuntur. 3°. In transitu à gradu illo 90°. ad nodum proximum inclinatio augetur & nodi regrediuntur. 2°. & 3°. demonstrantur prout in in. notâ 507. 1°. verò ita ostenditur.

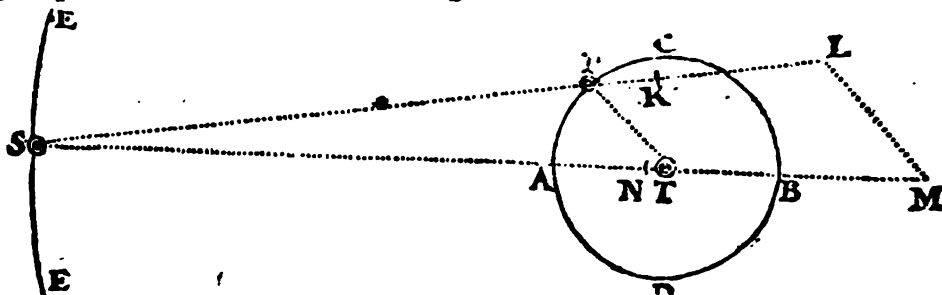
Dum corpus *P* versatur inter nodum *K* & quadraturam *C*, vi revolutionis urgetur per arcum *Pp*, & vi *NM* trahitur secundum directionem *Pm* in plagam *M*, adeoque vi utraq; describet tempusculo minimo lineolam *Pπ*, quæ ab arcu *Pp* deflectet versus *Pm*; quare si centro *T*, radio *TP*, describantur ut supra arcus *PK*,  $\pi PK$ ; *Kkca* in planis *TpP*, *TπP*, *EST* patet propositum, ut in notâ 507.

510. *Coroll.* Ex tribus superioribus demonstrationibus (507. 508. 509.) inter se collatis, manifestum est nodos progredi quamdiu corpus *P* inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximam versatur; eos verò regredi, dum corpus *P* in aliis quibuscumque locis versatur. Unde sequitur in singulis corporis *P* à nodo ad nodum revolutionibus nodos magis regredi quàm progredi, adeoque absolute regredi nisi fuerint in syzygiis.





DE MO-  
TU COR-  
PORUM  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XXVI.  
THEOR.  
XXVI



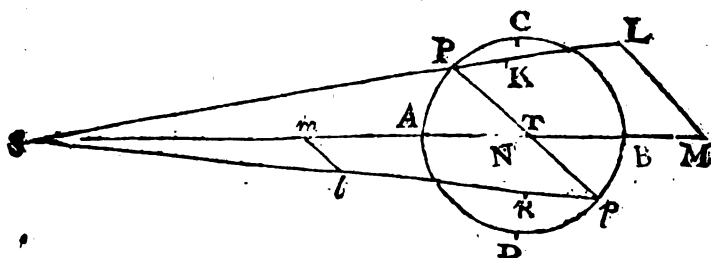
Co.

571: *Lemma.* Si fuerint tres quantitates  $a, a + b, a + 2b$  in continuâ proportione arithmetica, ratio 1<sup>a</sup>: ad 1<sup>m</sup>, (quæ est tribus est minima) major erit quàm ratio 3<sup>a</sup>: (quæ est maxima), ad 1<sup>m</sup>. Est enim  $a + b : a = a + b \times a + b : aa + ab = aa + 2ab + bb : aa + ab$ ; sed est  $a + 2b : a + b = aa + 2ab : aa + ab$ . Ergo cum ratio  $aa + 2ab + bb$  ad  $aa + ab$  major sit quàm ratio  $aa + 2ab$  ad  $aa + ab$ , erit ratio  $a + b$  ad  $a$  major ratione  $a + 2b$  ad  $a + b$ .

## 445

FORUM.  
LIBER  
PRIMUS

PRO  
LXVI.



**R.k.k. 3**

# 446 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo. tāque ideo ipsius vi centripetā à quā errores corporis *P* oriun-  
TU COR- tur, evadent errores illi omnes, paribus distantis; majores in  
PORUM. hoc casu quàm in altero; ubi corpus *S* circum systema corporum  
LIBER *P* & *T* revolvitur.

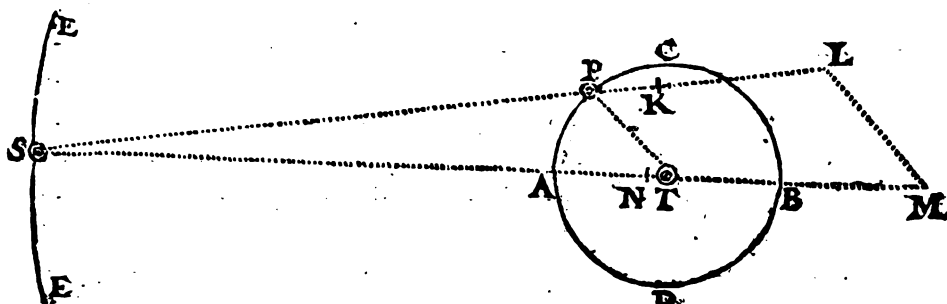
PRIMUS. *Corol. 14. (2)* Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S*  
PROP. longinquum est, sint quamproximè ut vis *SK* & ratio *PT* ad  
LXVI. *ST* conjunctim, hoc est, si detur tum distantia *PT*; tum cor-  
THEOR. poris *S* vis absoluta, ut *ST cub.* reciprocè; sint autem vires  
XXVI. illæ *NM*, *ML* causæ errorum & effectuum omnium, de qui-  
bus actum est in præcedentibus corollariis: manifestum est;  
quòd effectus illi omnes, stante corporum *T* & *P* systemate,  
& mutatis tantum distantia *ST* & vi absolutā corporis *S*, sint  
quamproximè in ratione compositā ex ratione directā vis abso-  
luta

(2) 511. \* Cum autem vires *NM*,  
*ML* &c. Ob magnam distantiam corpo-  
ris *S*, erit ferè *LS* parallela *MS*, &  
*SN = ST = SK*, ac *ML = PT*; & quo-  
niam *NM* in syzygiis est ut *ML* in qua-  
dratis (501). Si auctā vel diminutā ac-  
tione corporis *S*, orbita *CADB* unā  
cum lineis hinc pendentibus *PT*, *NM*,  
*ML* augeatur vel diminuatur (*cor. 6. hu-  
jus prop. 66.*) tres illæ lineæ in eadem ferè  
ratione inter se (cæteris paribus) auge-  
buntur vel diminuentur. Est autem vis *ML*  
ad vim *SK* ut recta *ML* ad rectam *SK*,  
seu quam proximè ut *PT* ad *ST*; Quare  
vis *ML* (adeoque & vis *NM*) est quam  
proximè ut vis *SK* & ratio *PT*, ad *ST*,  
conjunctim, hoc est, si vis acceleratrix  
 $\frac{A \times PT}{ST}$  dicatur *A* ut  $\frac{A \times PT}{ST}$ . Porro datā  
vi absolutā corporis *S*, vis acceleratrix *A*  
in distantia *SK* seu *ST* est ut  $\frac{1}{ST^2}$ , (*ex  
hyp.*) Quare vires *NM*, *ML*, datā vi ab-  
solutā corporis *S*, sunt ut  $\frac{PT}{ST^3}$ ; hoc est  
(si detur distantia *PT*) ut *ST*; recipro-  
cè. Verùm si variabilis sit vis absoluta *V*  
corporis *S*, erit vis acceleratrix *A* in di-  
stantia *ST*, ut vis absoluta *V* directè &  
quadratum distantie *ST* inversè, (nam  
manente vi absolutā corporis *S*, vis acce-

leratrix est ut *ST*<sup>2</sup> inversè, & manen-  
te distantia *ST* vis acceleratrix est ut vis  
absoluta directè, proindeque Variantibus  
vi absolutā & distantia simul, vis accele-  
ratrix est ut vis absoluta directè & qua-  
dratum distantie inversè; Quare si loco  
vis acceleratricis *A* ratio illa composita  
in facto  $\frac{A \times PT}{ST}$  ponatur, vires *NM*, *ML*  
erunt quam proximè ut  $\frac{V \times PT}{ST^3}$ , seu da-  
tā *PT*, ut  $\frac{V}{ST^2}$ , hoc est in ratione com-  
positā ex ratione directā vis absolutæ cor-  
poris *S*, & ratione triplicatā inversā di-  
stantie *ST*. Vis autem absoluta corporis  
*S*, est (*ex Dem.*) in ratione compositā  
vis acceleratricis *A* & quadrati distantie  
*ST*, & vis acceleratrix *A* in distantia *ST*  
est (*per coroll. 2. prop. 4.*) in ratione  
compositā ex ratione directā distantie *ST*  
& ratione duplicatā inversā temporis pe-  
riodici corporis *T* circum *S* ad distantiam  
*ST* circulum describentis, adeoque vis  
absoluta corporis *S* est ut cubus distantie  
*ST* directè, & quadratum temporis pe-  
riodici corporis *T* inversè. Quare vi-  
res *NM*, *ML* (earumque effectus) quæ  
sunt directè ut vis absoluta, & inversè ut  
cubus distantie, sunt reciprocè in duplica-  
tā ratione temporis periodici corporis *T*.

lutæ corporis  $S$ , & ratione triplicatâ inversâ distantia  $S T$ . Unde si systema corporum  $T$  &  $P$  revolvatur circa corpus longinquum  $S$ ; vires illæ  $N M$ ,  $M L$ , & earum effectus erunt ( per corol. 2. & 6. prop. IV. ) reciprocè in duplica-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVI.  
THEOR.  
XXVI.

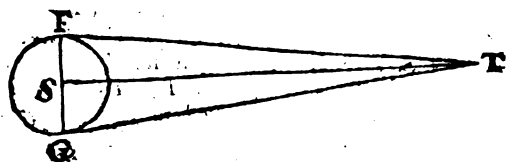


tâ ratione temporis periodici. Et inde etiam, (a) si magnitudo corporis  $S$  proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ  $N M$ ,  $M L$ , & earum effectus directè ut cubus diametri apparentis longinqui corporis  $S$  è corpore  $T$  spectati, & vice versâ. Namque hæ rationes eadem sunt, atque ratio superior composita.

Corol. 15. (b) Et quoniam si, manentibus orbium  $E S E$  &  $P A B$  formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur

(a) \* Si magnitudo seu massa corporis  $S$  proportionalis sit ipsius vi absolutæ, dato corpore  $S$  dabitur vis illius absoluta; undè si præterea data sit distantia  $P T$ , vires  $N M$ ;  $M L$  & earum effectus erunt, ex suprâ demonstratis, ut cubus distantia  $S T$  inversè; sed diameter apparens  $F G$  corporis longinqui  $S$  ex  $T$  visi, hoc est, angulus  $F T G$  sub quo diameter  $F G$  de loco  $T$  videtur, est ut distantia  $S T$  inversè; nam cum globi  $S$  diameter parva admodum supponatur respectu distantia  $S T$ , angulus  $F T G$ , erit admodum exiguus, & globi radius  $S F$  ad  $S T$  normalis usurpari poterit pro arcu circuli centro  $T$  & intervallo  $T S$  descripti, adeoque (154)

cubus diametri apparentis corporis longinqui  $S$  è corpore  $T$  spectati.



angulus  $F T S = \frac{F S}{S T}$ , hoc est, ob datum radium  $S F$ , angulus  $F T S$  & ipsius duplus  $F T G$  erit ut  $S T$  inversè. Vires igitur  $N M$ , &  $M L$  earumque effectus, erunt ut

(b) \* Et quoniam si manentibus &c. Hoc est, si corporum  $S$  &  $T$  vel maneat vel mutantur vires absolutæ in datâ quavis ratione, & orbium  $E S E$  &  $P A B$ , magnitudo ita mutetur, ut orbis  $E S E$  sibi similis semper maneat, sicut & orbis  $P A B$  sibi, & horum orbium inclinatio non mutetur, nec proportio seu ratio axium unius orbis ad axes alterius aut linearum quarumvis in uno orbe ad lineas homologas in altero orbe.

# 448 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
L X V I.  
THEOR.  
X X V I.  
tetur eorum magnitudo, & si corporum  $S$  &  $T$  vel maneant; vel mutantur vires in datâ quâvis ratione; (c) hæ vires (hoc est, vis corporis  $T$ , quâ corpus  $P$  de recto tramite in orbitam  $PAB$  deflectere, & vis corporis  $S$ , quâ corpus idem  $P$  de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt semper eodem modo, & eâdem proportionem: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut orbium diametri, angulares verò iidem, qui prius, & errorum linearum similium, vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica.

*Corol. 16.* Unde, si dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutantur utcumque corporum magnitudines, vires & distantie; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno casu, colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proximè: sed brevius hæc methodo. (d) Vires  $NM$ ,  $ML$ , cæteris stantibus, sunt ut radius  $TP$ , & harum effe-

(c) \* *Hæ vires &c.* Vis acceleratrix quâ corpus  $P$  in loco  $P$  versus  $T$  trahitur, est (512) ad vim acceleratricem quâ versus  $S$  urgetur, in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis  $T$  ad vim absolutam corporis  $S$ , & ratione inversâ duplicatâ distantie  $P T$  ad distantiam  $P S$ . Quare si vires absolutæ & distantie in datis rationibus mutantur, manebit eadem virium acceleratricium ratio, & ob figurarum similitudinem, in similibus corporum  $P$ ,  $T$ ,  $S$  positionibus, antè & post distantias viresque mutatas omnium linearum  $SP$ ,  $SK$ ,  $ML$ ,  $SM$ ,  $NM$ , &c. eadem manet ratio, atque adeo vires agunt semper eodem modo & eâdem proportionem. Necesse igitur est, ut antè & post distantias, & vires mutatas in datis rationibus, similes ac proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora (196) hoc est, errores omnes lineares similes à viribus  $ML$ ,  $NM$  producti, seu deviationes, corporis  $P$  in longitudinem & latitudinem à locis illis in quibus versaretur, si viribus perturbantibus  $ML$ ,  $NM$  non

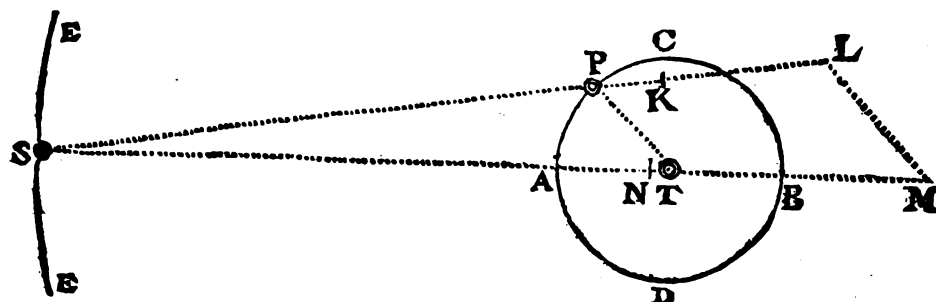
agitaretur, sunt ut orbium diametri, & anguli sub quibus è centro  $T$  deviationes illæ similes videntur, semper manent æquales, ut patet ex naturâ figurarum similium (*Lem. V. & not. 112*), & errorum linearum similium vel angularium æqualium tempora, sunt ut orbium tempora periodica (196). Hæc omnia etiam obtinent, ubi corporum duorum  $T$ , &  $P$  systema circâ corpus  $S$  revolvitur, ut patet, si loco orbis  $ESE$  in demonstratione ponatur orbis quem corpus  $T$  circum  $S$  describit.

(d) \* *Vires  $NM$ ,  $ML$  &c.* Quoniam vires  $NM$ ,  $ML$  sunt (*cor. 14.*) ut vis  $SK$  & ratio  $P T$  ad  $S T$  conjunctim, manentibus vi  $SK$  &  $S T$  erunt vires illæ ut radius  $TP$  & proinde aucto vel diminuto radio illo  $TP$ , manent in datâ inter se ratione, & quoniam ob longinquitatem corporis  $S$  ad similes orbis variabilis  $PAB$  (sed sibi semper similis & æque inclinati) partes similiter applicantur quamproximè, illarum effectus periodici. (*per coroll. 2. Lem. X.*) sunt ut vires ipsæ & quadratum temporis periodici corporis  $P$  circum  $T$

con-

effectus periodici ( *per corol. 2. lem. x.* ) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares è centro *T* spectati ( id est, tam motus augis & nodorum, quàm omnes

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROP. LXVI.  
THEOR. XXVI.

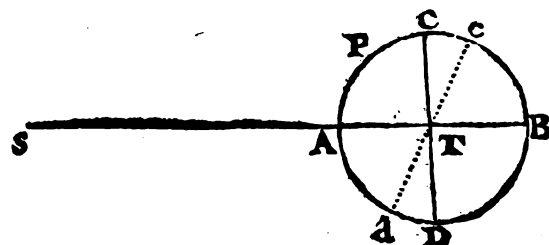


in longitudinem & latitudinem errores apparentes) sunt, in quolibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proximè. Conjungantur hæ rationes cum rationibus corollarii xiv. & in quolibet corporum *T*, *P*, *S* systemate, ubi *P* circum *T* sibi propinquum, & *T* circum *S* longinquum re-

conjunctim, hoc est, ut radius *TP*, & quadratum temporis periodici corporis *P* quamproximè. Porro si in orbita circulari vel circulo finitima *PAB*, sit arcus *Dd* error linearis periodicus v. gr. nodi *D* in antecedentia ad *d* regressi tempore unius revolutionis corporis *P* circum *T*, angulus *DTd*, sub quo error ille *Dd* è centro *T* videtur, hoc est, error angula-

ris periodicus erit  $= \frac{Dd}{TD} (154)$ . Errores igitur angulares periodici sunt ut errores lineares directè & radius *TD* vel *TP* inversè, adeoque ut quadratum temporis periodici corporis *P* quamproximè. Et hæc quidem vera sunt, stantibus vi absolutâ corporis *S* & distantia *ST* & variantibus radio *TP* ac tempore periodico corporis *P*; verum stantibus radio *TP* & tempore periodico corporis *P* & variantibus vi absolutâ corporis *S* atque distantia *ST*, errores periodici tum lineares, tum angulares sunt ( *coroll. 14.* ) recepto-

Tom. I.



oè ut quadratum temporis periodici corporis *T* circum *S*, quare variantibus tum radio *TP*, & tempore periodico corporis *P*, tum radio *ST*, atque vi absolutâ corporis *S*, errores angulares corporis *P* de centro *T* apparentes, erunt in singulis revolutionibus corporis illius *P* circum *T*; in ratione ex binis superioribus rationibus compositâ, seu erunt ut quadratum temporis periodici corporis *P*, directè & quadratum temporis periodici corporis *T*, inversè.

# 450 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. LXXVI. THEOR. XXVI.  
volvitur, errores angulares corporis  $P$ , de centro  $T$  apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius  $P$ , ut quadratum temporis periodici corporis  $P$  directè, & quadratum temporis periodici corporis  $T$  inversè. (e) Et inde motus medius augis erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis  $P$  directè & quadratum temporis periodici corporis  $T$  inversè. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis  $PAB$  (f) non mutantur motus augis & nodorum sensibilibiter, nisi ubi eadem sunt nimis magnæ.

*Corol. 17.* Cum autem linea  $LM$  nunc major sit, nunc minor quam radius  $PT$ , exponatur vis mediocris  $LM$  per radium illum  $PT$ ; & erit hæc ad vim mediocrem  $SK$  vel  $SN$  (quam exponere licet per  $ST$ ) ut longitudo  $PT$  ad longitudinem  $ST$ . Est autem vis mediocris  $SN$  vel  $ST$ , quâ corpus  $T$  retinetur in orbe suo circum  $S$ , ad vim, quâ corpus  $P$  retinetur in orbe suo circum  $T$ , (g) in ratione compositâ ex ratione radii  $ST$ , ad radium  $PT$ , & ratione duplicatâ temporis periodici

cor-

(e) \* *Et inde motus medius augis &c.* Si corpus quodvis celerius & tardius vel in plagas oppositas per vices moveatur, illius velocitas æquabilis media, seu motus medius obinetur, si spatium quod corpus illud in unam plagam latum, longo satis tempore percurrit, per illud notabile tempus dividatur. Hinc quoniam apsidum & nodorum motus tardior & celerior est per vices, nunquam in antecedentia, nunc in consequentia fit, invenitur illorum motus medius angularis, si spatium angulare totum, quod plurimum revolutionum corporis  $P$  tempore describunt, per illud tempus dividatur. Quare cum motus angularis periodicus augis & nodorum sit (ex *Dem.*) ut quadratum temporis periodici corporis  $P$  directè, & quadratum temporis periodici corporis  $T$  inversè, si ratio hæc composita per tempus periodicum corporis  $P$  pluries sumptum dividatur, erit quotiens seu motus medius angularis augis & nodorum ut tempus periodicum corporis  $P$  directè & quadratum temporis pe-

riodici corporis  $T$  inversè; & inde motus medius augis & nodorum, qui sunt ambo ut eadem quantitas, seu ut tempus periodicum corporis  $P$  directè & quadratum temporis periodici corporis  $T$  inversè, datam habent ad se mutuo rationem.

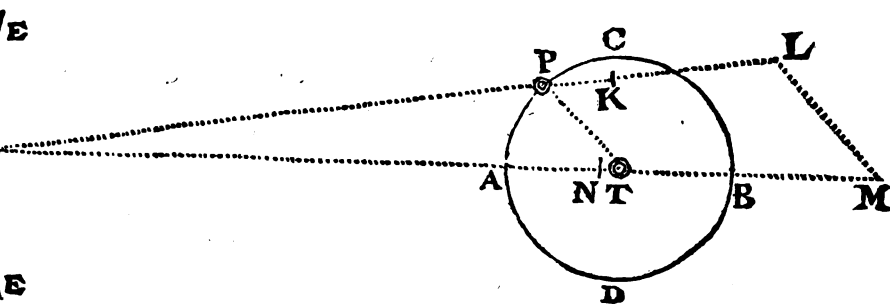
(f) \* *Non mutantur &c.* Nam vires  $ML$ ,  $NM$  motuum augis & nodorum productrices, cæteris stantibus, non multum mutantur, si augeatur vel minuatur excentricitas & inclinatio orbis  $PAB$ , nisi magna satis fuerit illa mutatio, ut patet ex ratione quâ vires illæ  $ML$ ,  $NM$  prop. 66. determinantur.

(g) \* *In ratione compositâ ex ratione radii  $ST$  &c.* Nam (per cor. 2. prop. 4.) vis acceleratrix mediocris  $ST$  quâ corpus  $T$  circum  $S$  ad distantiam  $ST$  circulum vel orbem circulo finitimum describere supponitur, est ad vim similem quâ corpus  $P$  in orbitâ suâ circulari vel circulo finitima retinetur in ratione compositâ ex ratione radii  $ST$  ad radium  $PT$  directè, & ratione duplicatâ temporis pe-

no-

## PRINCIPIA MATHEMATICA. 451

corporis  $P$  circum  $T$  ad tempus periodicum corporis  $T$  circum  $T$  De Mo-  
S. Et ex æquo, vis mediocris  $LM$  ad vim, quâ corpus  $P$  TU COR-  
retinetur in orbe suo circum  $T$  (quâve corpus idem  $P$ , eodem PORUM.  
tempore periodico, circum punctum quodvis immobile  $T$  ad LIBER  
distantiam  $PT$  revolvi posset) est in ratione illâ duplicatâ PRIMUS.  
periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unâ PROP.  
cum distantia  $PT$ , datur vis mediocris  $LM$ ; (<sup>h</sup>) & eâ datâ, THEOR.  
datur etiam vis  $MN$  quam proximè per analogiam linearum X X VI.  
 $PT, MN$ .



*Corol.* 18. Iisdem legibus; quibus corpus  $P$  circum corpus  $T$  revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem  $T$  ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari anulum fluidum, rotundum ac corpori  $T$  concentricum; & singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis  $P$  peragendo, propius accedent ad corpus  $T$ , & celerius movebuntur in conjunctione & oppositione ipsarum & corporis  $S$ , quàm in quadraturis. Et nodi annuli hujus, seu intersectiones ejus cum plano orbitæ corporis  $S$  vel  $T$ , qui-

periodici corporis  $T$  circum  $S$ , ad tempus periodicum corporis  $P$  circum  $T$ , inversè. Quare vis prior est ad posteriorem in ratione composita ex ratione radii  $ST$  ad radium  $PT$ , & ratione duplicata temporis periodici corporis  $P$  ad tempus periodicum corporis  $T$ ; cumque sit etiam, ex *Dem.*, vis mediocris  $LM$  ad vim medicrem  $ST$ , ut  $PT$  ad  $ST$ , erit per com-

positionem rationum & ex æquo; vis mediocris L M, ad vim acceleratricem quæ corpus P retinetur in orbe suo circum T, ut quadratum temporis periodici corporis P circum T ad quadratum temporis periodici corporis T circum S.

(h) \* *Es eâ datâ*, datur etiam vis NM (500).



DE Mo- quiescent in syzygiis; extra syzygias verò movebuntur in antece-  
 TU COR- dentia, & velocissimè quidem in quadraturis, tardius aliis in-  
 PORUM. locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, <sup>(i)</sup> & axis ejus sin-  
 LIBER gulis revolutionibus oscillabitur; completâque revolutione ad pris-  
 PRIMUS tinum situm redibit, nisi quâtenus per præcessionem nodorum  
 PROP. circumfertur.

LXVI. THEOR. Corol. 19. Fingas jam globum corporis *T*, ex materiâ non-  
 XXVI. fluidâ constantem, ampliari & extendi usque ad hunc annu-  
 lum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motu-  
 que eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi.  
 Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore  
 corollario) <sup>(k)</sup> in syzygiis velocior erit, in quadraturis tardior  
 quam superficies globi, & sic fluet in alveo refluetque ad mo-  
 dum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quiescens,  
 si tollatur attractio corporis *S*, nullum acquireret motum fluxus  
 & refluxus. <sup>(l)</sup> Par est ratio globi uniformiter progredientis  
 in directum, & interea revolventis circa centrum suum (per  
 legum corol. v.) ut & globi de cursu rectilineo uniformiter  
 tracti, (per legum corol. 6.) Accedat autem corpus *S*, & ab  
 ipsius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim ma-  
 jor erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. <sup>(m)</sup> Vis  
 autem *LM* trahet aquam deorsum in quadraturis, facietque  
 ipsam.

(i) \* Et axis ejus seu recta per cen-  
 trum annuli ducta ad planum ejus perpen-  
 diculariter, cum plano illo singulis revolu-  
 tionibus oscillabitur, hoc est, ad planum  
*EST* magis & minus per vices inclinabi-  
 tur (cor. 10.) completaque &c. totum  
 verò corollarium patet ex coroll. 3. 5. 10.  
 11. 13.

(k) \* In syzygiis velocior erit &c.  
 Per cor. 18. & 3. Nam velocitas unifor-  
 mis quâ globus circa axem suum revolvi-  
 tur eodem tempore periodico quo pars  
 quælibet fluidi suam revolutionem absol-  
 vit, media erit inter maximam velocita-  
 tem fluidi in syzygiis & minimam in qua-  
 draturis.

(l) \* Par est ratio &c. Id est, ex-  
 clusâ actione corporis *S* aqua uniformiter

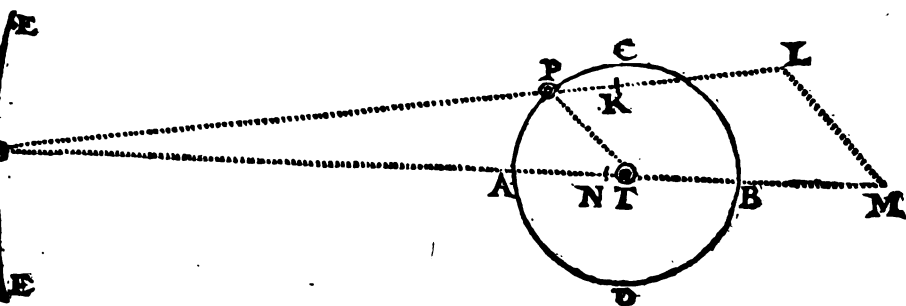
revolvendo circum centrum globi vel uni-  
 formiter moti in directum vel de cursu  
 rectilineo per lineas parallelas uniformiter  
 tracti, nullum acquireret motum fluxus &  
 refluxus, accedat autem &c.

(m) \* 514. Vis autem *LM* &c. Pa-  
 tet per coroll. 5. Verum ut totum hoc co-  
 rollarium 19<sup>um</sup> clarius intelligatur, sit:  
*c a d b* globi solidi æquator hoc est, circulus  
 globi maximus ad axem rotationis glo-  
 bi perpendicularis *CADB* zona fluida sa-  
 tis profunda, seu annulus fluidus globo  
 circumpositus, & supponendo quod cen-  
 trum gravitatis globi solidi accuratè vel  
 quamproximè coincidat cum figuræ centro  
*T*, globus eodem quamproximè modo tra-  
 hetur à corpore longinquo *S*, & trahet  
 ipse particulam *P* fluidi (71.) ac si tota  
 illius.

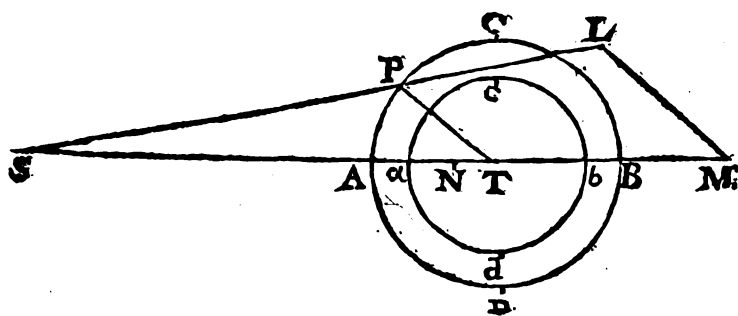
# PRINCIPIA MATHEMATICA. 453

ipsam descendere usque ad syzygias; & vis  $KL$  trahet eandem De Mo-  
 sursum in syzygiis, sistetque descensum ejus & faciet ipsam as-  
 cendere usque ad quadraturas: nisi quatenus motus fluendi &  
 refluendi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquatenus  
 retardetur.

LIBER  
 PRIMUS.  
 PROP.  
 LXVI.  
 THEOR.  
 XXVI.



*Corol. 20.* Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, cessa-  
 bit motus fluendi & refluendi; (n) sed oscillatorius ille inclinatio-  
 nis motus & præcessio nodorum manebunt. Habeat globus eun-  
 dem axem cum annulo, gyroſque compleat iisdem tempori-  
 bus, & superficie suâ contingat ipsum interius, eique inhæreat;  
 & participando motum ejus, compages utriusque oscillabitur,  
 & nodi regredientur. (o) Nam globus, ut mox dicetur, ad  
 susci-



illius massa esset in centro T coacta (quod  
 quidem accuratè verum esse quibusdam in-  
 casibus postea demonstrabitur), sed hic  
 approximatio sufficit; quare fluidi particu-  
 la quævis P à corpore S inæqualiter at-  
 tracta totusque proinde annulus movebun-  
 tur, ut in coroll. 19. ex corollariis præ-  
 cedentibus determinatum est.  
 (n) \* Sed oscillatorius ille &c. Patet  
 per cor. 18. & not. superiorem.  
 (o) \* Nam globus indifferens est &c.  
 Liqueat etiam ex legibus 1. & 2. & not. 9.  
 L.11 3.

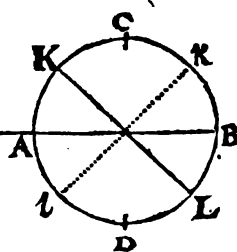
DE MO-  
TU COR-  
FORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP. LXVI.  
THEOR. XXVI.  
fusciendas impressiones omnes indifferens est. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus est, ubi nodi sunt in syzygiis. Inde in progressu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimit globo toti. (P) Retinet globus motum impressum, usque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque (q) hac ratione maximus decrescens inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus post quadraturas; dein maximus reclinacionis motus in syzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem est ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulò quam juxta polos, vel constat ex materiâ paulo densiore. (r) Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Et quanquam, auctâ utcunque globi hujus vi centripetâ, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum,

(p) Retinet globus motum impressum. Per Leg. 1. & 2.

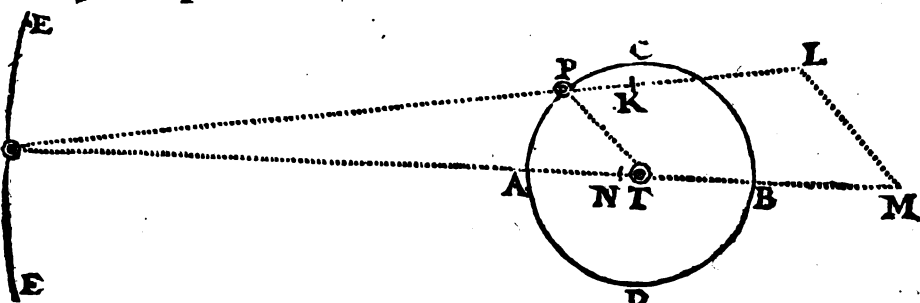
(q) \* Atque hac ratione maximus inclinationis motus fit in quadraturis nodorum (per coroll. 18. & 10.) non idè tamen ibidem fit minimus inclinationis angulus, sed in octantibus post quadraturas. Sint enim nodi K & L in octantibus post syzygias A & B, & retrogrediendo accedant ad quadraturas C, D; dum nodus K percurrit arcum KC, & nodus L, arcum LD, inclinatio per actionem vis NM, continuò decrescit, cumque nodus K, pervenit in C, & transit ad octantem k perseverat, ex inertia materiæ, motus inclinationis decrescens per totum arcum KC impressus; Licet vis NM in contrarium agat per totum arcum C k = C K; vis enim NM per arcum C k motum inclinationis decrescens iisdem gradibus diminuit, quibus per arcum KC productus & acceleratus est. Quare ille decrescens inclinationis motus penitus non destruitur, nisi nodus K pervenerit in k, tumque vis NM planum reclinat, hoc est, nodo existente in k incipit motus reclinacionis sive motus

inclinationis crescentis & perseverat usque ad octantem proximum L atque ibi cessat. Liquet igitur minimum angulum inclinationis fieri in octantibus nodorum k, l post quadraturas C, D maximum verò dum nodi versantur in octantibus K & L post syzygias A, B.

(r) Supplet enim vicem annuli &c. Patet per not. 514. Si materiæ in æquatoris regionibus excessus per annulum CcADb, (vid. fig. nat. 514.) exhibeatur & reliqua globi materia in centro T coacta intelligatur.



sum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcedentis corollarii (f) vix inde mutabuntur; nisi quod loca maximarum & minimarum altitudinum



aquæ diversa erunt. Aqua enim jam in orbe suo sustinetur & permanet, non per vim suam centrifugam, sed per alveum in quo fluit. Et præterea vis LM trahit aquam deorsum maxime in quadraturis, & vis KL seu NM—LM trahit

(f) \* Vis inde mutabuntur. Nam major partium globi in centrum T gravitas non impedit quin annulus fluidus vel solidus, impressiones virium LM, NM suscipiat, loca tamen maximarum & minimarum altitudinum aquæ diversa erunt. Hucusque enim supposuimus particulas aquæ ex virium centripetæ & centrifugæ æquilibrio, in orbe suo sustineri & permanere instar corporis solitarii P circum T in spatio libero revolventis; atque inde ex cor. 5. ostensum est in cor. 18. maximam aquæ altitudinem in quadraturas incidere, minimam in syzygiis. Verum si manente eadem vi centrifugâ augeatur vis centripeta, seu gravitas particularum aquæ, particula illæ non vi suâ centrifugâ, sed alvei parietibus, ut in mari atque fluminibus telluris contingit, sustinentur & in orbe suo permavent ac proinde non amplius ad legem corporis solitarii circum centrum T, in spatio libero revolventis à centro illo T recedunt, vel ad illud accedunt. Loca igitur maximarum & minimarum altitudinum aquæ diversa erunt: velocitas tamen partium aquæ, cæteris paribus, maxima erit in syzygiis, minima in quadraturis (per cor. 3.) Præterea vis LM addititia trahit, aquam deor-

sum, seu ad centrum T, maxime in quadraturis (504.) & vis ablatitia KL trahit eandem sursum, maxime in syzygiis (501) & ided si globus cum aquâ circumposita non revolveretur circa centrum T, minimæ aquarum altitudines in quadraturis C & D, maximæ in syzygiis A & B essent) verum revente cum globo æquâ à C ad A, vis addititia post quadraturas agens, aquam deorsum semper urget, donec vi ablatitiâ vincatur; & similiter hæc vis ablatitia post syzygias sursum trahit aquas, quarum proinde minimæ altitudines non incident in quadraturas, sed post quadraturas, maximæ verò post syzygias. Insuper rotatio globi circa proprium axem maximas aquarum altitudines à syzygiis A & B versus quadraturas D & C transfert, intereadum vires LM; NM simul junctæ maximas eas aquarum altitudines in syzygiis instaurare perpetuè nituntur, aqua autem à C & D continuè fluit versus A & B, dum elevatio ab A versus D & à B versus C transfertur, & ided inter A & D ut & inter B & C dantur duo motus contrarii quibus aqua accumulatur ita ut altitudines maximæ inter hæc puncta incidant fere circa octantes.

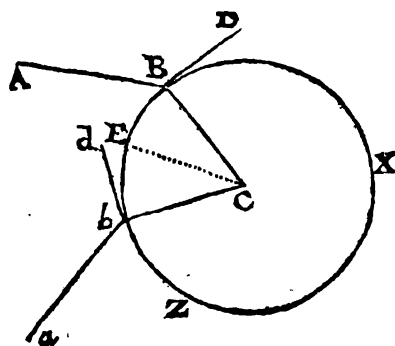
DE MO- hit eandem sursum maximè in syzygiis. Et hæ vires conjunc-  
 TU COR- tæ desinunt trahere aquam deorsum & incipiunt trahere aquam  
 PORUM. sursum in octantibus ante syzygias, ac desinunt trahere aquam  
 LIBER sursum incipiuntque trahere aquam deorsum in octantibus post  
 PRIMUS. syzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire potest in octan-  
 PRO P. tibus post syzygias, & minima in octantibus post quadraturas  
 LXVI. circiter; nisi quatenus motus ascendendi vel descendendi ab his  
 THEOR. viribus impressus vel per vim insitam aquæ paulò diutius perfe-  
 XXVI. veret, vel per impedimenta alvei paulò citius sistatur.

*Corol. 21.* Eâdem ratione, quâ materia globi juxta æqua-  
 torem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per  
 hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem ve-  
 rò diminuitur, & per ablationem tollitur; (1) si materia plus-  
 quàm redundans tollatur, hoc est si globus juxta æquatorem vel  
 depressior reddatur, vel rarior quàm juxta polos, orietur motus  
 nodorum in consequentia.

*Corol. 22.* Et inde vicissim, ex motu nodorum innotescit  
 constitutio globi. Nimirum si globus polos eosdem constanter  
 servat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem  
 redundat; si in consequentia, deficit. Pone globum uniformem  
 & perfectè circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein  
 impetu quocunque obliquè in superficiem suam facto propelli,  
 & motum inde concipere. (u) partim circularem, partim in di-  
 rectum

(1) \* Si materia plusquam redundans  
 tollatur, seu si materia redundans negati-  
 va fiat, motus nodorum qui erat in ante-  
 cedentia, negativus evadet, hoc est, orie-  
 tur motus nodorum in consequentia.

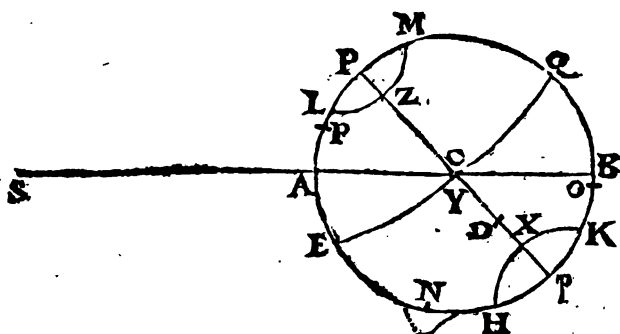
(u) \* Partim circularem, partim in  
 directum. Vis A B quâ globus B X Z obli-  
 què impellitur, secundum directionem  
 A B, in duas vires resolvitur, quarum al-  
 tera ad centrum C juxta radium B C di-  
 rigitur, ei motum globi in directum pro-  
 ducit, altera secundum tangentem B D ra-  
 dio B C normalem agit, & motum rota-  
 tionis circâ axem plano ABDXC perpen-  
 dicularem inducit.





# 458 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO- bunt hi eundem motum circularem ac si simul & semel in lo-  
TU COR- cum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim  
PORUM. generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneous & per-  
LIBER. fectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes  
PRIMUS. componit & ad unum reducit, & quatenus in se est, gyratur  
LXVI. semper motu simplici & uniformi circa axem unicum, inclina-  
THEOR. tione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta incli-  
XXVI. nationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si  
globus plano quocunque, per centrum suum & centrum in  
quod vis dirigitur transeunte, dividi intelligatur in duo hemi-  
sphæria; urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqua-  
liter, & propterea globum, quoad motum rotationis, (b) nul-  
lam in partem inclinabit. Addatur verò alicubi inter polum &  
æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc,  
perpetuo conatu recedendi à centro sui motus, turbabit mo-  
tum



uniformem; tum directum; tum circularem  
circa axem unicum. inclinatione semper  
invariabili datum adeoque & sibi semper  
parallellum.

(b) \* *Nullam in partem inclinabit.*  
Sit S virium centrum, A P Q E globus cir-  
cà axem P p revolvens, S C B planum per  
centrum globi C & per centrum virium S  
transiens, globumque dividens in duo he-  
misphæria A P B, A p B, vis centripeta ur-  
gebit semper utrumque hemisphærium æ-  
qualiter versùs S, & propterea globum  
quoad motum rotationis nullam in partem  
inclinabit, manebitque proinde eadem  
axis. P p inclinatio. Addatur verò alicu-

bi, v. gr. in N, inter polum p & æquatorem E Y Q materia nova in formam mon-  
tis cumulata, & hæc, perpetuo conatu re-  
cedendi à centro sui motus E, turbabit  
motum globi, quod partem globi N, cui  
adhæret validius trahat quam vis centri-  
fuga partem oppositam O, magis depref-  
sam; & ideo faciet ut poli P, p, errent  
per superficiem globi & circulos L, M,  
H X K, circum se punctumque sibi oppo-  
situm describant. Nam cum materia illa  
est in loco N, sua majori vi centrifuga  
facit ut polus p accedat ad H & polus P  
ad M, sublato partium globi æquilibrio;  
undè materia illa revolvens, poli H & M  
circ-



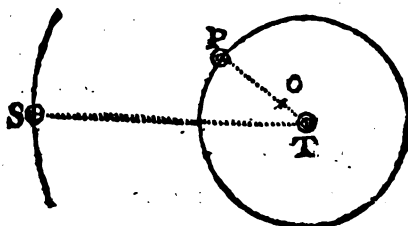
# PRINCIPIA MATHEMATICA. 459

um globi, facietque ut poli ejus errent per ipsius superficiem, DE MO-  
 & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuò descri- TU COR-  
 pant. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando PORUM.  
 montem illum vel in polo alterutro, quo in casu ( per corol. LIBER  
 XXI. ) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, quâ ra- PRIMUS.  
 tione ( per corol. XX. ) nodi regredientur; vel denique ex alterâ L XVI.  
 xis parte addendo materiam novam, quâ mons inter moven- THEOR.  
 dum libretur, & hoc pacto nodi vel progredientur, vel rece- XXVL  
 lent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo  
 vel æquatori propiores.

## PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, cir-  
 ca interiorum P, T commune gravitatis centrum O, radiis ad  
 centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportiona-  
 les & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem ha-  
 bentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maxi-  
 mum T, radiis ad ipsum ductis, describere potest.

Nam corporis S attractiones  
 versus T & P componunt ip-  
 sius attractionem absolutam, quæ  
 magis dirigitur in corporum T  
 & P commune gravitatis cen-  
 trum O, quam in corpus ma-  
 ximum T, quæque quadrato dis-  
 tantiae S O magis est proportionalis reciprocè; quam quadra-  
 to distantiae S T: ( c ) ut rem perpendenti facile constabit.



PRO-

circulos H X K H, M Z L M describunt  
 in superficie globi circa puncta P, p, sive  
 circa loca polorum antequam materia in N  
 addita esset. Neque corrigetur ista vaga-  
 tionis enormitas, nisi locando montem il-  
 lum vel in polo alterutro p vel P ubi po-  
 lus non magis in unam partem trahit  
 quam in alteram; vel in æquatore E Y Q,  
 ubi polus unum non magis trahit quam  
 alteram; vel ex alterâ axis parte in Q ad-

dendo materiam novam quâ motus in N  
 inter movendum libretur, seu quâ axis in  
 partes oppositas æque trahatur, vel etiam  
 addendo materiam novam ex alterâ æqua-  
 toris parte in R, quâ polus P tantum tra-  
 hatur quantum polus p à materiâ in N  
 posita.

( c ) \* Ut rem perpendenti facile con-  
 stabit. Nam vis acceleratrix composuit  
 quâ corpus S à corporibus T & P trahi-

M m m a tur

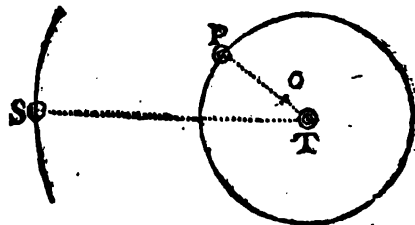


DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXVIII.  
THEOR.  
XXVIII.

## PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

*Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P & T commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipseo umbilicam in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multò magis aut multò minus attractum aut multò magis aut multò minus agitur.*

(<sup>d</sup>) Demonstratur eodem fere modo cum prop. LXVI. sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem sic æstimare. Ex demonstratione propositionis novissimæ liquet centrum, in quod corpus S conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus S ex unâ parte, & commune centrum aliorum duorum ex alterâ parte, circa commune omnium centrum quiescens, ellipses accuratas.



rar directio cadit inter lineas SP, ST, & cæteris paribus, magis accedit ad ST, quam ad SP (si modò corpus majus T cæteris paribus magis trahat quam corpus minus P) quemadmodum centrum gravitatis O, propius est corpori T quam corpori P; præterea manente distantia ST, vis acceleratrix corporis S versùs P augetur vel diminuitur, dum decrescit vel crescit distantia SP, & similiter distantia SO, augetur vel diminuitur, prout crescit vel decrescit SP; Quare attractio absoluta (scilicet tota) corporis S quadrato distantia SO ma-

gis proportionalis est reciproce, quam quadrato distantia ST; insuper commune gravitatis centrum O fere spectari potest tanquam punctum in quo corporum T & P vires physicè uniantur.

(<sup>d</sup>) \* Demonstratur eodem fere modo &c. Nimirum resolvendo singulas attractiones corporis S versùs P & T in alias quarum duæ ad centrum O dirigantur & alias duæ directiones habeant rectæ TE parallelas.

(<sup>e</sup>) \* Liqueat hoc &c. Nam si ceptum in quod corpus S conjunctis viribus urge-

col-

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 461

collatum cum demonstratis in prop. LXIV. & LXV. Perturba-  
tur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duo-  
rum à centro, in quod tertium S attrahitur. Detur præterea  
motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proin-  
de minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quies-  
cit; hoc est, ubi corpus intimum & maximum T lege cætero-  
rum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud  
centrum, (f) minuendo motum corporis T, moveri incipit, &  
magis deinceps magisque agitur.

*Corol.* Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa  
maximum, colligere licet quod orbitæ descriptæ propius acce-  
dent ad ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabi-  
les, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eo-  
rum vires absolutæ directè & quadrata distantiarum inversè, se  
mutuo trahant agitentque, & orbitæ cujusque umbilicus collo-  
cetur in communi centro gravitatis corporum omnium interio-  
rum ([g] nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro  
gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ secundæ, in  
communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste  
ter-

ter coincideret cum centro O gravitatis  
communi duorum corporum P & T hæc  
duo corpora P & T ellipses accuratas seor-  
sum describerent circum se mutuo & cir-  
cum centrum illud O (per coroll. 2. prop.  
58). Et præterea corpus S ex una parte  
& duorum aliorum systema tanquam unum  
corpus consideratum, hoc est, eorum com-  
mune gravitatis centrum O ex altera par-  
te ellipses accuratas describerent circum  
commune trium S, T, P centrum gravita-  
tis quietens (per coroll. 2. prop. 58.).  
Quod adhuc clarius intelligitur, si legan-  
tur propositiones 64. 65. Perturbatur iste  
motus ellipticus aliquantulum per distan-  
tiam centri O, duorum P & T à centro  
in quod tertium S trahitur. Detur præ-  
terea motus non uniformis in directum  
communi trium centro, (quod continget,  
si corpus intimum & maximum T, lege  
cæterorum non attrahitur, ut ex dictis  
patet) & augebitur perturbatio, proinde &c.

(f) \* Minuendo motum corporis T &c.

Quâ ratione fit ut centrum commune trium  
corporum, interea dum corpora S & P mo-  
ventur, nunc accedat ad corpus T nunc  
ab illo recedat, pro mutata corporum il-  
lorum distantia, & hinc magis ac magis  
perturbabitur motus ellipticus & magis ac  
magis deinceps agitabitur centrum com-  
mune gravitatis trium corporum.

(g) \* Nimirum umbilicus orbitæ pri-  
mæ & intimæ, quam v. gr. corpus par-  
vum P hic describit in centro gravitatis  
corporis maximi & intimi T quod fere  
coincidit cum communi centro O gravita-  
tis duorum P & T (per cas. 1. prop. 65.);  
umbilicus orbitæ secundæ quam v. gr. cor-  
pus S describit in communi centro gravi-  
tatis O, corporum duorum intimorum P  
& T; umbilicus tertie orbitæ quam aliud  
corpus longius distans describeret in com-  
muni centro gravitatis trium interiorum  
P, T, S &c. Nam idem est ratiocinium  
seu tria seu quatuor aut plura sint corpo-  
ra (ut in prop. 64. 65.)

M m m 3

# 462 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORP. DEinceps ) in communi centro gravitatis trium interiorum; & sic  
FORUM. deinceps ) quam si corpus intimum quiescat & statuatur commu-  
LIBER. nis umbilicus orbitarum omnium.

## PRIMUS. PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

LXIX. In systemate corporum plurium,  $A, B, C, D$ , &c. si corpus ali-  
THEOR. quod  $A$  trahit cetera omnia  $B, C, D$ , &c. viribus acceleratri-  
XXIX. cibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum à trahente; & corpus aliud  $B$  trahit etiam cetera  $A, C, D$ , &c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum à trahente: erunt absolutæ corporum trahentium  $A, B$  vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora  $A, B$ , quorum sunt vires.

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium  $B, C, D$  versus  $A$ , paribus distantis, sibi invicem æquantur ex hypothesi; & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus  $B$ , paribus distantis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis  $A$  ad vim absolutam attractivam corporis  $B$ , <sup>(h)</sup> ut attractio acceleratrix corporum omnium versus  $A$  ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus  $B$ , paribus distantis; <sup>(i)</sup> & ita est attractio acceleratrix corporis  $B$  versus  $A$ , ad attractionem acceleratricem corporis  $A$  versus  $B$ . Sed attractio acceleratrix corporis  $B$  versus  $A$  est ad attractionem acceleratricem corporis  $A$  versus  $B$ , ut massa corporis  $A$  ad massam corporis  $B$ ; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem secundam, septimam & octavam) sunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hic sunt (per motus legem tertiam) <sup>(k)</sup> sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis  $A$  est ad absolutam

(h) \* Ut attractio acceleratrix corporum omnium, seu ut attractio acceleratrix uniuscujusque corporis versus  $A$  &c. Patet enim quod si vis absoluta dupla vel tripla &c. sit, actio quoque acceleratrix in distantia datâ dupla vel tripla erit.

(i) \* Et ita est attractio acceleratrix corporis  $B$  versus  $A$ , ad attractionem acceleratricem corporis  $A$  versus  $B$ , ob distan-

tiam inter  $B$  &  $A$ ; &  $A$  &  $B$  eandem.

(k) \* Sibi invicem æquales. Si enim attractio acceleratrix corporis  $B$  versus  $A$  dicatur  $V$  & attractio acceleratrix corporis  $A$  versus  $B$  dicatur  $v$ ; vis motrix in  $B$ , erit  $B \times V$ ; in  $A$  erit  $A \times v$ ; & (per leg. 3<sup>am</sup>.)  $B \times V = A \times v$ . Unde  $V : v = A : B$ . Ergo absoluta &c.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 463

lutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. *Q. E. D.*

*Corol. 1.* Hinc si singula systematis corpora *A, B, C, D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

*Corol. 2.* Eodem argumento, si singula systematis corpora *A, B, C, D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciprocè, vel directè in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum à trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires (1) absolutæ sunt ut corpora.

*Corol. 3.* In systemate corporum quorum vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum, si minora circa maximum in ellipsis, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, (m) quam fieri potest accuratissimis revolvantur; & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; & (n) contra. Patet per *corol. prop. LXVIII.* collatum cum hujus *corol. 1.*

*Schar-*

(1) \* *Vires absolutæ sunt ut corpora.* Omnia enim ratiocinia eadem manent in hujus corollarii hypothese ac in demonstratione & hypothese propositionis.

(m) \* *Quam fieri potest accuratissimis revolvantur*, ut in duobus casibus *prop. 65.* expositum est.

(n) \* *Et contra.* Si vires corporum illorum absolutæ sint ad invicem in ratione corporum, & minora corpora circa maximum in ellipsis umbilicum commu-

nem in maximi illius centro habentibus; quam fieri potest, accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales, corporum illorum seorsim spectatorum vires acceleratrices decrescent in ratione duplicatâ distantiarum aut accuratè aut quam proximè; ut liquet ex *coroll. 2. prop. 58.* collato cum *prop. 64. 65.*

DE MOTU CORPORUM  
LIBER PRIMUS.  
PROP.  
LXIX.  
THEOR.

LXIX.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

*Scholium.*

**LIBER** His propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires  
**PRIMUS.** centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent.  
**PROP.** Rationi enim consentaneum est, ut vires, quæ ad corpora di-  
**LXIX.** riguntur, pendeant ab eorundem naturâ & quantitate, ut fit in  
**THEOR.** magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ  
**XXIX.** erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particu-  
 lis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem at-  
 tractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocun-  
 que accedendi ad invicem: sive conatus iste fiat ab actione  
 corporum vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se  
 invicem agitantium; sive is ab actione ætheris, aut aëris, me-  
 diive cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora in-  
 natantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu ge-  
 nerali usurpo vocem *impulsus*, non species virium & qua-  
 litates physicas, sed quantitates & proportiones mathematicas  
 in hoc tractatu expendens ut in definitionibus explicui. In  
 mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ,  
 quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequentur: dein-  
 de, ubi in physicam descenditur conferendæ sunt hæ rationes  
 cum phænomenis; ut innotescat quænam virium condiciones  
 singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum  
 demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tu-  
 tius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpo-  
 ra sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis con-  
 stantia, debeant in se mutuo agere; & quales motus inde con-  
 sequantur.

## SECTIO XII.

*De corporum sphaericorum viribus attractivis.*

## PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.LIBER  
PRIMUS.

PROP.

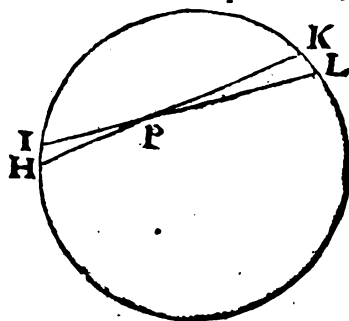
LXX.

THEOR.

XXX.

*Si ad sphaericæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.*

Sit  $HIKL$  superficies illa sphaerica, &  $P$  corpusculum intus constitutum. Per  $P$  agantur ad hanc superficiem lineæ duæ  $HK$ ,  $IL$ , arcus quàm minimos  $HI$ ,  $KL$  intercipientes; & ob triangu-  
la  $HPI$ ,  $LPK$  (per corol. 3. lem. VII. (°) similia, arcus illi erunt distantis  $HP$ ,  $LP$  proportionales; & superficiei sphaericæ particulae quævis ad  $HI$  &  $KL$ , rectis per punctum  $P$  transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus  $P$  exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulae directæ, & quadrata distantiarum inversè. Et hæc duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruent. Et simili argumento, attractiones omnes per totam sphaericam superficiem à contrariis attractionibus destruantur. Proinde corpus  $P$  nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*



(°) \* *Similia &c.* Anguli enim  $HPI$ ,  $LPK$  ad verticem oppositi, & anguli  $HIL$ ,  $LKH$  eidem arcui insistentes æquantur (per prop. 27. Lib. 3. Elem.) Nam arcus evanescerent  $HI$ ,  $KL$ , pro ipsorum chordis usurpari possunt (per cor. 3. Lem. 7.) Quare arcus  $HI$ ,  $KL$  distantis  $HP$ ,  $LP$  proportionales sunt, & hinc si ad superficiem sphaericam per punctum  $P$  ductæ

intelligentur innumera rectæ ad arcus quamminimos ut  $HI$ ,  $KL$  terminatæ, rectæ illæ figuras solidas (pyramides vel conos) similes formabunt quorum bases in superficie sphaerica similes erunt, & proinde (per Lem. 5.) rationem habebunt duplicatam laterum  $HI$ ,  $HL$  seu distantiarum  $HP$ ,  $LP$ . Ergo vires &c.

DE-MO-  
TU COR-  
PORUM.

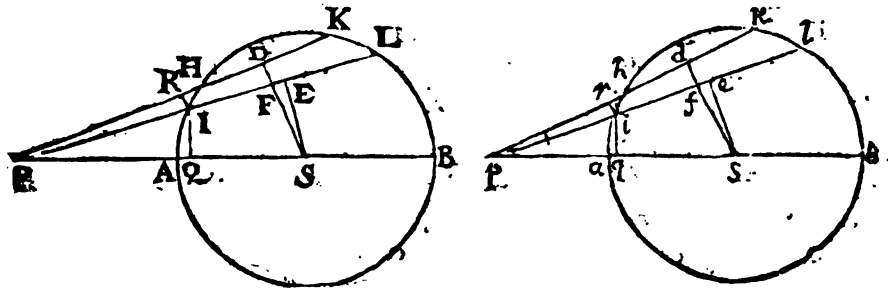
PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

LIBER PRIMUS. *Isdem positis, dico quod corpusculum extra sphaericam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphaerae; vi reciproce proportionali quadrato distantiae suae ab eodem centro.*

PROP. LXXI.

THEOR. XXXI.

Sint  $AHKB$ ,  $ahkb$  æquales duæ superficies sphaericæ, centris  $S$ ,  $s$ , diametris  $AB$ ,  $ab$  descriptæ, &  $P$ ,  $p$  corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur à corpusculis lineæ  $PHK$ ,  $PIL$ ,  $phk$ ,  $pil$ , auferentes à circulis ma-



ximis  $AHB$ ,  $ahb$ , æquales arcus  $HK$ ,  $hk$  &  $IL$ ,  $il$ : Et ad eas demittantur perpendiculara  $SD$ ,  $sd$ ;  $SE$ ,  $se$ ;  $IR$ ,  $ir$ , quorum  $SD$ ,  $sd$  secant  $PL$ ,  $pl$  in  $F$  &  $f$ : Demittantur etiam ad diametros perpendiculara  $IQ$ ,  $iq$ . Evanescant anguli  $DPE$ ,  $dpe$ : & (p) ob æquales  $DS$  &  $ds$ ,  $ES$  &  $es$ , lineæ  $PE$ ,  $PF$  &  $pe$ ,  $pf$  & lineola  $DF$ ,  $df$  pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis  $DPE$ ,  $dpe$  simul evanescentibus, (q) est æqualitatis. His itaque constitutis, (r) erit  $PI$  ad  $PF$  ut  $RI$  ad  $DF$ , &  $pf$  ad  $pi$  ut  $df$ , vel  $DF$  ad  $ri$ ; & ex æquo  $PI \times pf$  ad  $PF \times pi$  ut  $RI$  ad  $ri$ , hoc est.

(per.)

(p) \* Es ab æquales  $DS$  &  $ds$ ,  $ES$  &  $es$  &c. (Per Prop. 14. Lib. 3. Elem.). sunt differentia linearum  $DS$  &  $ES$ ,  $ds$  &  $es$ , ac proinde (ob æquales  $DS$  &  $ds$ , &  $es$ ) æquantur.

(q) \* Est æqualitatis. Nam evanescentibus  $DPE$ ,  $dpe$  angulis, puncta  $F$ ,  $f$  coincidunt cum punctis  $E$ ,  $e$ , & iis punctis coincidentibus, æquales sunt lineæ parallelas  $RI$ ,  $DF$  &  $ri$ ,  $df$ .

(r) \* Eris  $PI$  ad  $PF$  &c. Ob pa-



# PRINCIPIA MATHEMATICA. 467

(<sup>1</sup>) *per corol. 3. lem. VII.* ) (<sup>1</sup>) ut arcus  $I H$  ad arcum  $i h$ . DE MO-  
 (<sup>1</sup>) Rursus  $P I$  ad  $P S$  ut  $I Q$  ad  $S E$ , &  $p s$  ad  $p i$  ut  $s e$  vel TU COR-  
 $S E$  ad  $i q$ ; & ex æquo  $P I \times p s$  ad  $P S \times p i$  ut  $I Q$  ad  $i q$ . LIBER  
 Et conjunctis rationibus  $P I$  quad.  $\times p f \times p s$  ad  $p i$  quad.  $\times P F \times P S$ , PRIMUS.  
 ut  $I H \times I Q$  ad  $i h \times i q$ ; hoc (<sup>u</sup>) est, ut superficies circularis, PRO P.  
 quam arcus  $I H$  convolutione semicirculi  $A K B$  circa diame- L X X I.  
 trum  $A B$  describet, ad superficiem circularem, quam arcus  $i h$  THEOR.  
 convolutione semicirculi  $a k b$  circa diametrum  $a b$  describet. X X X I.

Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tenden-  
 tes attrahunt corpuscula  $P$  &  $p$ , sunt (*per hypothesein*) ut ipsæ  
 superficies directè, & quadrata distantiarum superficierum à cor-  
 poribus inversè, hoc est, ut  $p f \times p s$  ad  $P F \times P S$ . Suntque  
 hæ vires ad ipsarum partes obliquas, quæ (*factâ per legem co-*  
*rol. 2. resolutione virium.*) secundum lineas  $P S$ ,  $p s$  ad centra  
 tendunt, ut  $P I$  ad  $P Q$ , &  $p i$  ad  $p q$ ; id est (*ob similia trian-*  
*gula  $P I Q$  &  $P S F$ ,  $p i q$  &  $p s f$* ) ut  $P S$  ad  $P F$ , &  $p s$  ad  $p f$ .  
 Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus  $P$  versus  $S$

ad attractionem corpusculi  $p$  versus  $s$ , ut  $\frac{P F \times p f \times p s}{P S}$  ad  
 $\frac{p f \times P F \times P S}{p s}$ , hoc (<sup>2</sup>) est, ut  $p s$  quad. ad  $P S$  quad. Et  
 simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum  
 $K L$ ,

(<sup>1</sup>) Ut arcus  $I H$  ad arcum  $i h$ . Nam  
 triangula evanescentia  $R H I$ , &  $r h i$  similia  
 sunt ob angulos ad  $R$  &  $r$  rectos (*ex hyp.*)  
 & angulos ad  $H$  &  $h$  æquales, quos nem-  
 pè metiuntur dimidii arcus æquales  $H K$ ,  
 &  $h k$  (*per prop. 32. lib. 3. Elem.*) arcus  
 enim  $H I$ ,  $h i$  pro tangentibus in  $H$  &  $h$   
 usurpari possunt (*per Cor. 3. Lem. 7.*).  
 Quare  $R I$  est ad  $r i$ , ut arcus  $I H$  ad ar-  
 cum  $i h$ .

(<sup>1</sup>) \* Rursus &c. Ob triangula  $P Q I$ ,  
 $P S E$  &  $p q i$ ,  $p e s$  similia, est  $P I : P S$   
 $= I Q : S E$ .

(<sup>u</sup>) 515. \* Hoc est, ut superficies circula-  
 ris, quam arcus  $I H$  convolutione semicirculi  
 $A K B$  circa diametrum  $A B$  describet. Nam  
 circularis illa superficies æqualis est factò  
 ex peripheriâ circuli cujus radius  $I Q$  in

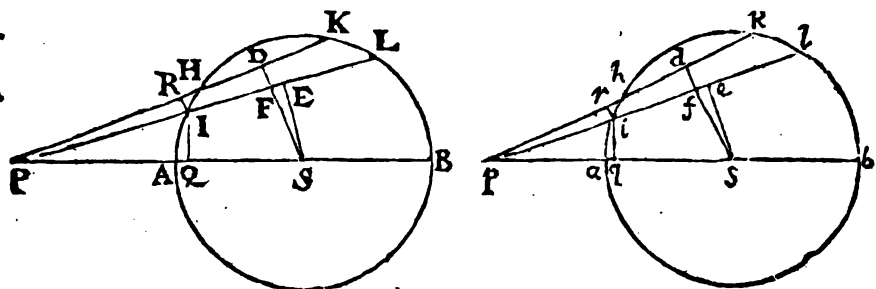
arcum evanescentem  $I H$ , & similiter su-  
 perficies circularis quam arcus  $i h$ , convò-  
 lutione semicirculi  $a k b$  circa diametrum  
 $a b$ , describet, æquatur factò ex peripheria  
 circuli cujus radius  $i q$ , in arcum evanes-  
 centem  $i h$ , (*152*). Cum igitur periphe-  
 riæ circulorum sint ut radii, facta illa erunt  
 inter se ut  $I H \times I Q$ , ad  $i h \times i q$ .

(<sup>x</sup>) \* Hoc est &c. Deleto in utrâ-  
 que quantitate factò  $P F \times p f$ , erunt attra-  
 ctiones ut  $\frac{p s}{P S}$  ad  $\frac{P S}{p s}$ , seu reducendo ad

eundem denominatorem, ut  $\frac{p s^2}{P S \times p s}$  ad  
 $\frac{P S^2}{p s \times P S}$ , hoc est, ut  $p s^2$  ad  $P S^2$ .



DE MO  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXI.  
THEOR.  
XXXI.



per  $s d$  æqualem  $S D$  &  $s e$  æqualem  $S E$ , distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum sphaerarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

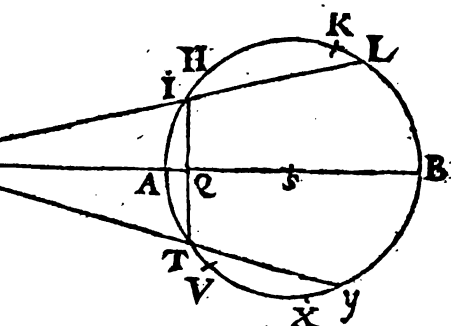
### PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

*Si ad sphaeræ cujuscvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decreşcentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; ac detur tum sphaeræ densitas, tum ratio diametri sphaeræ ad distantiam corpusculi à centro ejus: dico quod vis quâ corpusculum attrahitur, proportionalis erit semidiametro sphaeræ.*

Nam concipe corpuscula duo seorsim à  $(\gamma)$  sphaeris duabus attrahi, unum ab unâ & alterum ab alterâ; & distantias eorum:

518. *Scholium.* Si ex alterâ parte diametri  $A B$  capiatur arcus  $A T = A I$ , & arcus  $T V = I H$ , vires obliquæ & æquales  $I Q$ ,  $T Q$  sibi mutuo opponuntur, nulumque motum in corpusculo  $P$  producent. Unde patet vires integras in corpusculum  $P$  ab utroque hemisphaerio  $A H B$ ,  $A T B$  seu à totâ superficie sphaericâ exercitas esse omnino viribus ad centrum  $S$  tendentibus æquales.

$(\gamma)$  \* *A sphaeris duabus homogeneis; ejusdemque densitatis itâ nempe ut sub æqualibus voluminibus æquales materiae*



*quantitates ubique contineantur; & vis absoluta attrahens sit semper ut quantitas materiae.*

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 469

rum à sphaerarum centrīs proportionales esse diametris sphæ- DE MO-  
rarum respectivè , sphæras autem resolvi in particulas similes TU COR-  
& similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi PORUM.  
unius , factæ versus singulas particulas sphærae unius , erunt LIBER-  
ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas sphæ- PRIMUS,  
ræ alterius , in ratione compositâ ex ratione particularum di- PROP.  
rectè & ratione duplicatâ distantiarum inversè. Sed particu- LXXII.  
læ sunt ut sphærae , hoc est , in ratione triplicatâ diametrorum , THEOR.  
& distantiae sunt ut diametri ; & ratio prior directè unâ cum XXXII.  
ratione posteriore bis inversè est ratio diametri ad diametrum.  
Q. E. D.

*Corol. 1.* Hinc si corpuscula in circulis , circa sphæras ex ma-  
teriâ æqualiter attractivâ constantes , revolvantur ; sintque distan-  
tiæ à centrīs sphaerarum proportionales earundem diametris :  
Tempora periodica erunt æqualia.

*Corol. 2.* Et vicè versâ , si tempora periodica sunt æqualia ,  
distantiæ erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per  
*corol. 3. prop. IV.*

*Corol. 3.* Si ad solidorum duorum quorumvis , similium &  
æqualiter densorum , punctâ singula tendant vires æquales cen-  
tripetæ decrescientes in duplicatâ ratione distantiarum à punc-  
tis ; vires , quibus corpuscula , (\*) ad solida illa duo similiter  
sita , attrahentur ab iisdem , erunt ad invicem ut diametri so-  
lidorum.

PRO-

(\*) \* Ad solida illa duo similiter sita , ita ut distantiae corpusculorum à simili-  
bus solidorum duorum particulis sint ut  
eorum solidorum diametri.

517. *Scholium.* Hinc si huiusmodi sphæ-  
ra per centrum perforetur , æqualia erunt  
tempora omnia , quibus corpus de locis qui-

buisvis ad centrum usque cadit , ( per cor. 2.  
prop. 38. ) & corpusculorum in huiusmodi  
sphæra per spatia libera minima revolgen-  
tium tempora periodica erunt æqualia ( per  
cor. 3. prop. 4. ) atque ad huius generis  
sphæram pertinent quæ in prop. 51. 52.  
huiusque corollariis demonstrata sunt.



# PRINCIPIA MATHEMATICA. 471

centricas, & attractiones corpusculi à singulis superficiebus oriun- DE Mo-  
dæ erunt reciproce proportionales quadrato distantia corpusculi TU CER-  
à centro (per prop. LXXI. ) Et componendo fiet summa attrac- PORUM:  
tionum, hoc est attractio corpusculi in sphaeram totam, in eâ- LIBER  
dem ratione. Q. E. D. PRIMUS.

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantis à centris homogenea- LXXIV.  
rum sphaerarum attractiones sunt ut sphaeræ. Nam (per prop. THEOR.  
LXXII. ) si distantia sunt proportionales diamettris sphaerarum, XXXIV.  
vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illâ ratio-  
ne; &, distantis jam factis æqualibus, augebitur attractio in du-  
plicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in tri-  
plicatâ illâ ratione, hoc est, in ratione sphaerarum.

Corol. 2. In distantis quibusvis attractiones sunt ut sphaeræ  
applicatæ ad (a) quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra sphaeram homogeneam posi-  
tam, trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantia suæ  
ab ipsius centro, constat autem sphaera ex particulis attractivis;  
(b) decrescet vis particulæ cujusque in duplicatâ ratione distan-  
tia à particulâ.

## PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad sphaera data puncta singula tendant vires æquales cen-  
tripeta, decrescetes in duplicatâ ratione distantiarum à punc-  
tis; dico quod sphaera quævis alia similis ab eadem at-  
trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantia centro-  
rum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum  
distan-

(a) \* Ad quadrata distantiarum. que &c. Nam cum vis attractrix absolu-  
ta quantitati materiæ proportionalis sup-  
ponatur, si vis particularum sphaeræ in ma-  
jori vel minori ratione quam duplicatâ  
distantiarum à particulis decresceret, cor-  
pusculum extra sphaeram constitutum ma-  
jori vel minori vi traheretur quam reci-  
proce proportionali quadrato distantia à  
centro sphaeræ.

(b) \* Decrescit vis particulæ cujus-

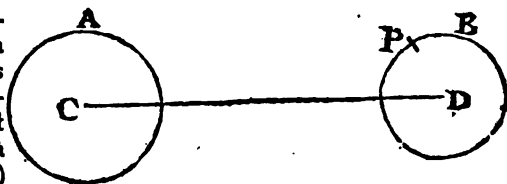
**DE MO-** distantia suæ à centro sphæræ trahentis, ( *per prop. LXXIV.* ) &  
**TU COR-** propterea eadem est, ac si vis tota attrahens manaret de corpus-  
**PORUM.** culo unico sito in centro hujus sphæræ. Hæc autem attractio  
**LIBER** tanta est, quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem,  
**PRIMUS.** si modo illud à singulis sphæræ attractæ particulis eadem vi tra-  
**LXXV.** heretur, quâ ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio  
**THEOR.** ( *per prop. LXXIV.* ) reciproce proportionalis quadrato distantia  
**XXXV.** suæ à centro sphæræ; ideoque huic æqualis attractio sphæræ est  
 in eadem ratione. ( *c* ) *Q. E. D.*

( *d* ) *Corol. 1.* Attractiones sphærarum; versus alias sphæ-  
 ras homogeneas, sunt ut sphæræ trahentes applicatæ ad qua-  
 drata distantiarum centrorum suorum à centris earum, quas  
 attrahunt.

*Corol. 2.* Idem valet, ubi sphæra attracta etiam attrahit.  
 Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eadem vi,  
 quâ ab ipsis vicissim trahuntur; ideoque cum in omni attractio-  
 ne urgeatur ( *per legem 3.* ) tam punctum attrahens, quam punc-  
 tum

( *c* ) \* *Q. E. D.* Demonstratio clari-  
 us intelligitur appositâ figurâ. Sphæra  
*A* sphærâ similarem *B* attrahat, & vis  
 acceleratrix quâ sphæræ *B* particula quæ-  
 vis *P* in centrum *C* sphæræ *A* urgetur est  
 reciproce ut quadratum distantia *PC* à  
 centro sphæræ trahentis ( *per prop. 74.* )  
 & propterea eadem est ac si vis tota at-  
 trahens manaret de corpusculo unico *C*  
 sito in centro sphæræ trahentis *A*; vis au-  
 tem tota acceleratrix quâ sphæra integra  
*B* à corpusculo *C* trahitur, tanta est  
 quanta foret vicissim attractio ejusdem cor-  
 pusculi *C* versus centrum *D* sphæræ *B*, si  
 modò illud corpusculum *C* à singulis sphæ-  
 ræ *B* particulis eadem vi traheretur quâ  
 ipsas attrahit, ut manifestum est. Foret  
 autem ( in hac hyp. ) illa corpusculi *C*  
 versus centrum *D* attractio ( *per prop. 74.* )  
 reciproce proportionalis quadrato distan-  
 tia suæ *CD* à centro *D* sphæræ *B*; Qua-  
 re attractio sphæræ *B* versus *C* ut pote  
 æqualis attractioni suppositæ corpusculi *C*  
 versus *D*, est in eadem ratione inversâ  
 quadrati distantia *CD*. *Q. E. D.*

( *d* ) \* *Cor. 1.* Vis acceleratrix quâ



sphæræ *B* particula quævis *P* versus cen-  
 trum *C* sphæræ *A* urgetur, est ut sphæra  
*A* applicata ad quadratum distantia *CP*,  
 ( *per cor. 2. prop. 74.* ) & propterea  
 eadem est ac si vis tota attrahens quæ  
 esset ut sphæra *A* manaret de cor-  
 pusculo unico *C* sito in centro sphæræ  
 trahentis *A*; & similiter sphæra tota *B*  
 ad centrum *C* trahitur ut corpusculum  
 unicum in centro *D* situm ( *per prop.*  
*75.* ) vis autem acceleratrix quâ corpus-  
 culum in centro *D* positum versus *C* tra-  
 hitur, est ut vis absoluta corpusculi *C* seu  
 ut sphæra *A* directè & quadratum distan-  
 tia *CD* inversè. Quare attractiones sphæ-  
 rarum acceleratrices versus alias sphæras  
 homogeneas sunt ut sphæræ trahentes appli-  
 catæ &c.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 473

um attractum, (e) geminabitur vis attractionis mutuae, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum conicarum sectionum (f) demonstrata sunt, obtinent, ubi sphaera attrahens locatur in umbilico: & corpora moventur extra sphaeram.

Corol. 4. Ea verò, quæ de motu corporum circa centrum conicarum sectionum (g) demonstrantur, (h) obtinent ubi motus peraguntur intra sphaeram.

DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROP. LXXXV.  
THEOR. LXXXV.

## PRO-

(e) \* Geminabitur vis attractionis mutuae &c. Si sphaera A sphaeram B vi propria attrahente destitutam trahat, erit vis acceleratrix sphaerae B versus centrum C

sphaerae trahentis A, ut  $\frac{A}{CD^2}$ , (per cor.

prop. 75.) jam si sphaera B vi propria attrahens tribuatur, vis acceleratrix

sphaerae A versus B inde genita, erit ut  $\frac{B}{CD^2}$ ,

& vis illius motrix (15) ut  $\frac{B \times A}{CD^2}$ , quæ

(per Leg. 3.) æquatur vi motrici sphaerae B versus sphaeram A ex reactione sphaerae A genitæ. Quare dividendo per B, vis

acceleratrix sphaerae B, versus centrum C

sphaerae A, rursus erit ut  $\frac{A}{CD^2}$ , ideòque

attractio tota acceleratrix sphaerae B, ver-

sus centrum sphaerae A; erit in distantia datà ut sphaera ipsa A, & in distantia variabili ut sphaera A ad quadratum distantiae applicata. Quod similiter dicendum est de attractione sphaerae A versus centrum sphaerae B. Observandum verò est quod si, ut hic supponitur, vires absolutæ particularum utriusque sphaerae A & B æquales sint & utraque vi propria attractivâ quantitati materiae proportionali prædita sit, attractio mutua dupla evadit.

(f) \* Demonstrata sunt. (In Sect. 3a. 6a. 7a. 9a. 11a.

(g) \* Demonstrantur. (Prop. 10. 38. 47. 51. 52. 64.)

(h) \* Obiinent &c. (per prop. 73.) ubi motus peraguntur intra sphaeram, hoc est, ubi intra sphaeram solidam via corporibus motis libera conceditur.

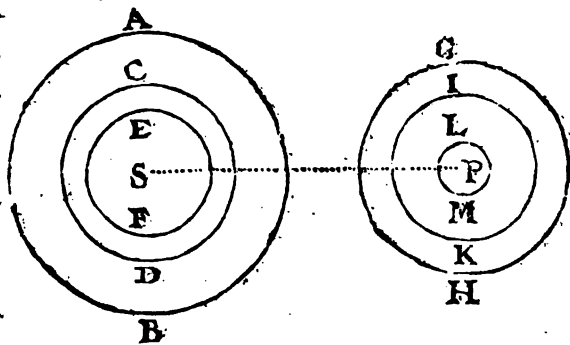
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS  
PROP.  
LXXVI.  
THEOR.  
XXXVI.

## PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

*Si sphaera in progressu à centro ad circumferentiam ( quoad materiae densitatem & vim attractivam ) utcumque dissimilares , in progressu verò per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sunt undique similes ; & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicatâ ratione distantiae corporis attracti: dico quod vis tota , quâ hujusmodi sphaera una attrahit aliam , sit reciproce proportionalis quadrato distantiae centrorum.*

Sunto sphaerae quaecunque concentricae similes *AB*, *CD*, *EF*, &c. quarum interiores. additae exterioribus component materiam densiorem versus centrum , vel subductae relinquant tenuiorem ; & hæ ( per prop. LXXV. ) trahent sphaeras alias quaecunque concentricas similes *GH*, *IK*, *LM*, &c. singulae singulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantiae *SP*. Et ( i ) componendo vel dividendo , summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum .



supra alias ; hoc est , vis , quâ sphaera tota , ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis composita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam *GH*; erit in eadem ratione. Augeatur.

( i ) \* Et componendo vel dividendo &c. Hoc est, in datâ distantia centrorum communium *S*, *P*, sit attractio sphaerarum *GH*, *IK*, *LM* à sphaera *AB*, *a*, *b*, *c*; à sphaera *CD*, *d*, *e*, *f*; à sphaera *EF*, *g*, *h*, *i*: variante verò illâ distantia communium centrorum *S*, *P* vires omnes illae mutabuntur respectivè secundum rationem,

illam inversam quadrati distantiae Centrorum , ergò summa vel differentia virium quibus omnes sphaerae *GH*, *IK*, *LM* à sphaeris *AB*, *CD*, *EF* attrahuntur in primâ distantia, erit ad summam vel differentiam virium in altero casu inversè ut quadrata distantiarum.



# PRINCIPIA MATHEMATICA. 475

tur numerus sphaerarum concentricarum in infinitum sic, ut DE Mo-  
materiae densitas una cum vi attractiva, in progressu à circum- TU COR-  
ferentiâ ad centrum, secundum legem quamcunque crescat vel PORUM.  
decreascat; &, additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis LIBER  
densitas deficiens, eo ut sphaerae acquirant formam quamvis op- PRIMUS.  
tata; & vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiam PROP.  
num, per argumentum superius, in eadem illâ distantiae qua- LXXVI.  
dratae ratione inversa. Q. E. D. THEOR.  
XXXVI.

*Corol. 1.* Hinc si ejusmodi sphaerae complures sibi invicem  
per omnia similes, se mutuo trahant; attractiones acceleratrices  
singularum in singulas erunt, in aequalibus quibusvis centrorum  
distantiis, ut sphaerae attrahentes.

(\*) *Corol. 2.* Inque distantiiis quibusvis inaequalibus, ut sphae-  
rae attrahentes applicatae ad quadrata distantiarum inter centra.

*Corol. 3.* Attractiones verò motrices, seu pondera sphaerarum  
in sphaeras erunt, in aequalibus centrorum distantiiis, ut sphaerae  
attrahentes & attractae conjunctim, id est, ut contenta sub sphae-  
ris per multiplicationem producta.

(1) *Corol. 4.* Inque distantiiis inaequalibus, ut contenta illa  
directè & quadrata distantiarum inter centra inversè.

*Corol. 5.* Eadem valent, ubi attractio oritur à sphaera  
utriusque virtute attractiva mutuo exercita in sphaeram alte-  
ram.

(k) \* *Cor. 2.* Attractiones accelera-  
trices sphaerarum GH, IK, LM &c. in  
sphaeras AB, CD, EF, &c. singularum  
versus singulas sunt (per cor. 1. prop. 75.)  
ut sphaerae trahentes applicatae ad quadra-  
ta distantiarum inter centra S, P. Qua-  
rè componendo vel dividendo summa at-  
tractionum illarum omnium vel excessus  
aliquarum supra alias, hoc est, tota  
attractio acceleratrix sphaerae compositae  
GIMH versus sphaeram compositam ACFB  
erit ut summa vel differentia sphaerarum con-  
centricarum similium AB, CD, EF,  
&c. ad quadratum distantiae SP applicata.  
Sed si sphaerae trahentes sunt sibi invicem  
per omnia similes, summae illae vel differe-  
ntiae super ut sphaerae ipsae. Quare patet  
veritas Coroll. 1. & 2.

(1) \* *Cor. 4.* Corollaria 3<sup>um</sup>. & 4<sup>um</sup>.  
ex corollariis 1<sup>o</sup>. & 2<sup>o</sup>. manifesta sunt;  
Nam attractionis quantitas motrix, seu  
pondus sphaerae attractae in sphaeram tra-  
hentem aequipollet facto ex vi accelera-  
ce ducta in quantitatem materiae, seu in  
massam sphaerae attractae; vis autem acce-  
leratrix (per cor. 2. prop. hujus) est ut  
sphaera attrahens applicata ad quadratum  
distantiae inter centra, & quantitates ma-  
teriae in sphaeris per omnia similibus, sunt  
ut volumina, seu ut sphaerae ipsae. Qua-  
rè attractiones motrices seu pondera sphae-  
rarum in sphaeras, sunt ut contenta sub  
sphaeris per multiplicationem producta di-  
rectè & quadrata distantiarum inter cen-  
tra inversè.



# 476 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-ram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportionem  
TU COR- servatâ.

PORUM.

LIBER

PRIMUS.

PROF.

LXXVI.

THEOR.

XXXVI.

*Corol. 6.* Si hujusmodi sphaeræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas; sintque distantiae inter centra revolvantium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

*Corol. 7.* Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia; distantiae erunt (<sup>m</sup>) proportionales diametris.

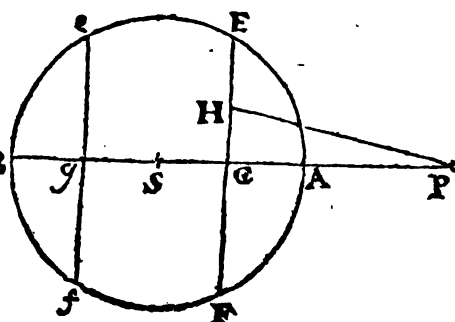
*Corol. 8.* Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent; ubi sphaera attrahens formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ locatur in umbilico.

*Corol. 9.* (<sup>n</sup>) Ut & ubi gyrationia sunt etiam sphaeræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

## PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

*Si ad singula sphaerarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantis punctorum à corporibus attractis: dico quod vis composita, quâ sphaeræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra sphaerarum.*

*Cas. 1.* Sit *AEBF* sphaera; *S* centrum ejus; *P* corpusculum attractum, *PASB* axis sphaeræ per centrum corpusculi transiens; *EF*, *ef* plana duo, quibus sphaera secatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter distantia à centro sphaeræ; *G*, *g* intersectiones planorum & axis; & *H* punctum quodvis in plano *EF*. Puncti *H* vis centripeta in corpusculum *P*, secundum lineam *PH* exercita, est ut distantia *PH*; & ( per le-



(m) \* Proportionales diametris. Cor. 6. & 7. constant per cor. 3. prop. 4<sup>a</sup>.

(n) \* Ut & ubi gyrationia &c. Patet per Cor. 2. Prop. 5<sup>a</sup>.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 477

legum corol. 2.) secundum lineam  $P G$ , seu versus centrum  $S$ , DE Mo-  
ut longitudo  $P G$ . Igitur punctorum omnium in plano  $E F$ , TU COR-  
hoc est plani totius vis, quâ corpusculum  $P$  trahitur versus FORUM.  
centrum  $S$ , est ut distantia  $P G$  multiplicata per numerum punc- LIBER  
torum, id est, ut solidum quod continetur sub plano ipso  $E F$  PRIMUS.  
& distantia illa  $P G$ . Et similiter vis plani  $e f$ , quâ corpuscu- PRO P.  
lum  $P$  trahitur versus centrum  $S$ , est ut planum illud ductum LXXVII.  
in distantiam suam  $P g$ , sive ut huic æquale planum  $E F$  THEOR.  
ductum in distantiam illam  $P g$ ; & summa virium plani utrius- XXXVII.  
que ut planum  $E F$  ductum in summam distantiarum  $P G + P g$ ,  
id est, ut planum illud ductum in duplam centri & (°) cor-  
pusculi distantiam  $P S$ , hoc est, ut duplum planum  $E F$  duc-  
tum in distantiam  $P S$ , vel ut summa æqualium planorum  $E F$   
+  $e f$  ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires  
omnium planorum in sphærâ totâ, hinc inde æqualiter à cen-  
tro sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in di-  
stantiam  $P S$ , hoc est, ut sphæra tota & ut distantia  $P S$  con-  
junctim. Q. E. D. (P)

Cas. 2. Trahat jam corpusculum  $P$  sphæram  $A E B F$ . Et  
eodem argumento probabitur quod vis, quâ sphæra illa trahitur,  
erit ut distantia  $P S$ . Q. E. D.

Cas. 3. Componatur jam sphæra altera ex corpusculis innu-  
meris  $P$ ; & quoniam vis, quâ corpusculum unumquodque tra-  
hitur, est ut distantia corpusculi à centro sphæræ primæ, & (°)  
ut sphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem est, ac si pro-  
diret tota de corpusculo unico in centro sphæræ; vis tota,  
quâ corpuscula omnia in sphæra secunda trahuntur, hoc est, quâ  
sphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac si sphæra illa traheretur  
vi prodeunte de corpusculo unico in centro sphæræ primæ,  
& (r) propterea proportionalis est distantiae inter centra sphæ-  
rarum. Q. E. D. Cas.

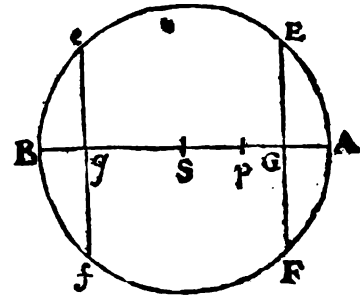
(°) \* Et corpusculi distantiam  $P S$ .  
Est enim  $P g = P G + 2 G S$ , adeoque  $P g$   
+  $P G = 2 P G + 2 G S = 2 P S$ .  
(P) \* Q. E. D. Observandum est vi-  
res obliquas  $G H$ , in plano quovis  $E F$ ,  
ex utraq; axis  $P B$  parte in æqualibus  
distantiis sumptas esse æquales & opposi-  
tas, nullumque proinde motum produce-  
re.  
(q) \* Et ut sphæra eadem conjunctim,  
per cas. 1.  
(r) \* Et propterea proportionalis est di-  
stantiæ &c. Si data est sphæra prima tra-  
hens per cas. 2.

# 478. PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXVII.  
THEOR.  
XXXVII.

*Cas. 4.* Trahant sphaeræ se mutuo; & vis geminata propor-  
tionem priorem servabit.

*Cas. 5.* Locetur jam corpusculum  $p$  intra sphaeram  $AEBF$ ; & quoniam vis plani  $ef$  in corpusculum est ut solidum contentum sub plano illo & distantia  $pg$ ; & vis contraria plani  $EF$  ut solidum contentum sub plano illo & distantia  $pG$ ; <sup>(1)</sup> erit vis ex utrâque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiae distantiarum, id est, ut summa illa ducta in  $pS$  distantiam corpusculi à centro sphaeræ. Et simili argumento, attractio planorum omnium  $EF$ ,  $ef$  in sphaerâ totâ, hoc est, attractio sphaeræ totius, est conjunctim ut summa planorum omnium, seu sphaerâ tota, & ut  $pS$  distantia corpusculi à centro sphaeræ.  
*Q. E. D.*



*Cas. 6.* Et si ex corpusculis innumeris  $p$  componatur sphaera nova, intra sphaeram priorem  $AEBF$  sita; probabitur ut prius quod attractio, sive simplex sphaeræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum  $pS$ . *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

*Si sphaeræ in progressu à centro ad circumferentiam sint utcumque dissimiles & inæquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sint undique similes; & vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujusmodi sphaeræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiae inter centra sphaerarum.*

Demonstratur ex propositione præcedente eodem modo;  
quo

(1) \* Erit vis ex utrâque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut  $ef \times pg - EF \times pG$ . Est autem  $SG = SG$ , adeoque  $pg - pG = pS + SG - pG = 2pS$ ; Quare cum sit etiam  $EF = ef$ , erit  $ef \times pg - EF \times pG = ef \times pg - pG$

$= 2ef \times pS = ef + EF \times pS$ . Si punctum  $G$  est inter  $p$  &  $S$  situm, vis tota erit ut  $ef \times pg + EF \times pG$ , & quoniam est semper  $SG = SG$ , atque in hoc casu  $pg + pG = pS + SG + pG = 2pS$ , similiter invenietur vis tota ut  $ef = EF \times pS$ .

quo propositio LXXVI. ex propositione LXXV. demonstrata fuit. (§)

*Corol.* Quæ superius in propositionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum sphaericorum conditionis jam descriptæ, & attracta corpora sunt sphaeræ conditionis ejusdem.

DE MOTU CORPORUM. LIBER PRIMUS. PROP. LXXVIII. THEOR. XXXVIII.

*Scholium.*

Attractionum casus duos insigniores jam dedî expositos; nimirum ubi vires centripetæ decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroque casu ut corpora gyrentur in conicis sectionibus, & componentes corporum sphaericorum vires centripetas eâdem lege, in recessu à centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset. Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare ut sequitur.

LEM-

(§) Quæ in corollariis prop. 78. ubi attractio sphaeræ versùs sphaeram erat quadrato distantiarum centrorum reciproce proportionalis, demonstrata sunt, ea, mutatis mutandis, ad casum hujus propositionis 78. transferri possunt. Nimirum si ejusmodi sphaeræ complures per omnia similes se mutuò trahant, attractiones acceleratrices.

singularum in singulas erunt ut sphaeræ trahentes & distantia inter centra conjunctim; attractiones verò motrices ut sphaera attrahentes & attractæ & distantia inter centra conjunctim, eademque valent ubi attractio oritur à sphaeræ utriusque virtute attractivâ mutuò exercitâ in sphaeram alteram.

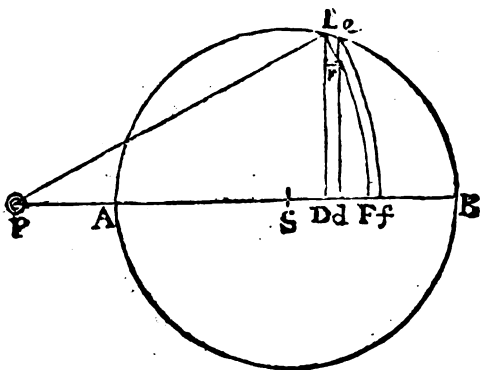


PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXIX.  
THEOR.  
XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evanescens EFfe, convolutione sui circa axem PS, describat solidum sphaericum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ solidum illud trahit corpusculum situm in P, est in ratione compositâ ex ratione solidi DEq x Ff, & ratione vis quâ particula data in loco Ff traheret idem corpusculum.

Nam si primò consideremus vim superficiei sphaericæ FE, quæ convolutione arcus FE generatur, & à linea de ubivis secatur in r; erit superficiei pars annularis, convolutione arcus rE genita, ut lineola Dd, manente sphaeræ radio PE (uti (x) demonstravit Archimedes in lib. de Sphaerâ & Cylindro.) Et hujus vis, secundum lineas PE vel Pr undique in (y) superficie conicâ fitas exercita, ut hæc ipsa superficiei pars annularis; hoc est, ut lineola Dd, vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato sphaeræ radio PE & lineola illa Dd: at secundum lineam PS ad centrum S tendentem minor in ratione PD ad PE, (z) ideoque ut PD x Dd. Dividi jam intelligatur



(x) §18. Uti demonstravit Archimedes &c. Facilis est demonstratio. Quoniam enim angulus PE r rectus est (ex naturâ circuli) erit angulus DE r æqualis angulo DPE, ob summam angulorum DPE + PED recto PE r æqualem. Undè si ex puncto r in lineam DE demissum intelligatur perpendicularum quod æquale erit lineæ Dd, constituetur triangulum evanescens simile triangulo EPD, eritque adeò DE:PE = Dd:Er =  $\frac{PE \times Dd}{DE}$ , sed

(§15) zona circularis convolutione arcus rE genita, est ut rectangulum rE x DE; Quare si in hoc rectangulo loco rE substituatür valor ipsius modò inventus, erit zona ut PE x Dd, hoc est, ob datum radium PE, ut Dd. Q. E. D.

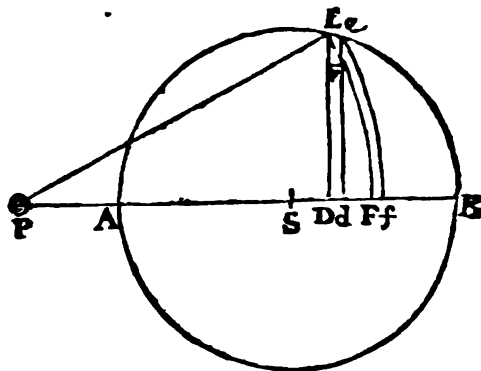
(y) \* In superficie conicâ. Nam in convolutione puncti E, linea PE superficiem conicam describit.

(z) \* Ideoque ut PD x Dd. Nam si vis secundum directionem PE agens per lineam PE exponatur, vis illius pars quæ

DE MO TUR linea  $DF$  in particu-  
 TU COR- las innumeras æquales, quæ  
 FORUM. singulæ nomenclantur  $Dd$ ; &  
 LIBER superficies  $FE$  dividetur (a)  
 PRIMUS. in totidem æquales annulos,  
 PROP. quorum vires erunt ut sum-  
 LXXIX. ma omnium  $PD \times Dd$ , hoc  
 THEOP. est, ut  $\frac{1}{2} PFq - \frac{1}{2} PDq$ ,  
 XXXIX. ideoque ut (b)  $DE quad.$

Ducatur jam superficies  $FE$   
 in altitudinem  $Ff$ ; & fiet

solidi  $EFfe$  vis exercita in corpusculum  $P$  ut  $DEq \times Ff$ : putâ  
 si detur vis quam particula aliqua data  $Ff$  in distantia  $PF$  exer-  
 cet



agit secundum directionem  $PS$ , exponetur  
 per lineam  $PD$ ; erit  $PE$  ad  $PD$  ut rec-  
 tangelum  $PE \times Dd$  ad rectangelum  $PD$   
 $\times Dd$ , quod proinde vim illam secundum  
 directionem  $PD$  exhibebit, vires autem  
 oblique  $ED$  ab utraque axis  $PB$  parte  
 se invicem destruunt.

(a) \* Dividitur in totidem æquales  
 annulos. (Per not. § 18. )

(b) \* Et superficies  $FE$  dividitur in  
 totidem æquales annulos, quorum vires  
 erunt ut summa omnium  $PD \times Dd$ , hoc  
 est, ut  $\frac{1}{2} PFq - \frac{1}{2} PDq$ , ideoque ut  $DE$   
 $quad.$  Scilicet omnes  $PD$ , dum ex  $P$  in  
 $P$   $F$  mutantur uniformiter crescendo  
 progressionem Arithmeticam faciunt, quo-  
 niam omnes particule  $Dd$  quibus lineæ  
 $PD$  successive augentur sunt æquales: er-  
 go omnium  $PD$  summa eâ ratione inve-  
 nitur quâ summæ progressionum Arithme-  
 ticarum obtinentur, nempe primum & ul-  
 timum progressionis terminum simul jun-  
 ctis multiplicando per numerum termino-  
 rum progressionis, & dimidium facti su-  
 mendo; Progressionis verò hujus primus  
 terminus est  $PD$ , ultimus  $PF$  numerus  
 vero terminorum  $DF$ , liquidem  $DF$  est  
 summa incrementorum æqualium evanes-  
 centium lineæ  $PD$ , ergo summa omnium

$PD$  est  $\frac{PF + PD \times DF}{2}$  sive (quia  $DF$

est differentia linearum  $PF$  &  $PD$ ) est  
 summa omnium  $PD = \frac{PF + PD \times PF - PD}{2}$

sed (per 6. 2. Elem.) factum summæ &  
 differentiarum duarum linearum æquatur dif-  
 ferentiæ quadratorum ipsorum, ergo

$PF + PD \times PF - PD = \frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2$

& summa omnium  $PD \times Dd = \frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2$   
 $\times Dd$ , sed  $Dd$  est particula quæ in om-  
 nibus hisce casibus ut eadem assumitur,  
 ergo vires totius superficiæ  $FE$  quæ sunt  
 ut summa omnium  $PD \times Dd$  sunt ut  
 $\frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2$  sive ut  $PF^2 - PD^2$   
 sed  $PF^2$  est æquale  $PE^2$  per const. &  
 $PE^2 - PD^2 = DE^2$  (per 47. 1. El.)  
 ergo vires superficiæ  $FE$ , sunt ut  $DE^2$ .  
 Q. E. D.

Idem aliter. Sit radius datus  $PE = a$ ;  
 variab. lis  $FD = x$ , erit fluxio  $Dd = dx$ , &  
 $PD = a - x$ , atque adeo  $PD \times Dd =$   
 $a dx - x dx$ , & sumptis utrinque fluenti-  
 bus (165) S.  $PD \times Dd = ax - \frac{1}{2} x^2 =$   
 $\frac{2ax - x^2}{2} = \frac{DE^2}{2}$ , (prop. 13. lib. 6.

Elem.). Quare vis superficiæ convolutio-  
 ne arcus  $FE$  genitæ erit ut  $DE^2$ .



# PRINCIPIA MATHEMATICA. 483

cet in corpusculum  $P$ . (c) At si vis illa non detur, fiet vis so- DE MO.  
lidi  $E F f e$  ut solidum  $D E q \times F f$  & vis illa non data conjunc- TU COR-  
tim.  $Q. E. D.$  PORUM.

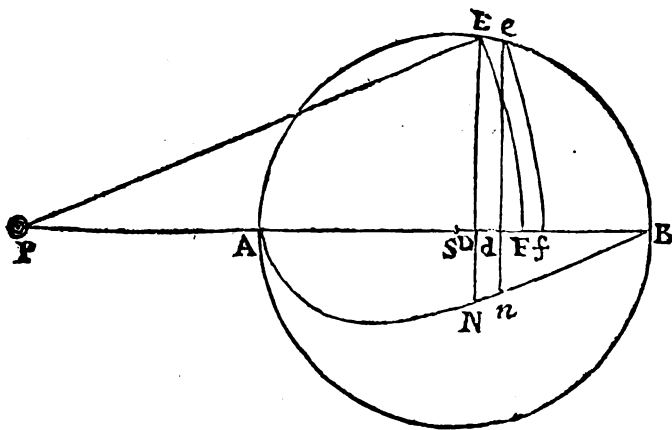
## PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.

Si ad sphaerae alicujus  $ABE$ , centro  $S$  descriptae, particulas sin- LXXX.  
gulas aequales tendant aequales vires centripetae, & ad sphae- THEOR.  
rae axem  $AB$ , in quo corpusculum aliquod  $P$  locatur, erigan- XL.  
tur de punctis singulis  $D$  perpendiculara  $DE$ , sphaerae occurren-  
tia in  $E$ , & in ipsis capiantur longitudines  $DN$ , quae sint

$$\frac{DE q \times PS}{PE}$$

ut quantitas & vis, quam sphaerae particula si-  
ta in axe ad distantiam  $PE$  exercet in corpusculum  $P$ , conjun-  
ctim: dico quod vis tota, qua corpusculum  $P$  trahitur versus  
sphaeram, est ut area  $ANB$  comprehensa sub axe sphaerae  $AB$ ,  
& linea curva  $ANB$ , quam punctum  $N$  perpetuo tangit.



Etenim stantibus quae in lemmate & theoremate novissimo

con-

(c) \* At si vis illa non detur &c. ona convolutione arcus  $E$  genita duca-  
r in datam altitudinem  $F f$ , & erit an-  
nuli solidi inde geniti vis secundum lineam  
 $E$  undique exercita ut hic ipse annu-  
s & vis lineolae  $F f$  conjunctim, hoc  
t, si vis lineolae  $F f$  dicatur  $V$ , ut  $PE \times$   
 $d \times F f \times V$  (518). At vis annuli secundum

lineam  $PS$  minor erit in ratione  $PD$  ad  
 $PE$ , ideoque erit ut  $PD \times Dd \times F f \times V$ . Et  
quoniam variante  $PD$ , manet factum  $F f \times V$   
quod nimirum vis  $V$  in singulis particulis  
datis  $F f$ , aequalis supponatur; Si suman-  
tur fluentes, ut supra, erit vis tota soli-  
di  $E F f e$ , in corpusculum  $P$  secundum  
lineam  $PS$  exercita ut  $DE^2 \times F f \times V$ .

Ppp 2



# 484 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO  
PU COR-  
ORUM  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXX.  
THEOR.  
XL.

constituta sunt, concipe axem sphaeræ  $AB$  dividi in particulas innumeras æquales  $Dd$  & sphaeram totam dividi in totidem laminas sphaericas concavo-convexas  $EFfe$ , & erigatur perpendiculum  $dn$ . Per theorema superius vis, quâ lamina  $EFfe$  trahit corpusculum  $P$ , est ut  $DEq \times Ff$  & vis particulæ unius ad distantiam  $PE$  vel  $PF$  exercita conjunctim. Est autem (per lemma novissimum)  $Dd$  ad  $Ff$  ut  $PE$  ad  $PS$ , & inde  $Ff$  æqualis

$$\frac{PS \times Dd}{PE}; \text{ \& } DEq \times Ff \text{ æquale } Dd \text{ in } \frac{DEq \times PS}{PE}, \text{ \&}$$

$$\text{propterea vis laminæ } EFfe \text{ est ut } Dd \text{ in } \frac{DEq \times PS}{PE} \text{ \& vis}$$

particulæ ad distantiam  $PF$  exercita conjunctim, hoc est (ex hypothesi) ut  $DN \times Dd$ , seu area evanescens  $DNnd$ . Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus  $P$  exercitæ, ut area omnes  $DNnd$ , hoc est, sphaeræ vis tota ut area tota  $ANB$ .  
 $Q. E. D.$

*Corol. 1.* Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantis, & fiat  $DN$  ut  $\frac{DEq \times PS}{PE}$ ; erit vis tota, quâ corpusculum à sphaera attrahitur, (d) ut area  $ANB$ .

*Corol. 2.* Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut distantia corpusculi à se attracti, & fiat (e)  $DN$  ut  $\frac{DEq \times PS}{PEq}$ ; erit vis, quâ corpusculum  $P$  à sphaerâ totâ attrahitur, ut area  $ANB$ .

*Corol. 3.* Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut cubus distantiae corpusculi à se attracti, & fiat  $DN$  ut  $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$ ; erit vis, quâ corpusculum à totâ sphaerâ attrahitur, ut area  $ANB$ .

Co-

(d) \* Ut area  $ANB$ . Nulla enim habenda est ratio vis particulæ  $Ff$  quæ eadem in omnibus distantis manet, ex hypothesi. (e) \* Fiat  $DN$  &c. Substituâ quantitatem  $\frac{1}{PE}$  loco vis particulæ  $Ff$ .



**DE Mo.**

TU COR.

## PORUM

LIBER

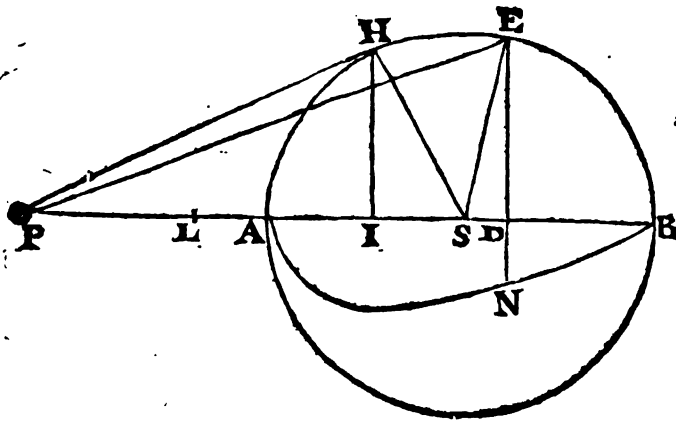
# PRIMUS

PROP. A puncto  $P$  ducatur recta  $PH$  sphaeram tangens in  $H$ , &

LXXXI. ad axem  $PAB$  demissa normali  $HI$ , bifecetur  $PI$  in  $L$ : &

THEOR. erit ( per prop. XII. lib. 2. elem. )  $P E a$  eguale  $P S a + S E a$

**XL I.**  $+ 2 P S D$ . Est autem  $S E q$  feu  $S H q$  (ob  $(f)$  similitudinem



triangulorum  $SPH, SHI$ ) æquale rectangulo  $PSI$ . Ergo

$PE_q$  æquale est contento sub  $P^2S$  &  $PS+SI+2SD$ , hoc

(g) est, sub  $PS \&_2 LS +_2 SD$ , id est, sub  $PS \&_2 LD$ .

Porro  $DE$  quad. æquale est  $SEq - SDq$ , seu  $(\dagger)$   $SEq -$

$LSq - SEq$  leu  $LSq - SAq$  (per prop. v l. lib. 2. elem.)  
signatur rectangulo  $ALB$ . Scribatur itaque  $2SLD - LDq - ALB$

æquatur rectangulo  $ALB$ . Scribatur itaque  $2SLD = LDq = ALB$   
 $DEa \times PS$

pro DE a: & quantitas  $\frac{DEq \times PS}{}$  . quæ secundum corollarium

quar-

(f) \* Ob similitudinem triangulorum

(g) \*\* *Hoc est sub P S*  $\odot$  2 L S +

$$2SD. Ob PS + SI = PI + 2SI = 2LI + 2SI = 2LS.$$

(†) \*  $Seu SE^2 - LS^2 \text{ etc. Ob S D}$

$$= LD - LS, \text{ adéouque } SD^2 = LD^2 - 2SLD + LS^2.$$

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 487

quartum propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim DE Mo-  
 applicatæ  $DN$ , resolvit sese in tres partes  $\frac{2SLD \times PS}{PF \times V}$  TU COR-  
 PORUM.

$LDq \times PS$   $ALB \times PS$  LIBER  
 $\frac{PE \times V}{PE \times V}$  : ubi si pro  $V$  scribatur ratio inver- PRIMUS.  
 PRO P.

sa vis centripetæ, & pro  $PE$  medium proportionale inter  $PS$  LXXXI.  
 &  $2LD$ ; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum THEOR.  
 totidem curvarum, (h) quarum areae per methodos vulgatas in- XL L.  
 notescunt. Q. E. F.

Exens.

(h) 519. Quarum areae per methodos  
 vulgatas innotescunt. Sint variables  $PE = z$ ,  
 $LD = x$ , adeoque  $Dd = dx$ , sint constantes  
 $PA = a$ ,  $PB = b$ ,  $PS = c$ , &  $LS = m$ ,  
 $LA = p$ ,  $LB = q$ , & erit areae  $AND$

fluxio  $DN \times dx$  ut  $\frac{2mcxdx}{zV} - \frac{cx dx}{zV}$   
 $\frac{pqcdx}{zV}$  : quoniam verò  $PE^2 (zz) =$

$2PS \times LD (2cx)$ , est  $x = \frac{zz}{2c}$  &  $dx =$   
 $\frac{z dz}{c}$ , quibus valoribus loco  $x$  &  $dx$  in

formula substitutis illa in hanc mutatur  
 $\frac{mz^2 dz}{cV} - \frac{z^2 dz}{4c^2 V} - \frac{pqdz}{V}$ .

Sit vis attractiva ut distantiae  $z$  dignitas  
 $\frac{1}{z^n}$  erit  $V = z^n$  (quo valore loco  $V$  in

formulâ posito, fiet  $DN \times dx$  ut  $\frac{mz^2 - n dz}{c}$

$\frac{z^4 - n dz}{4c^2} - pqz^n dz$ , unde sumptis

singulorum terminorum fluentibus (165).

erit  $S. DN \times dx$ , seu area  $AND$ , ut

$\frac{mz^3 - n}{3-n} - \frac{pqz^{n+1} - n}{n+1} +$

$\frac{3-n \times c}{5-n \times 4c^2} - \frac{1-a}{1-a} +$

Q. constans. Sed fluens illa evanescere

debet dum fit  $PE(z) = PA(a)$  est er-

go  $Q = \frac{a^3 - n}{5-n \times 4c^2} + \frac{pq a^{n+1} - n}{n+1} - \frac{ma^3 - n}{3-n \times c}$

ac proinde fluens accurata ubi  $PE(z) =$

$$PB(b) \text{ erit } \frac{mb^3 - n}{3-n \times c} - \frac{b^3 - n}{5-n \times 4c^2} - \frac{pq b^{n+1} - n}{n+1} + \frac{pq a^{n+1} - n}{1-n} - \frac{ma^3 - n}{3-n \times c} ;$$

520. Cum sit semper  $PE^2 = 2PS \times LD$ ;  
 & ubi  $PE$  fit  $PB$  fit  $LD = LB$ , ubi ve-  
 rò  $PE$  fit  $PA$  fit  $LD = LA$ , erit  $PB^2$   
 $(b^2) = 2PS \times LB (2cq)$  &  $PA^2 (a^2)$   
 $= 2PS \times LA (2cp)$  quibus valoribus lo-  
 co,  $b^2$  &  $a^2$  substitutis, formula fit  
 $\frac{2mqb^3 - n}{3-n} - \frac{q^2 b^{n+1} - n}{5-n} - \frac{pq b^{n+1} - n}{1-n} +$   
 $\frac{p^2 a^{n+1} - n}{5-n} + \frac{pq a^{n+1} - n}{1-n} - \frac{2mp a^{n+1} - n}{3-n}$ .

& restitutis litteris figuræ

$$\frac{2SLB \times PB^3 - n}{3-n} - \frac{LB^3 \times PB^3 - n}{5-n} - \frac{ALB \times PB^{n+1} - n}{1-n} + \frac{AL^2 \times PA^{n+1} - n}{5-n} + \frac{ALB \times PA^{n+1} - n}{1-n} - \frac{2SLA \times PA^{n+1} - n}{3-n}$$

521. Cor. 1. Hinc liquet aream  $ANB$ , seu  
 attractionem cui proportionalis est, semper  
 posse algebraice inveniri, tribus tantum casu-  
 bus exceptis in quibus est  $n = 1$  vel  $3$ , vel  $5$ ,  
 seu in quibus vis attractiva decrevit in ratio-  
 ne distantiae simplici, vel triplicatâ vel quin-  
 tuplicatâ. In his enim casibus tribus divisio-  
 nes  $1-n$ ,  $3-n$ ,  $5-n$ , evanescunt; sed tum  
 fluens per logarithmos, aut quod idem est,  
 per quadraturam hyperbolæ obtinetur, ut  
 exemplis infra positâ patebit.



priori  $2SL \times LAB$  relinquit aream  $SL \times AB$ . Pars autem tertia  $\frac{ALB}{LD}$ , ducta itidem per motum localem normaliter in

eandem longitudinem, describet aream hyperbolicam; quæ subducta de areâ  $SL \times AB$  relinquet aream quæsitam  $ANB$ . Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta  $L, A, B$  erige perpendiculara  $Ll, Aa, Bb$ , quorum  $Aa$  ipsi  $LB$ , &  $Bb$  ipsi  $LA$  sequetur. Asymptotis  $Ll, LB$  per puncta  $ab$  describatur hyperbola  $ab$ . Et acta chorda  $ba$  claudet aream  $aba$  areæ quæsitæ  $ANB$  æqualem.

*Exempl. 2.* Si vis centripeta ad singulas sphaeræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantiae, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe  $PE$  cub.

$2ASq$  pro  $V$ , dein  $2PS \times LD$  pro  $PEq$ ; & fiet  $DN$

ut  $\frac{LA+LB}{2} \times AB$ , sitque  $LB = LA + 2AS$

erit  $LA + LB = 2LA + 2AS = 2LS$

unde  $\frac{LA+LB}{2} \times AB = LS \times AB$ . Unde

etiam sequitur Trapezium  $AabB$  rectangulo  $LS \times AB$  esse æquale.

Cæterum per methodos vulgares casus iste sequenti ratione solvitur. Sit  $AD = x$ ,  $Dd = dx$  erit areæ  $AND$  fluxio  $DN \times Dd =$

$2SL \times dx - LA \times dx - \frac{ALB \times dx}{LD}$

Primi termini  $2SL \times dx$ , fluens (165) est  $2SL \times x = 2SL \times AB$ , ubi  $AD$ , seu  $x = AB$ . Secundi termini  $LA \times dx + x dx$ ,

fluens est  $LA \times x + \frac{1}{2}xx = \frac{2LA+AB \times AB}{2}$

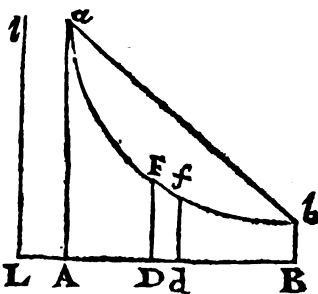
$= LS \times AB$ , quandò  $x$ , seu  $AD$ , sit  $AB$ . Quare duorum priorum terminorum fluens

est  $2SL \times AB - LS \times AB$  five  $SL \times AB$ .

Jam ut tertii termini  $\frac{ALB \times dx}{LD}$  fluens

inveniat describatur hyperbola  $AB$ , prout NEWTONUS præscribit, & super asymptoto  $LB$  erigantur perpendiculara duo infi-

Tom. I.



nitè propinqua;  $DF, df$ , hyperbolæ occurrentia in  $F$  &  $f$ , sitque  $AD = x$ ,  $Dd = dx$ , & erit (per theor. 4. de hyperbolâ)  $LA \times Aa = LD \times DF$ , adeoque  $DF = \frac{LA \times Aa}{LD} = \frac{ALB}{LD}$ , &  $DF \times Dd$ , seu

fluxio areæ  $AaFD = \frac{ALB \times dx}{LD}$ . Quare

area hyperbolica  $AaFD$ , æqualis est fluenti tertii termini, & area hyperbolica  $AabB$ , est ejusdem termini fluens, ubi  $x$ , seu  $AD = AB$ . Hæc igitur subducta de rectangulo  $SL \times AB$ , five de trapezio  $AabB$  ipsi æquali, relinquet aream quæsitam  $ANB$ . Relinquitur autem area  $aFba$ ; undè patet constructio.

523. Cor. 1. Si distantia corpusculi  $P$  à sphaerâ evanescat, erit  $Bb = LA = 0$  ideoque hyperbola  $Afb$  cum suis asymptotis  $Ll, LB$  congruet nullaue erit ejus area. Quare corpusculo posito in  $A$ , seu in contactu sphaeræ attractio erit ut rectangulum  $SL \times AB = 2AS^2$ , ut etiam demonstrari posset eodem modo ac demonstrata fuit Prop. 72.

# 490. PHILOSOPHIÆ NATURALIS.

DE MO-  
TU COR- ut  $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} \frac{ASq}{2PS} \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$ , id (k) est (ob con-

LIBER tinuè proportionales  $PS, AS, SI$ ) ut  $\frac{LSI}{LD} \rightarrow \frac{1}{2} SI \rightarrow$

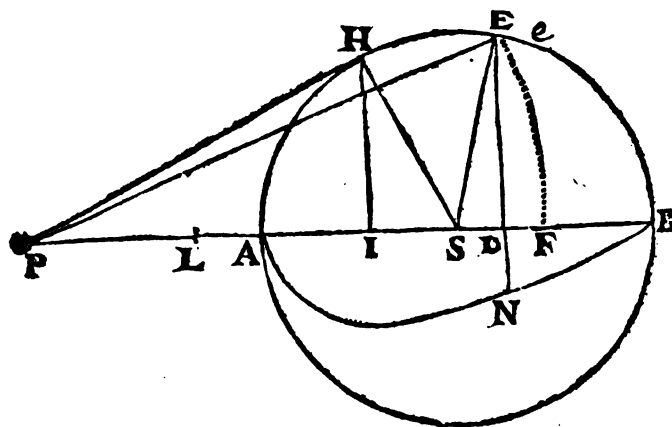
PRIMUS. PROP.  $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ . Si ducantur hujus partes tres in longitudo-

PROBL. XL I. nem  $AB$ ; prima  $\frac{LSI}{LD}$  generabit aream hyperbolicam; se-

cunda  $\frac{1}{2} SI$  aream  $\frac{1}{2} AB \times SI$ ; tertia  $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$  aream

$\frac{ALB \times SI}{2LA} \rightarrow \frac{ALB \times SI}{2LB}$ , id est  $\frac{1}{2} AB \times SI$ . De primâ sub-

du-



524. Cor. 2. Vis quâ corpusculum P, versùs portionem sphaeræ convolutione superficie AEF, genitam trahitur est ut  $LB - \frac{1}{2} x \times x - AaFD$ ; Nam (per not. 522.) vis illa est ut  $2SL \times x - LA \times x - \frac{1}{2} x \times x - AaFD$ , &  $2SL = 2LA + 2AS$  &  $2SL - LA = LA + 2AS = LB$ , unde vis illa est  $LB - \frac{1}{2} x \times x - AaFD$ ; sed P posito in contactu sphaeræ est  $LB = AB$  & areâ hyperbolicâ evanescit, vis ergo fit in contactu  $AB - \frac{1}{2} x \times x$ , five  $AB - \frac{1}{2} AD \times AD$ .

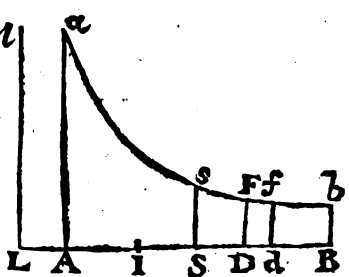
525. Cor. 3. Quoniam attractio cor-

pusculi P versùs sphaeram totam est ut  $SL \times AB - AaB$ , ejusdem attractio versùs portionem sphaeræ convolutione superficie FEeB (fig. prop. 80.) genitam, erit ut  $SL \times AB - LB \times x + \frac{1}{2} x \times x + AaFD - AaB = SL \times AB - LB \times AD + \frac{1}{2} AD^2 - DFbB$ , five substitutis  $LA + \frac{1}{2} AB$  pro  $SL$ ,  $LA + AB$  loco  $LB$ , & pro  $AB - AD$  posito  $BD$  fiet ut  $LA + \frac{1}{2} BD \times BD - DFbB$ , & corpusculo in contactu posito, erit ut  $\frac{1}{2} BD^2$ .

(k) \* Id est, ob continuè proportionales &c. Per prop. 8, l. 6, EL. undè  $AS^2 = PS \times SL$ .



neatur summa secundæ & tertiæ, & manebit area quæsitæ  $ANB$ . (1) Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta  $L, A, S, B$  eriguntur perpendicula  $Ll, Aa, Ss, Bb$ , quorum  $Ss$  ipsi  $SI$  æquetur, perque punctum  $s$  asymptotis  $Ll, LB$  describitur hyperbola  $asb$  occurrens. Perpendiculis  $Aa, Bb$  in  $a$  &  $b$ ; & rectangulum  $2ASI$  subductum de area hyperbolica  $AasbB$  relinquet aream quæsitam  $ANB$ .



DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROP. LXXXI.  
PROP. XLII.

(1) 526. \* Unde talis emergit problematis constructio. Sit, ut supra  $AD = x, Dd = dx$ , sit areæ  $AND$ , fluxio  $DN \times Dd$ , ut  $SI \times dx$

$$\frac{LD}{2SI \times dx} = \frac{1}{2} SI \times dx = \frac{2LA + x^2}{2LA + x^2}$$

ut primi termini  $\frac{LSI \times dx}{LD}$ , fluens abeat, describatur hyperbola  $asb$ , eo modo quo jubet NEWTONUS, erectique perpendiculis  $DF, df$ , fit  $AD = x, d = dx$ , & quoniam (per theor. 4. de hyperbolâ)  $LS \times SI = LD \times DF$ , erit  $\frac{LSI}{LD} = \frac{LSI \times dx}{LD \times DF}$ , &  $DF \times Dd = \frac{LSI \times dx}{LD}$ .

tat igitur (ut in not. 522.) aream Hyperbolicam  $AasbB$ , æqualem esse fluens primi termini, dum  $AD$  seu  $x = AB$ ; secundi termini  $\frac{1}{2} SI \times dx$ , fluens est  $\frac{1}{2} SI \times AD = \frac{1}{2} SI \times AB$ , dum fit  $AD = AB$ ; tertii tandem termini fluens hoc modo invenitur. Quantitatis  $\frac{dx}{(LA + x)^2}$  fluens

(565) est  $-\frac{1}{LA + x} + Q$  constans; & quoniam fluens illa evanescere debet ubi  $x = 0$ , erit  $Q = \frac{1}{LA}$ . Quare fluens

$$\frac{1}{LA} - \frac{1}{LD} = \frac{1}{LA} - \frac{1}{LB};$$

ubi  $x = AB$ . Est igitur tertii termini  $\frac{ALB \times SI \times dx}{LA + x^2}$  fluens  $= \frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB} = \frac{1}{2} LB \times SI - \frac{1}{2} LA \times SI$

$= \frac{1}{2} AB \times SI$ , unde summa 2<sup>a</sup> & 3<sup>a</sup> termini est  $AB \times SI = 2AS \times SI$ . Quare rectangulum  $2ASI$  subductum de areâ hyperbolica  $AasbB$  relinquet aream quæsitam  $ANB$ .

527. Cor. 1. Si corpus  $P$  sphæram tangat in  $A$ , attractio evadet infinita, nam in hoc casu  $LA = 0$  &  $Aa$  cum asymptoto  $Ll$  coincidit, ac proinde attractio per aream hyperbolæ infinitam  $BLasb$  exponitur.

528. Coroll. 2. Vis quâ corpusculum  $P$  in sphære portionem convolutione superficie  $AEF$ , genitam trahitur, est ut  $AaFD = \frac{1}{2} SI \times AD =$

$$\frac{1}{2} LB \times SI + \frac{ALB \times SI}{2LD}, \text{ ut ex notâ}$$

526. manifestum est. Quare in contactu ubi  $LA = 0$ , erit vis illa ut area infinita  $AaFD$ , cujus respectu aliarum finitarum quantitates evanescunt.

529. Cor. 3. Et quoniam corpusculi  $P$  attractio in sphæram totam est ut area hyperbolica  $AasbB - 2ASI$ , ejusdem attractio versùs portionem concavo convexam, convolutione superficie  $FEeB$ , genitam, erit ut  $AasbB - AaFD = 2ASI + \frac{1}{2} AD \times SI + \frac{1}{2} LB \times SI -$

$$\frac{ALB \times SI}{2LD} = DFbB + \frac{1}{2} LA - \frac{1}{2} BD \times SI - \frac{ALB \times SI}{2LD}, \text{ ponendo } AB \text{ pro } 2AS,$$

$$\frac{1}{2} LA + \frac{1}{2} AB \text{ pro } \frac{1}{2} LB, \text{ \& } \frac{1}{2} BD \text{ pro } \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AD.$$



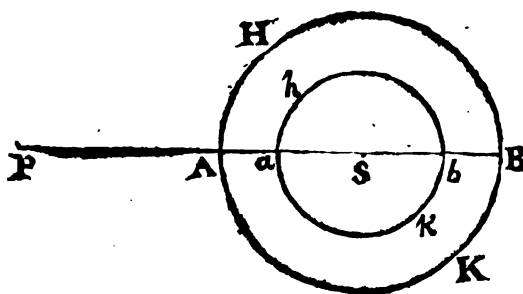
# 492 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO- *Exempl. 3.* Si vis centripeta, ad singulas sphæræ particulas  
TU COR- tendens, decrefcit in quadruplicatâ ratione diftantiae à particu-  
PORUM.

LIBER lis; fcribe  $\frac{PEqq}{2AScub.}$  pro V, dein  $\sqrt{2PS \times LD}^{(m)}$  pro PE;

PRIMUS. PRO P. ut  $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} -$

LXXXI. & fiet DN PROBL.  $\frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}.$  (n) Cujus tres partes ductæ in  
xlii. lon-



530. Cor. 4. Simili modo inveniri poteft  
vis quâ corpus P trahitur verfus sphæram  
concavam A a H B K a, fi ex attractione  
in sphæram totam solidam detrahatur at-  
tractio in sphæram interiorem a h b k. Pa-  
tet autem corpusculi P in A, feu in contac-  
tu pofiti attractionem verfus sphæram ca-  
vam A a H B K a, interiori concentricam,  
infinitam effe; Nam fi ex vi infinitâ quâ  
verfus sphæram solidam A H B K S, tra-  
hitur, fubducatur vis finita quâ verfus sphæ-  
ram interiorem a h b k s urgetur, relin-  
quetur attractio infinita verfus sphæram  
concavam A a H B K a; quin imò, fi ex  
sphærà concavâ detrahatur pars quævis à  
contactu remota ut H h B K k, attractio  
corpusculi in contactu A pofiti verfus re-  
fiduam H h A a K k, adhuc infinita erit, ut  
patet (per cor. 2. & 3).

(m) \* Pro P E. Erit  $PEs = 4PS^2 \times LD^2$   
 $\times \sqrt{2PS \times LD}$ , &  $AS = PS \times SI \times \sqrt{PS \times SI}$ .

Unde fiet  $\frac{SLD \times PS}{PE \times V} = \frac{4SLD \times PS \times AS}{PEs} =$   
 $\frac{4SL \times LD \times PS \times SI \sqrt{PS \times SI}}{PEs} =$   
 $\frac{4PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}}{SL \times SI \sqrt{SI}} = \frac{SL \times SI^2}{LD \sqrt{2LD}} = \frac{SI^2 \times SL}{LD \sqrt{2SI \times LD}} = \frac{SI^2 \times SL}{2\sqrt{2SI}} \times$   
 $\frac{1}{\sqrt{LD}}$ . Et ita de cæteris terminis!

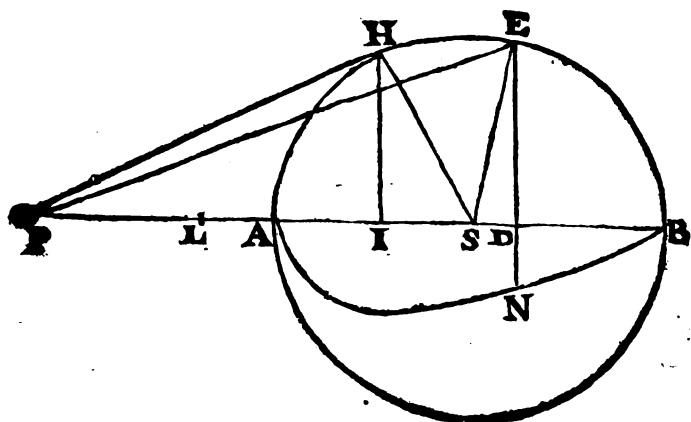
(n) \* Cujus tres partes &c. Sit AD = x  
fluxio AD = dx, & erit areæ AND  
fluxio DN x dx, ut  $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times$   
 $\frac{dx}{LA+x}^{\frac{1}{2}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{LA+x}^{\frac{1}{2}} =$   
 $\frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{LA+x}^{\frac{1}{2}}$ , quantitatis

$\frac{dx}{LA+x}^{\frac{1}{2}}$  feu  $LA+x - \frac{1}{2} dx$  fluens est

LA

longitudinem  $AB$ , producunt areas totidem, viz.  $\frac{2 SI q \times SL}{\sqrt{2 SI}}$  DE MO-

TU COR-  
FORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXXI.  
PROBL.  
XLI.



$$\text{in } \frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}; \frac{SI q}{\sqrt{2 SI}} \text{ in } \sqrt{LB} - \sqrt{LA}; \& \frac{SI q \times ALB}{2 \sqrt{2 SI}} \text{ in}$$

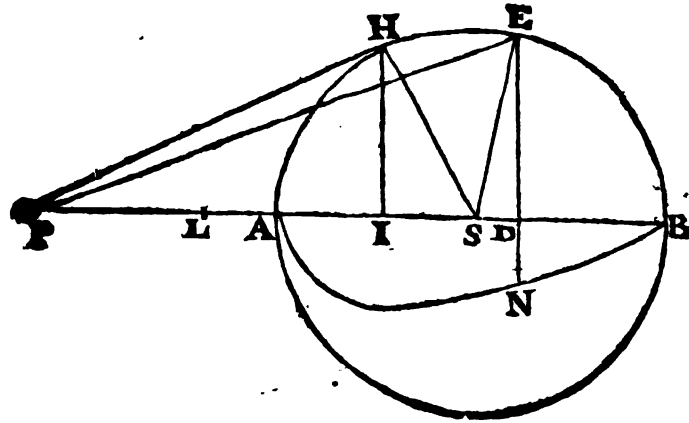
$\frac{2}{LA+x} \frac{1}{2} + Q \text{ const. (165) }^{\circ}$  quæ eva-  
nescere debet ubi  $x = 0$ ; Quare erit  $Q$   
 $= \frac{2}{\sqrt{LA}}$ , & fluens accurata  $\frac{2}{\sqrt{LA}}$   
 $\frac{2}{\sqrt{LB}}$ , dum fit  $x = AB$ . Primi igitur ter-  
mini fluens erit  $\frac{2 SI \times SL}{\sqrt{2 SI}}$ , in  $\frac{1}{\sqrt{LA}}$   
 $\frac{1}{\sqrt{LB}}$ . Quantitatis  $\frac{dx}{LA+x} \frac{1}{2}$ , fluens est  
 $2 (LA+x) \frac{1}{2} + Q \text{ const. } \& \text{ facta } x = 0$ ;  
invenitur  $Q = -2 \sqrt{LA}$ ; quare fluens  
accurata est  $2 \sqrt{LB} - 2 \sqrt{LA}$ , dum  
 $x = AB$ . Secundi igitur termini fluens

erit  $\frac{SI^2}{\sqrt{2 SI}}$ , in  $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$   
Quantitatis  $\frac{dx}{LA+x} \frac{1}{2}$ , fluens est  $\frac{-2}{3 (LA+x)^{3/2}}$   
 $+ Q$ , &  $Q = \frac{2}{3 \sqrt{LA}}$ , unde fluens in-  
tegra erit  $\frac{2}{3 \sqrt{LA}} - \frac{2}{3 \sqrt{LB}}$ , ubi  
 $x = AB$ , & proinde tertii termini fluens est  
 $\frac{SI^2 \times ALB}{3 \sqrt{2 SI}}$  in  $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$ .

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXXI.  
PROBL.  
XLI.

in  $\frac{I}{\sqrt{LA \text{ cub.}}} - \frac{I}{\sqrt{LB \text{ cub.}}}$ . Et (°) hæ post debitam re-



ductionem fiunt  $\frac{2 SI q \times SL}{LI}$ ,  $SI q$ , &  $SI q + \frac{2 SI \text{ cub.}}{3 LI}$ .

Hæ vero, subductis posterioribus de priore, evadunt  $\frac{4 SI \text{ cub.}}{3 LI}$   
Proin-

(°) \* Es hæ post debitam reductionem  
&c. Est  $PS \times SI = AS^2$  (per prop. 8.  
Lib. 6. Elem.) sed  $PS = LS + LI$ , ob  
 $PL = LI$ , (per const.) &  $SI = LS - LI$ ,  
ergo  $PS \times SI = LS^2 - LI^2 = AS^2$ , &  
hinc  $LI^2 = LS^2 - AS^2 = LS + AS \times$   
 $LS - AS = LB \times LA$ . Quare  $LI$  five  
 $LS - LI = \sqrt{LA \times LB}$ , &  $2 LS -$   
 $2 SI = 2 \sqrt{LA \times LB}$ , &  $2 SI = 2 LS$   
 $- 2 \sqrt{LA \times LB} = LB - 2 \sqrt{LB \times LA} +$   
 $LA$ , & extracta utrinque radice quadra-  
ta  $\sqrt{2 SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{LA}$ . His posi-  
tis, facilis est terminorum reductio; erit  
enim  $\frac{I}{\sqrt{LA}} - \frac{I}{\sqrt{LB}} = \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{LB \times LA}}$

$= \frac{\sqrt{2 SI}}{LI}$ . Quare patet primum fluentis  
terminum esse  $\frac{2 SI^2 \times SL}{LI}$ ; secundum ve-  
rò esse  $SI^2$ . Tertius terminus, reduc-  
tione ad communem denominatorem facta,  
est  $\frac{SI^2 \times LA \times LB}{3 \sqrt{2 SI}} \times \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{LA \times LB \sqrt{LA \times LB}}$ .  
 $\frac{SI^2 \times \sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{3 LI \times \sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$ . Peracta di-  
visione invenitur  $\frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = LB +$

LB

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 495

Proinde vis tota, quâ corpusculum  $P$  in sphaeræ centrum  $S$  DE MOTU CORPUSCULI TRAHITUR, est ut  $\frac{SI \text{ cub.}}{P I}$ , (p) id est, reciprocè ut  $P S \text{ cub.} \times P I$ . PORUM.

Q. E. I.

Eadem methodo determinari potest attractio corpusculi siti intra sphaeram, sed expeditius per theorema sequens.

LIBER PRIMUS. PRO P. LXXXI. PROBL.

PRO: XLI.

$$LB^{\frac{1}{2}} + LA^{\frac{1}{2}} + LA = LB + LI + LA \\ = 2 SI + 3 LI, \text{ ob } LB + LA = 2 LS \\ = 2 SI + 2 LI. \text{ Quare tertius terminus} \\ \text{est } \frac{SI^2 \times 2 SI + 3 LI}{3 LI} = SI^2$$

$$+ \frac{2 SI}{3 LI}, \text{ unde tres fluentes ad} \\ \text{communem denominatorem reducti fiunt} \\ \frac{6 SI^2 \times SL - SI^2 \times 3 LI - SI^2 \times 3 LI - 2 SI^2}{3 LI}$$

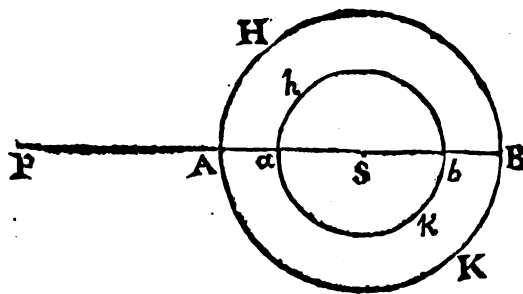
$$= \frac{6 SI^2 \times SL - 2 SI^2}{3 LI}, \text{ sed quia } SL = LI$$

$$= SI \text{ fiunt } \frac{6 SI^2 - 2 SI^2}{3 LI} = \frac{4 SI^2}{3 LI}$$

(p) \* Id est reciprocè ut  $PS \times PI$ . Nam cum sit  $PS \times SI = AS^2$ , ideòque  $SI = \frac{AS^2}{PS}$ , hinc, dato radio  $AS$ , est  $SI$

ut  $\frac{1}{PS}$ ,  $SI$ , ut  $\frac{1}{PS}$ ; Est verò  $= \frac{1}{2} PI$  ideòque etiam  $\& LI$  ut  $PI$ , unde erit  $\frac{4 SI^2}{3 LI}$  ut  $\frac{1}{PS} \times PI$ , neglecta fractione  $\frac{4}{3}$ .

531. Cor. 1. In accessu corporis  $P$  ad sphaeram, ita crescit illius attractio, ut in contactu infinita evadat, dum eam coincidit  $P$  cum  $A$ , puncta  $H$  &  $I$  cum eodem puncto  $A$  coincidunt, fitque  $PI = 0$ , & proinde quantitas  $\frac{1}{PS \times PI}$  infinita.



532. Cor. 2. Attractio corpusculi in contactu  $A$  positi versus sphaeram cavam  $A a H B K a$ , infinita est. Hæc enim attractio habetur, si ex attractione infinita versus sphaeram solidam  $A H B K S$ , subducatur attractio finita versus sphaeram interiorem  $a h b k S$ .

533. Hic adjungemus solutionem casus tertii qui pender à quadraturâ hyperbolæ, ubi nempe vis est ut  $PE$ ; reciprocè (520). Scribe igitur  $\frac{PE}{2 AS^2}$ , pro  $V$ ; dein  $8 PS \times LD$ ; pro  $PE$ , &  $PS \times SI$  pro  $AS^2$ , unde est  $\frac{PE \times V}{PS} = \frac{4 LD}{SI^2}$ ; & fiet  $DN$ , ut  $\frac{SL \times SI^2}{2 LD^2} - \frac{SI^2}{4 LD} - \frac{ALB \times SI^2}{4 LD}$ ; seu, ut  $\frac{SL \times SI^2}{LD^2} - \frac{1}{2} \frac{SI^2}{LD} - \frac{1}{2} \frac{ALB \times SI^2}{LD}$ ; unde fluxio  $DN \times Dd$ , erit ut  $\frac{SL \times SI^2 \times dx}{LA + x^2}$

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXXII.  
THEOR.  
XLI.

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

*In sphaerâ centro S intervallo S A descriptâ, si capiantur S I, S A, S P continuè proportionales: dico quod corpusculi intra sphaeram, in loco quovis I, attractio est ad attractionem ipsius extra sphaeram, in loco P, in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantiarum à centro I S, P S, & subduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis P & I, ad centrum tendentium.*

Ut, si vires centripetæ particularum sphaeræ sint reciproce ut distantiae corpusculi à se attracti; vis, quâ corpusculum situm in *I* trahitur à sphaerâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in *P*, in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantiae *S I* ad distantiam *S P*, & ratione subduplicatâ vis centripetæ in loco *I*, à particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eâdem in centro particulâ oriundam, id est, ratione subduplicatâ distantiarum *S I*, *S P* ad invicem

reci-

$$-\frac{1}{2} \frac{SI^2 \times dx}{LA+x} = -\frac{1}{2} \frac{ALB \times SI \times dx}{LA+x}, \text{ posita } AD = x.$$

Quantitatis  $\frac{dx}{LA+x}$ , fluentem supra

(526) invenimus esse  $\frac{1}{LA} - \frac{1}{LB} = \frac{LB-LA}{LA \times LB}$

$= \frac{AB}{LI^2}$  ubi  $x$  seu  $AD = AB$ . Quare primi

termini fluens erit  $\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$ .

Quantitatis  $\frac{dx}{LA+x}$ , fluens  $= \frac{-1}{2LA+x^2}$

+  $Q$  const. quæ evanescere debet posita  $x$ , seu  $AD = 0$ , quare erit  $Q = \frac{1}{2LA^2}$

& fluens accurata, ubi  $AD = AB$ , erit

$\frac{1}{2LA^2} - \frac{1}{2LB^2} = \frac{LB^2-LA^2}{2LA^2 \times LB^2} = \frac{2SL \times AB}{2LI^4} = \frac{SL \times AB}{LI^4}$ ; undè tertii termini fluens erit

$$\frac{1}{2} \frac{ALB \times SI^2 \times SL \times AB}{LI^4} = \frac{1}{2} \frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2},$$

& differentia fluentium primi & tertii termini erit  $\frac{1}{2} \frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$ . Secundi

termini  $\frac{1}{2} SI^2 \times \frac{dx}{LA+x}$ , fluens est area

hyperbolæ quæ ita describitur. Ad puncta *L*, *A*, *B*, (vid. fig. exempli 2<sup>a</sup>.) erige perpendiculara *Ll*, *Aa*, *Bb*, & asymptotis *Ll*, *Lb*, describe Hyperbolam æquilateram cujus sit dignitas  $\frac{1}{2} SI^2$ , & quoniam est (theor. 4. Hyp.)  $LD \times DF = \frac{1}{2} SI^2$  ideòque

$DF = \frac{SI^2}{LD}$ , erit  $DF \times Dd = \frac{SI^2 \times dx}{2LA+x}$

posita  $AD = x$ . Quapropter area hyperbolica *AabB*, æqualis est fluenti secundi termini ubi  $AD = AB$ . Hæc igitur area

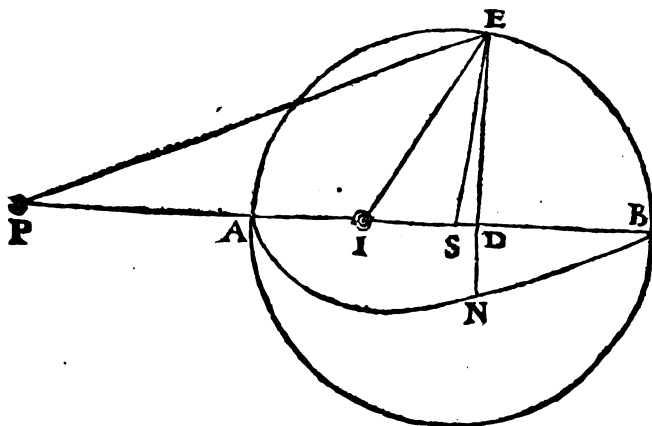
subducta de rectangulo  $\frac{1}{2} \frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$

relinquet aream quæsitam *ANB*.

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 497

reciprocè. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt ratio-  
nem æqualitatis, & propterea attractiones in  $I$  &  $P$  à sphærâ  
totâ factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum  
sphæræ sunt reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum, collige-  
tur quod attractio in  $I$  sit ad attractionem in  $P$ , ut distantia  
 $SP$  ad sphæræ semidiametrum  $SA$ : si vires illæ sunt reciprocè

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXXII.  
THEOR.  
XLI.



in triplicatâ ratione distantiarum; attractiones in  $I$  &  $P$  erunt  
ad invicem ut  $SP$  quad. ad  $SA$  quad.: Si in quadruplicatâ, ut  
 $SP$  cub. ad  $SA$  cub. Unde cùm attractio in  $P$ , in hoc ultimo  
casu, inventa fuit reciprocè ut  $PS$  cub.  $\times PI$ , attractio in  $I$  erit  
reciprocè ut  $SA$  cub.  $\times PI$ , id est (ob datum  $SA$  cub.) reciprocè  
ut  $PI$ . Et (q) similis est progressus in infinitum. Theorema  
verò sic demonstratur.

Stan;

(q) \* Similis est progressus in infinitum.  
Vires centripetæ acceleratrices à particu-  
lâ aliquâ in centro positâ oriundæ, sint  
inter se in distantis  $IS$ ,  $PS$  reciprocè ut  
harum distantiarum potestates  $IS^n$ ,  $PS^n$ ,  
& vis quâ corpusculum situm in  $I$  tra-  
hiitur à sphærâ totâ, erit ad vim quâ tra-  
hitur in loco  $P$  ut  $IS^{\frac{1}{n}}$  ad  $PS^{\frac{1}{n}}$  &  
 $PS^{\frac{n}{n-1}}$  ad  $IS^{\frac{n}{n-1}}$  conjunctim, hoc est,  
ut  $PS^{\frac{n-1}{n-1}}$  ad  $IS^{\frac{n-1}{n-1}}$ . Quare cùm  
sit, (ex Hyp.)  $PS:AS=AS:SI$ , adeoq;  
Tam. 4

que  $IS = \frac{AS^2}{PS}$ , &  $IS^{\frac{n-1}{n-1}} = \frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{n-1}}}$ , vi-  
res illæ erunt ad invicem ut  $PS^{\frac{n}{n-1}}$  ad  
 $AS^{\frac{n}{n-1}}$ , seu ut  $PS^{n-1}$  ad  $AS^{n-1}$ .  
Hinc si  $n=1$ ; vires erunt in ratione æqua-  
litis, si  $n=2$ , erunt ut  $PS$  ad  $AS$ ; Si  
 $n=3$  ut  $PS^2$  ad  $AS^2$ , si  $n=4$  ut  $PS^3$   
ad  $AS^3$ , & ita porro in infinitum.  
R r r

# 498 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXXII.  
THEOR.  
XLI.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpusculo in loco quovis  $P$ , ordinatim applicata  $DN$  (†) inventa fuit ut  $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$ . Ergo si agatur  $IE$ , ordinata illa pro alio quovis corpusculi loco  $I$ , (†) mutatis mutandis, evadet ut  $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$ . Pone vires centripetas, è sphaeræ puncto quovis  $E$  manantes, esse ad invicem in distantis  $IE$ ,  $PE$ , ut  $PE^n$  ad  $IE^n$  (ubi numerus  $n$  designet indicem potestatum  $PE$  &  $IE$ ) & (†) ordinatæ illæ fient ut  $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$  &  $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$ , quarum ratio ad invicem est ut  $PS \times IE \times IE^n$  ad  $IS \times PE \times PE^n$ . Quoniam ob continuè proportionales  $SI$ ,  $SE$ ,  $SP$ , (u) similia sunt triangula  $SPE$ ,  $SEI$ , & inde fit  $IE$  ad  $PE$  ut  $IS$  ad  $SE$  vel  $SA$ ; pro ratione  $IE$  ad  $PE$  scribe rationem  $IS$  ad  $SA$ ; & ordinarum ratio evadet  $PS \times IE^n$  ad  $SA \times PE^n$ . (x) Sed  $PS$  ad  $SA$  subduplicata est ratio distantiarum  $PS$ ,  $SI$ ; &

(†) \* *Ordinatim applicata DN inventa fuit &c.* (cor. 4. prop. 80.)

(†) \* *Mutatis mutandis.* Nempè corpore in  $I$  sito, radio  $IE$ , describendus arcus circuli, & in formulâ attractionis  $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$ , loco  $PS$  &  $PE$ , scribe  $IS$ , &  $IE$ .

(†) \* *Et ordinata illa &c.* Si loco  $V$  scribantur  $PE^n$ , &  $IE^n$ , quæ sunt reciproce ut vires acceleratrices in locis  $P$  &  $I$ , (per cor. 4. prop. 80.)

(u) \* *Similia sunt triangula SPE, SEI*, per prop. 6. Lib. 6. Elem.

(x) \* *Sed PS ad SA subduplicata est ratio distantiarum PS, SI*, ob continuè proportionales  $PS$ ,  $SA$ ,  $SI$ . Porro vires in distantis  $PS$ ,  $IS$ , sunt ad invicem ut  $IS^n$ , ad  $PS^n$  (ex Hyp.) &  $IS:PS=IS^2:AS^2=IE^2:PE^2$ , (ob proportionales  $IE:PE=IS:AS$ ), atque adeò  $IS^n:PS^n=IE^2:PE^2$ , &  $IS^n$

$PS^n=IE^n:PE^n$ . Quare  $IE^n$  est ad  $PE^n$  in ratione subduplicatâ virium in distantis  $PS$ ,  $IS$ , & ordinarum ratio  $PS \times IE^n$ , ad  $SA \times PE^n$  æqualis est rationi  $PS^{\frac{1}{2}} \times IS^{\frac{n}{2}}$ , ad  $IS^{\frac{1}{2}} \times PS^{\frac{n}{2}}$ .

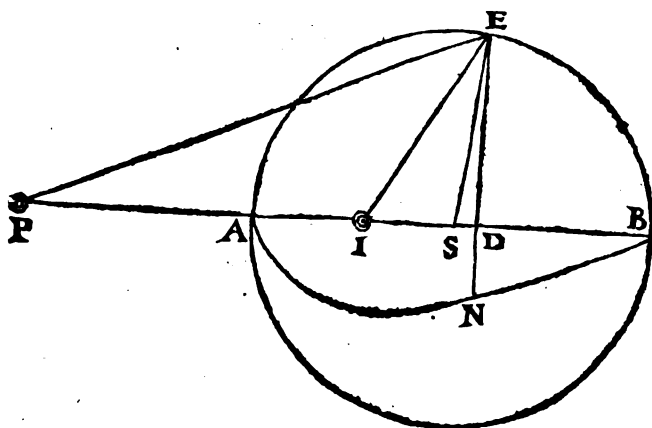
534. *Scholium.* Iisdem positis quæ in prop. 82. si centro  $I$  radio  $IA$  sphaera  $ACMD$  descripta sit, vis quâ corpusculum in  $I$  situm à totâ sphaerâ majore  $AHBK$  versùs centrum  $S$  trahitur, æqualis est vi quâ subductâ sphaera minore  $ACMD$  traheretur. Nam corpusculum in centro  $I$  sphaeræ  $ACMD$  positum, æqualiter undiquè ab hujus sphaeræ minoris partibus trahitur.

535. *Cor. 1.* Si centro  $S$  radio  $SI$  descripta sit sphaera  $Ihbk$ , & vis centripeta in recessu corporis attracti decreseat in triplicatâ ratione distantiarum à particulis materiæ trahentibus, corpusculum in  $I$  situm seu in contactu sphaeræ cavæ  $AHbKI$ , subductâ sphaerâ interiore  $Ihbk$ , vi infinitâ retrahitur à centro  $S$  versùs  $A$ . Nam vis quâ corpusculum

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 499

&  $IE^n$  ad  $PE^n$  (ob proportionales  $IE$  ad  $PE$  ut  $IS$  ad  $SA$ ) DE MO-  
subduplicata est ratio virium in distantis  $PS$ ,  $IS$ . Ergo ordina-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER  
PRIMUS  
PROP.  
LXXXII.  
THEOR.  
XLI.

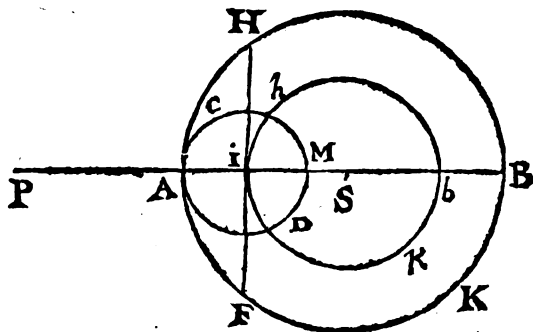


tæ, & propterea aræ quas ordinatæ describunt, hisque propor-  
tionales attractiones, sunt in ratione compositâ ex subduplicatis  
illis rationibus. Q. E. D.

P R O

lum in contactu I à sphæra interiore  $I h b k$   
versus centrum  $S$  trahitur, infinita est  
(520. 527.) respectu vis illius quâ extrâ  
contactum traheretur. Sed vis quâ à sphæ-  
râ totâ solidâ  $A H B K S$ , versus idem cen-  
trum  $S$  trahitur finita est, ut potè quæ ra-  
tionem finitam habeat ad vim finitam,  
quâ corpusculum in loco  $P$  urgeretur (prop.  
82.) ergò vis quâ à sphæra cavâ  $A I H B K I$ ,  
retrahitur à centro versus  $A$  infinita est;  
vis enim quâ in centrum  $S$ , à sphæra soli-  
dâ  $A H B K S$  in centrum trahitur, æqua-  
lis est vi sphære interioris  $I h b k s$ , demp-  
tâ vi contrariâ sphære cavæ  $A I H B K I$ .

536. Cor. 2. Ductâ per  $I$  rectâ  $H F$  ad  
 $A B$  perpendiculari & sphære occurrente  
in  $H$  &  $F$  vis quâ sphære segmentum  
 $A H F$  corpusculum in contactu,  $I$  situm  
versus  $A$  trahit, est etiam infinita in eadem  
virium hypothesi. Nam partes seg-  
menti cavi  $I H b B K F I$ , corpus in  $I$  po-



situm ad centrum  $S$  trahunt; ideòque à  
solo segmento  $A H F$  à centro versus  $A$   
retrahitur, sed vi infinitâ à centro retra-  
hitur 535. Ergo &c.

R r r



# 500 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

## PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.

*Invenire vim quâ corpusculum in centro sphaeræ locatum ad ejus segmentum quodcunque attrahitur.*

LXXXIII.  
PROB.  
XLII.

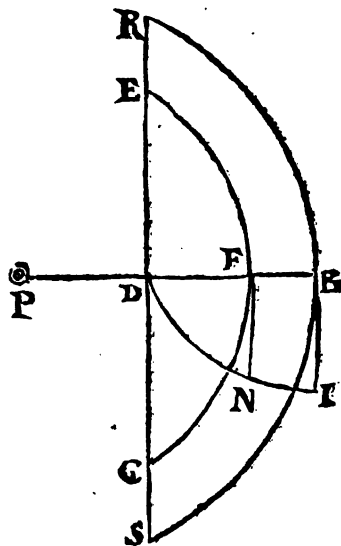
Si  $P$  corpus in centro sphaeræ, &  $RBS$  segmentum ejus plano  $RD$  & superficie sphaericâ  $RBS$  contentum. Superficie sphaericâ  $EFG$  centro  $P$  descriptâ secetur  $DB$  in  $F$ , ac distina-

guatur segmentum in partes  $BREFGS$ ,  $FEDG$ . Sit autem superficies illa non purè mathematica, sed physica, profunditatem habens quàm minimam. Nominetur ista profunditas  $O$ , & erit hæc superficies (per (\*) demonstrata Archimedis) ut  $PF \times DF \times O$ . Ponamus præterea vires attractivas particularum sphaeræ esse reciprocè ut distantiarum dignitas illa, cujus index est  $n$ ; & vis, quâ superficies  $EFG$  trahit corpus  $P$ , erit (per

prop. LXXIX.) ut  $\frac{DEq \times O}{PF^n}$ , id

(\*) est, ut  $\frac{2DF \times O}{PF^n - 1} - \frac{DFq \times O}{PF^n}$ .

Huic proportionale sit perpendicularum  $FN$  ductum in  $O$ ; & (a) area curvilinea  $B DI$ , quam ordinatim applicata  $FN$  in



(\*) \* Per demonstrata Archimedis. Nam (515.) elementum superficiei  $EFG$ , est ut  $PF$  ducta in elementum lineæ  $DF$ , adeoque ob datam  $PF$ , respectu superficiei totius  $EFG$ , superficies illa (165.) erit ut  $PF \times DF$ , & proinde lamina ex hac superficie & profunditate  $O$ , genita erit ut  $PF \times DF \times O$ .

(2) \* Id est &c. Nam (per prop. 13. Lib. 6. Elem.)  $DE^2 = 2PF - DF \times DF$   
 $= 2PF \times DF - DE^2 \times O$  Quare  $\frac{DE^2 \times O}{PF^2}$

$$= \frac{2DF \times O}{PF^2 - 1} - \frac{DF^2 \times O}{PF^2}$$

(a) 537. \* Es area curvilinea &c. Si segmentum  $RBS$   $DR$ , in laminas innumeras profunditatis evanescentis  $O$  divisum intelligatur, & capiatur semper perpendicularum  $FN$ , vi singularum laminarum proportionale; manifestum est (per Lem. 4.) summam elementorum  $FN \times O$ , seu aream curvilineam  $DNIB$ , proportionalem fore summæ virium. Sit igitur  $PD = a$ ,  $PF =$

$= x$

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 501

in longitudinem  $DB$  per motum continuum ducta describit, erit **DE Mo-**  
ut vis tota quâ segmentum totum  $RBSD$  trahit corpus  $P$ . **TU COR-**  
**Q. E. I.** **PORUM.**

$=x$ ;  $DF=x-a$ , & erit laminæ sphericæ  
**EFG** vis attractiva ut  $\frac{2x dx - 2a dx}{x^{n-1}} =$   
 $\frac{2x dx - 2a dx + a dx}{x^n} = \frac{dx}{x^{n-1}}$

$\frac{a dx}{x^n} = x^2 - dx - aax - a^2x$ , cujus

fluens  $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + Q \text{ const.}$

Sed posita  $x=a$ , segmentum & vis illius  
evanescunt; ergo erit  $Q = -\frac{a^{1-n}}{3-n} +$

$\frac{a^{1-n}}{1-n} = \frac{2a^{1-n}}{3-n \times 1-n}$ , & fluens accu-

rata  $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + \frac{2a^{1-n}}{3-n \times 1-n}$

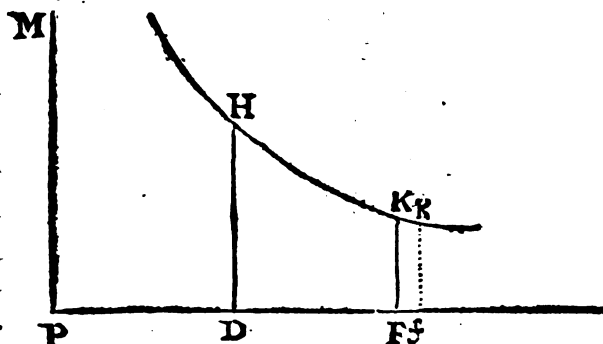
§38. Cor. Hinc patet vim quâ corpus  
in  $P$  locatum, à segmento trahitur sem-  
per posse algebraicè exponi, duobus casu-  
bus exceptis in quibus  $n$  est 1 vel 3. tùm  
autem per logarithmos vel areas hyperbo-  
licas habetur. In 1°. casu areæ  $DNI$ , fluxio  
erit  $x dx = \frac{a dx}{x}$ . Primi termini fluens

est  $\frac{1}{2}xx + Q$ , quæ evanescere debet posi-  
ta  $x=a$ , quare erit  $Q = -\frac{1}{2}aa$ , & fluens  
accurata  $= \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}aa$ . Ut secundi ter-  
mini fluens obtineatur, per punctum  $P$   
agatur  $PM$  ad  $PF$  normalis, & asympto-  
tis  $PM$ ,  $PF$ , describatur Hyperbola æqui-  
latera cujus sit dignitas  $PD^2$ ; per puncta  
 $D$ ,  $F$ ,  $f$  erigantur perpendiculara  $DH$ ,  
 $FK$ ,  $fk$  hyperbolæ occurrentia in  $H$ ,  $F$ ,  
 $f$ , sintque puncta  $F$ ,  $f$ , infinitè propin-  
qua, & erit area hyperbolica  $DHKF$ :

æqualis fluenti secundi termini; nam (per  
theor. 4. de hyperbold)  $PD \times DH = PD^2$   
 $= PF \times FK$ , & ideò  $FK = \frac{PD^2}{PF}$ , ac

$FK \times Ff = \frac{PD^2 \times dx}{x}$  & area  $DHKE$   
evanescit, ubi  $PF$  seu  $x = PD$ .

In 2°. casu areæ  $DNI$ , fluxio est  $\frac{dx}{x}$   
 $= \frac{a dx}{x^3}$ . Secundi termini fluxio est  
 $\frac{aa}{2xx} + Q$ , & invenitur  $Q = -\frac{1}{2}$ , posita  
 $x=a$ , atque adeò fluens accurata; erit  
 $\frac{aa}{2aa} - \frac{1}{2}$ . Ponatur  $a=r$ , & primi ter-



mini  $\frac{dx}{x}$ , fluens; erit area hyperbolica  
 $DHKF = S. \frac{a dx}{x}$ . Quare area  $DNI$   
est ut,  $DHKF + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}xx$ .

Rrr

PRO

# 302 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-  
TU COR-  
PORUM.

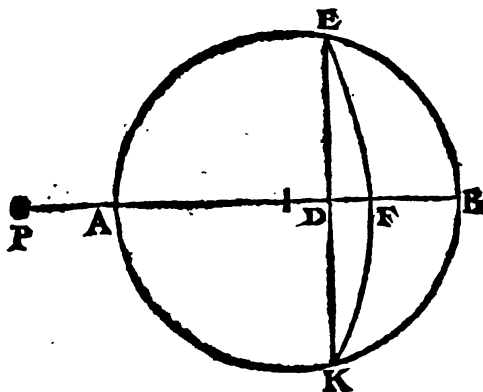
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.

LXXXIV.  
PROBL.  
XLIII.

## PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII:

*Invenire vim, qua corpusculum; extra centrum sphaerae in axe segmenti cujuscvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.*

A segmento  $E B K$  trahatur corpus  $P$  in ejus axe  $A D B$  locatum. Centro  $P$  intervallo  $P E$  describatur superficies sphaerica  $E F K$ , qua distinguatur segmentum in partes duas  $E B K F E$  &  $E F K D E$ .  
(<sup>b</sup>) Quærat<sup>r</sup> vis partis prioris per *prop.* LXXXI. & vis partis posterioris per *prop.* LXXXIII.; & summa virium erit vis segmenti totius  $E B K D E$ . *Q. E. I.*



### Scholium.

Explicatis attractionibus corporum sphaericorum; jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum deque motibus inde oriundis, ob (<sup>c</sup>) earum in rebus philosophicis aliqualem usum, subungere.

S E C:

(<sup>b</sup>) \* Quærat<sup>r</sup> vis partis prioris: 525. 529.

(<sup>c</sup>) \* Ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum. Vide quæstiones Lib. 4. Optices NEWTONI. 30. theorematum ad cal-

cem Astronomiæ Clariss. Keillii, Physicam Clariss. s'Gravesandii, Dissertationem Clariss. De Maupertuis in Commentariis Paris. 1732. ubi has NEWTONI sectiones clarè exponit.

## S E C T I O XIII.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.*De corporum non sphaericorum viribus attractivis.*

## PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

LXXXV.  
THEOR.

*Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longè fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicatâ distantiarum à particulis.*

Nam si vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum à particulis; attractio versus corpus sphaericum, propterea quod (per prop. LXXIV.) sit reciproce ut quadratum distantiae attracti corporis à centro sphaerae, haud sensibilibiter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur propositio de sphaeris attractivis. Et (d) par est ratio orbium sphaericorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in orbibus corpora interiora constituta trahentibus, cum attractiones passim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per prop. LXX.) tollantur, ideoque vel ipso contactu nullae sunt. Quod si sphaeris hisce orbibusque sphaericis partes quaelibet à loco contactus remotae auferantur, & partes novae ubivis addantur: mutari possunt figurae horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additae vel subductae, cum sint à loco contactus remotae, augebunt notabiliter attractionis excessum, qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus figurarum omnium. Q. E. D.

## PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

*Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicatâ vel plusquam triplicatâ ratione distantiarum à particulis, attractio longè fortior erit in contactu, quam cum trahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.*

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujus-

(d) \* Es par est ratio orbium sphaericorum concavorum. (Per prop. 71.)

DE Mo- modi sphæram trahentem (e) augeri in infinitum, constat per  
 TU COR- solutionem problematis XL I. in exemplo secundo ac tertio exhi-  
 FORUM. bitam. Idem, per exempla illa & theorema XL I. inter se col-  
 LIBER lata, facile (f) colligitur de attractionibus corporum versus or-  
 PRIMUS. bes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra  
 PRO P. bes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra  
 LXXXVI. orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel aufe-  
 THEOR. rendo his sphæris & orbibus ubivis extra locum contactus ma-  
 XLIII. teriam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant  
 figuram quamvis assignatam, constabit propositio de corporibus  
 universis.

## PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

*Si corpora duo sibi invicem similia; & ex materiâ æqualiter attra-  
 ctivâ constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis propor-  
 tionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpus-  
 culorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices cor-  
 pusculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis  
 similiter positas.*

Nam si corpora distinguantur in particulas; quæ sint to-  
 tis proportionales; & in totis similiter sitæ; erit, ut attra-  
 ctio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem  
 in particulam correspondentem in corpore altero, ita attra-  
 ctiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in  
 alterius particulas singulas correspondentes; & componendo,  
 ita attractio in totum primum corpus (B) ad attractionem in  
 totum secundum. Q. E. D.

Co-

(e) \* Augeri in infinitum constat &c. (521. 527. 531.).

(f) \* Facile colligitur de attractionibus &c. 528. 530. 532. 535. 536.

(g) 539. \* Ad attractionem in totum secundum. Corpora similia A, a, seorsim attrahant corpuscula C, c sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita, sintque P, p particule totis A, a, proportionales & in totis similiter sitæ & attractio

decreseat in ratione dignitatis distantiarum, cujus sit index n; erit attractio corpusculi C in particulam P ad attractionem corpusculi c in particulam p, ut  $P \times p c^n$ , ad  $p \times P C^n$ . Unde si corpora A & a in particulas innumeras ut P & p divisâ intelligantur, erit, componendo, attractio corpusculi C in totum corpus A ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut  $P \times p c^n$  ad  $p \times P C^n$ , quod par-

*Corol. 1.* Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decreſcant in ratione dig-<sup>TU</sup> nitatis cujuſvis distantiarum; attractiones acceleratrices in corpora<sup>PORUM.</sup> tota erunt ut corpora directè, & distantiarum dignitates illæ in-<sup>LIBER</sup> versè. Ut si vires particularum decreſcant in ratione duplica-<sup>PRIMUS.</sup> tâ distantiarum à corpusculis attractis, corpora autem sint ut<sup>PROP.</sup> *A cub.* & *B cub.* ideoque tum corporum latera cubica, tum<sup>LXXXVII.</sup> corpusculorum attractorum distantia à corporibus, ut *A* & *B*:<sup>THEOR.</sup> *x* *LI V.*

attractiones acceleratrices in corpora erunt ut  $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ quad.}}$  &

$\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ quad.}}$ , id est, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decreſcant in ratione triplicatâ distantiarum à corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut  $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$  &  $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ cub.}}$ , id est, æquales. Si vires decreſcant

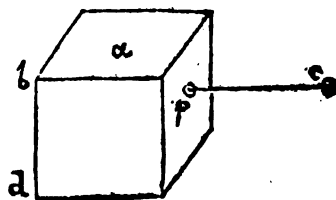
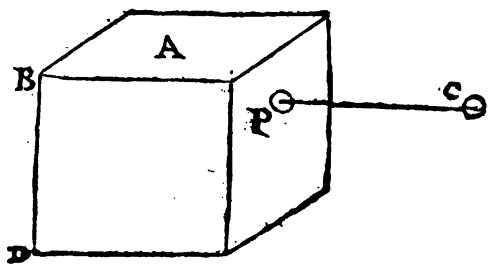
in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora erunt ut  $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ q q.}}$

&  $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ q q.}}$ , id est, reciprocè ut latera cubica *A* & *B*. Et sic in cæteris.

Co-

particulae omnes *P*, *p* sint ubique totis similes & in iis similiter sitæ, & distantia earum à corpusculis *C*, *c* semper maneat proportionalis distantia *P C*, *p c*. Cum igitur sit *P* ad *p* ut *A* ad *a*, & distantia *p c*, *P C* sint lateribus homologis *b d*, *B D* proportionales (ex Hyp.) erit attractio corpusculi *C*, in totum corpus *A*, ad attractionem corpusculi *c* in totum corpus *a*, ut  $A \times p c = a d \times P C$ , atque etiam ut  $A \times b d = a d \times B D$ , & ut  $B D : b d = a d : A$ , hoc est, ut  $b d = \frac{a d}{B D} A$ , ob proportionales  $A : a = B D : b d$ , (per Hyp.) ex quibus patet corollarium rati-  
 quod sequitur; Nam si  $n = 2$ , erunt attractiones ut  $B D$  ad  $b d$ ; si  $n = 3$ , erunt æquales; si,  $n = 4$ , erunt ut  $b d$ , ad  $B D$ , hoc est, reciprocè ut latera cubica corporum.

Tem. I.



s r r

# 506 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
LXXXVIII.  
THEOR.  
XLV.

Corol. 2. (h) Unde vicissim, ex viribus, quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti; si modo decrementum illud sit directè vel inversè in ratione aliquâ distantiarum.

## PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum æqualium corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantiae locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materiâ consimili & æquali constantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpusculum aliquod *Z* viribus, quæ, si particulæ æquantur inter se, sint ut distantiae *AZ*, *BZ*; sin particulæ statuatur inæquales, sint ut hæ particulæ & ipsarum distantiae *AZ*, *BZ* conjunctim,

(h) 540. \* Unde vicissim &c. Nam si experimentis inventum sit attractionem corpusculi *C* in corpus *A*, esse ad attractionem corpusculi *c*, in corpus *a*, ut est *BD* ad *bd*, vel ut *1* ad *1*, vel ut *bd* ab *BD*, vires particularum attractivarum decrevant in ratione distantiarum duplicatâ, vel triplicatâ, vel quadruplicatâ (539). Et generatim, si experimentis inventa fuerit attractio corpusculi *C* in *A* ad attractionem corpusculi *c* in *a*, ut numerus *N* ad numerum *n*, ponaturque vim particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti decrevere in ratione dignitatis distantiarum cujus sit index *x* erit (539)  $n : N = BD^x - 1 : bd^x - 1$ , adeoque (si *L* logarithmum significet quantitatis cui præponitur) erit  $L. \frac{n}{N} = L. \frac{BD^x - 1}{bd^x - 1}$

$$= \frac{x-1}{x} \times L. \frac{BD}{bd}. \text{ Quare erit } x \times$$

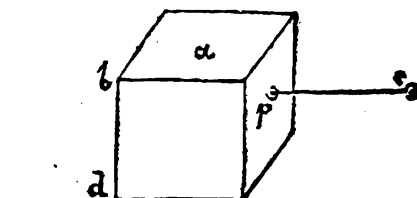
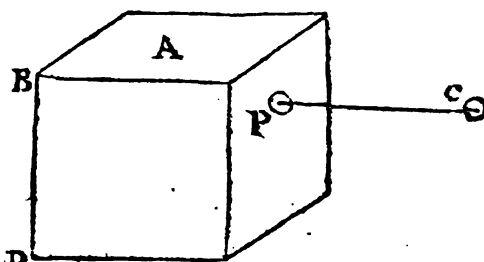
$$L. \frac{BD}{bd} = L. \frac{n}{N} + 3. L. \frac{BD}{bd}, \text{ \& } x =$$

$$L. \frac{n}{N}$$

$$\frac{BD}{bd} + 3. \text{ Invenitur itaque dignitatis in-$$

$$dex x, \text{ per tabulas logarithmicas. Exem-}$$

$$pli causâ. Si \frac{n}{N} = \frac{bd}{BD}, \text{ erit } L. \frac{bd}{BD} =$$



$$- L. \frac{BD}{bd}, \text{ \& } d. d. x = -1 + 3 = 2. \text{ Si}$$

$$\frac{n}{N} = 1, \text{ erit } L. \frac{n}{N} = 0, \text{ \& proinde } x = 3.$$

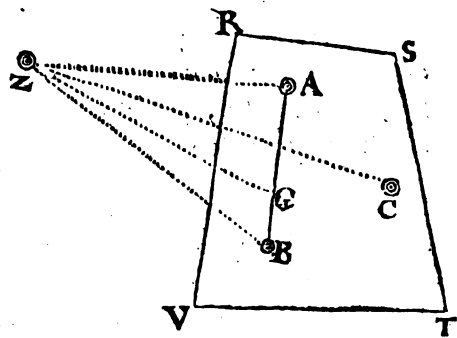
$$\text{Si } \frac{n}{N} = \frac{BD}{bd}, \text{ erit } x = 4, \text{ prout ut su-}$$

$$\text{pra. Si } \frac{n}{N} = \frac{BD^p}{bd^p}, \text{ erit } L. \frac{n}{N} = p \times$$

$$L. \frac{BD}{bd}, \text{ \& } x = p + 3. \text{ Sed si } \frac{n}{N} =$$

bd

five ( si ita loquar ) ut hæ particulæ in distantias suas  $AZ$ ,  $DE$  Mo-  
 $BZ$  respectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta  $A \times AZ$  &  $B \times BZ$ . Jungatur  $AB$ , & secetur ea in  $G$  <sup>TU COR-</sup>  
 ut sit  $AG$  ad  $BG$  ut particula  $B$  ad particulam  $A$ ; & erit <sup>PORUM.</sup>  
 $G$  commune centrum gravitatis particularum  $A$  &  $B$ . Vis <sup>LIBER</sup>  
 $A \times AZ$  ( per legem corol. 2. ) resolvitur in vires  $A \times GZ$  <sup>PRIMUS.</sup>  
 &  $A \times AG$ , & vis  $B \times BZ$  in vires  $B \times GZ$  &  $B \times BG$ . <sup>PROP.</sup>  
 Vires autem  $A \times AG$  &  $B \times BG$ , ob proportionales  $A$  ad  $B$  &  $BG$  ad  $AG$ , æquan-  
 tur; ideoque cum dirigantur  
 in partes contrarias, se mu-  
 tuo destruunt. Restant vires  
 $A \times GZ$  &  $B \times GZ$ . Ten-  
 dunt hæ ab  $Z$  versus centrum  
 $G$ , & vim  $A + B \times GZ$  com-  
 ponunt; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ  $A$   
 &  $B$  confisterent in eorum communi gravitatis centro  $G$ , glo-  
 bum ibi componentes. <sup>LXXXVIII.</sup>  
 Eodem argumento, si adjungatur particula tertia  $C$ , & com-  
 ponatur hujus vis cum vi  $A + B \times GZ$  tendente ad centrum  
 $G$ ; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis glo-  
 bi illius in  $G$  & particulæ  $C$ ; hoc est, ad commune centrum  
 gravitatis trium particularum  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; & eadem erit, ac si  
 globus & particula  $C$  confisterent in centro illo communi, glo-  
 bum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum.  
 Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujus-  
 cunque  $RSTV$ ; ac si corpus illud, servato gravitatis centro, <sup>(i)</sup>  
 figuram globi indueret. <sup>THEOR.</sup>  
 Q. E. D. <sup>XLV.</sup>



Corol. Hinc motus corporis attracti  $Z$  idem erit, ac si cor-  
 pus attrahens  $RSTV$  esset sphaericum: & propterea si corpus il-  
 lud

$\frac{b \cdot d \cdot p}{B \cdot D \cdot P}$ , inveniatur  $x = 3 - p$ . Si  $\frac{B \cdot D}{b \cdot d} = 10$ , <sup>(i) \*</sup> Figuram globi indueret. Per  
 prop. 77.

$$\text{erit } x = \frac{L \cdot \frac{n}{N}}{1.0000000} + 3 = L \cdot \frac{n}{N} + 3;$$



DE Mo-  
TU COR-  
PORUM. **LIBER**  
PRIMUS.  
PROP. **LXXXIX.**  
THEOR. **XLVI.**

lud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in di-  
rectum; corpus attractum <sup>(\*)</sup> movebitur in ellipsi centrum ha-  
bente in attrahentis centro gravitatis.

**PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.**

*Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantie locorum à singulis: vis ex omnium viribus composita, quæ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit, ac si trahentia illa, servata gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.*

Demonstratur eodem modo, atque propositio superior.

*Corol.* Ergo motus corporis attracti idem erit, ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur: Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

**PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.**

*Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescetes in quâcunque distantiarum ratione: invenire vim, quæ corpusculum attrahitur ubivis possum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.*

Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano, cui recta *AP* perpendicularis est, describi intelligatur circulus; & invenienda sit vis, quæ corpusculum quodvis *P* in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis *E* ad corpusculum attractum *P* agatur recta *PE*. In rectâ *PA* capiatur *PF* ipsi *PE* æqualis, &c.

(\*) \* Movebitur in ellipsi &c. Per cor. prop. 78. & per cor. prop. 109.



# 510 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

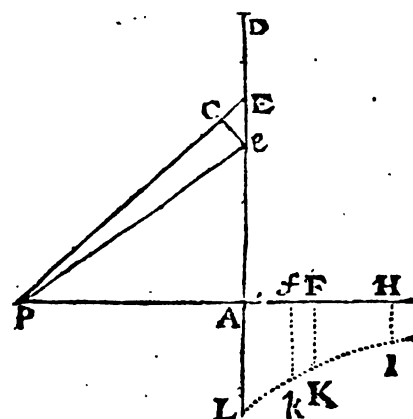
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

LIBER ut contentum  $Ff \times FK \times AP$ ,  
PRIMUS. sive ut area  $FKkf$  ducta in

PROF.  $AP$ . Et (°) propterea summa  
X C. virium, quibus annuli omnes in

PROBL. circulo, qui centro  $A$  & inter-  
XLIV. vallo  $AD$  describitur, trahunt

corpus  $P$  versus  $A$ , est ut area  
tota  $AHIKL$  ducta in  $AP$ .  
 $Q: E. D.$



Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicatâ  
distantiarum ratione, hoc est, si sit  $FK$  ut  $\frac{1}{PF \text{ quad.}}$  (°) at-

que ideo area  $AHIKL$  ut  $\frac{1}{PA} \frac{1}{PH}$ ; erit attractio corpus-  
culi  $P$  in circulum ut  $1 - \frac{PA}{PH}$ , id est, ut  $\frac{AH}{PH}$ .

Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias  
 $D$  sint reciprocè ut distantiarum dignitas quælibet  $D^n$ , hoc  
est, si sit  $FK$  ut  $\frac{1}{D^n}$ , (°) ideoque area  $AHIKL$  ut  $\frac{1}{PA^{n-1} PH}$

angulus  $PEA$  utrique triangulo  $CEc$ ,  
 $AEP$  communis est, adeoque triangu-  
la hæc similia sunt, & latera habent propor-  
tionalia. (Per prop. 4. lib. 6. Elem.)

(o)\* Et propterea summa virium &c.  
Per cor. lem. 4.

(p)\* Atque ideo area &c. Sit enim  
 $PF = x$ ,  $Ff = dx$ , & erit  $FK \times Ff$  ut  $\frac{dx}{xx}$

(ex hyp.) cujus fluens est  $-\frac{1}{x} + Q. \text{const.}$

(165); Et quoniam area  $ALKF$  evanes-  
cere debet, ubi  $PE = PA$ , erit  $Q = \frac{1}{PA}$

& area  $ALKF$  ut  $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PF} = \frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$

ubi  $PF = PH$ . Cum igitur attractio cor-  
pusculi  $P$ , in circulum sit ut  $AHIKL$   
 $\times PA$ , erit quoque ut  $1 - \frac{PA}{PH} = \frac{PH - PA}{PH}$

$= \frac{AH}{PH}$

(q)\* Ideoque area &c. Si enim  $D$   
dicatur  $x$ , erit  $PK \times Ff$  ut  $\frac{dx}{x^n}$ , (ex hyp.)

& (165.) area  $AFKL$ , ut  $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$

+  $Q. \text{const.}$  posita  $x$  seu  $PF = PA$ , inve-

nitur  $Q = \frac{1}{(n-1)PA^{n-1}}$ , ideoque area

$AFKL$ , ut  $\frac{1}{(n-1)PA^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$

hoc

$$\frac{1}{P H^{n-1}}; \text{erit attractio corpusculi } P \text{ in circulum ut } \frac{1}{P A^{n-2}}$$

$$\frac{P A}{P H^{n-1}}$$

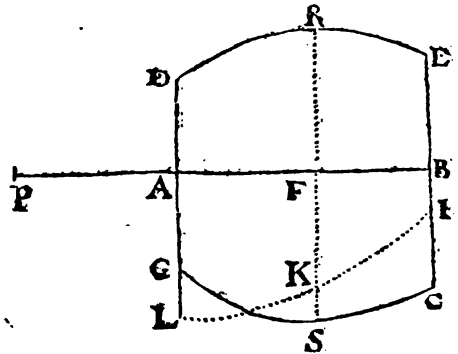
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XC.  
PROBL.  
XLIV.

Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus  $n$  sit unitate major; attractio corpusculi  $P$  in planum totum infinitum erit reciproce ut  $P A^{n-2}$ , propterea quod (1) terminus alter  $\frac{P A}{P H^{n-1}}$  evanescet.

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

*Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cuius puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque distantiarum ratione decrecentes.*

In solidum (1)  $DECG$  trahatur corpusculum  $P$ , situm in ejus axe  $AB$ . Circulo quolibet  $RFS$  ad hunc axem perpendiculari secetur hoc solidum, & in ejus semidiametro  $FS$ , in plano aliquo  $PALKB$  per axem transiente, capiatur (per prop. x c.) longitudo  $FK$  vi, quâ corpusculum  $P$  in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum  $K$  curvam lineam  $LKI$ ; planis extimorum circulorum  $AL$  &  $BI$  occurrentem in  $E$  &  $I$ ; & erit attractio corpusculi  $P$  in solidum ut (1) area  $LABI$ . Q. E. I.



hoc est, ob datam quantitatem  $n-1$ , ut  $\frac{1}{P A^{n-1}} - \frac{1}{P H^{n-1}}$ , ubi  $P F = P H$ .

(1) \* Terminus alter evanescet. Ob  $P H$ , infinitam.

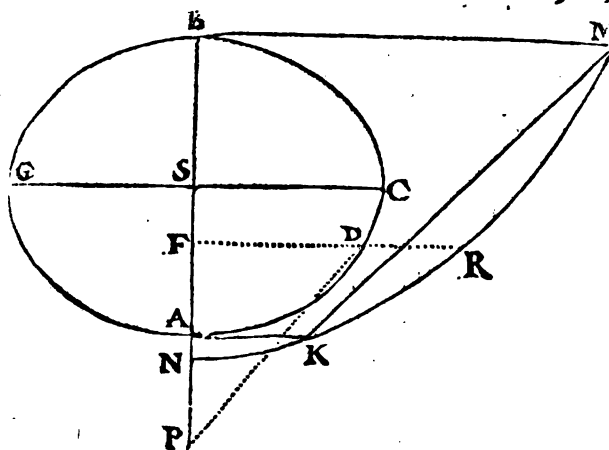
(1) \* In solidum  $DECG$  &c. Cævolutione superficiæ  $A D R E B$  circa axem  $AB$  genitum.

(1) \* Ut area  $LABI$ . Patet per corlem. 4. Nam area illa est ut summa virium singulorum circulorum, quæ per omnia puncta lineæ  $AB$  describi possunt.

141. Scholium. Sit abscissa  $P F = x$ , ejus fluxio  $d x$ , ordinatim applicata  $F R = y$ ,  $P R = \sqrt{x y + x x}$ , & vis reciproca



Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit, quâ sphæroidis *AGBC* attrahit corpus quodvis *P*, exterius in axe suo *AB* situm. (\*) Sit *NKRM* sectio conica cujus ordinatim applicata *ER*, ipsi *PE* perpendicularis, æquetur semper longitudini *PD*, quæ



ducitur ad punctum illud *D*, in quo applicata ista sphæroidem fecat.

(\*) 542. Sit *NKRM* sectio conica cujus ordinatim applicata *ER* aequetur semper longitudini *PD* &c. Sit *AP* = *a*, curvæ datæ *ACB* cujus convolutione generatur sphæroidis sit semiaxis *AS* = *b*, alter semiaxis *SC* = *c*, *AE* = *x*, erit *PE* =  $a + x$ , &c (ex

naturâ Ellipseos) erit  $ED^2 = \frac{c^2}{b^2} \times 2bx - xx$ ;

unde quadratum *ER* ordinatæ ad curvam *NKRM* sive  $PD^2 = PE^2 + ED^2 =$

$a^2 + 2ax + xx + \frac{c^2}{b^2} \times 2bx - \frac{c^2}{b^2} xx$ ; cum

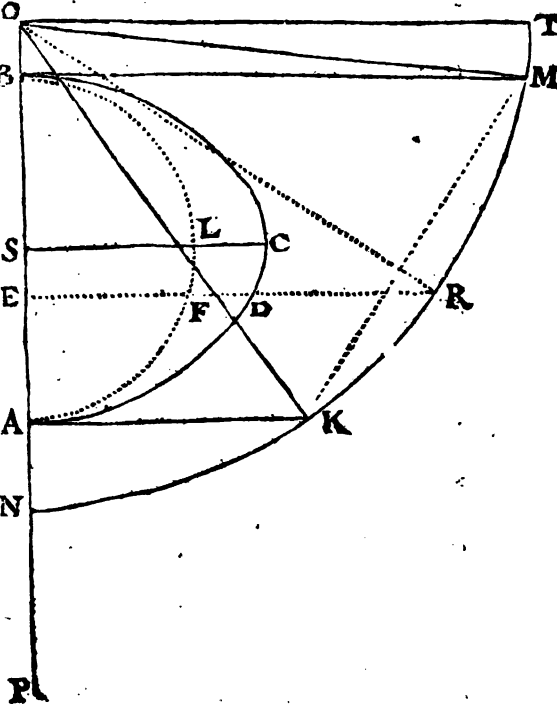
ergo hæc Aequatio ad curvam *NKRM*, ultra secundum gradum non assurgat constat eam curvam esse ex Sectionibus Conicis :

erit autem Ellipsis si quantitas  $xx - \frac{c^2}{b^2}xx$  sit

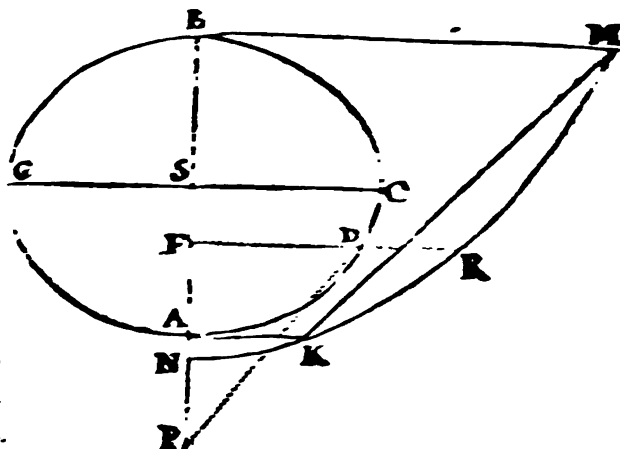
negativa, quod evenit ubi *SC* (sive *c*) major est quàm *AS* (sive *b*) ; Erit verò Parabola si ea quantitas evanescat, ideoque si  $c = b$  quod evenit ubi curva *ACB* est circulus ; Denique erit Hyperbola si ea quantitas sit positiva, hoc est, si *AS* sit longior axis.

543. Sit *ACB* Ellipsis cujus axis *CS* sit major axi *AS*, quo casu curva *NKRM* erit Ellipsis, hac ratione ejus curvæ *NKRM* determinabuntur Axes & Vertex. Dicatur ejus Ellipseos *NKRM* semiaxis *ON* = *a*, alter semiaxis *OT* dicatur *b*, distantia verticis *N* à vertice *A* curvæ *ACB*, dicatur

Tom. I.



DE MO. secus. A sphaeroidis  
 ut CON-verticibus A, B ad  
 PORT. ejus axem AB cri-  
 LIBER gatur perpendiculara  
 PRIMA. AK, BM ipsa AP,  
 PROPT. BP aequalia respective,  
 XCI. & propterea sectioni  
 XLY. conicæ occurrentia in  
 K & M; & jun-  
 gatur KM asserens  
 ab eadem segmentum  
 KMRK. Sit autem.



$p$ , abscissa NE erit  $= p + x$ , & ordinata  
 ER quadratum erit ex Ellipse natura  
 $\frac{ss}{ss} \times 2sp + 2sx - pp - 2p - 2x$ , quod ex  
 constructionis Hypothesi fuit reperiendum

$$(542) = a^2 + 2ax + \frac{cc}{bb} 2bx - \frac{cc}{bb} 2x$$

Conferantur horum valorum terminum ho-  
 mogenei, scilicet constantes cum constan-  
 tibus, eos qui unam variabilem includunt  
 eum similiter &c. fieri tres istæ Equatio-  
 nes (variabilibus deletis  $a^2 = \frac{ss}{ss} \times 2sp - pp$ ,

$$a + \frac{cc}{b} = \frac{ss}{ss} \times 2s - p; 1 - \frac{cc}{bb} = -\frac{ss}{ss}$$

Ex hac tertia Equatione, mutatis signis utrin-  
 que, reducto primo membro ad communem  
 denominatorem, & in versis terminis fit  $\frac{ss}{ss}$

$$= \frac{bb}{cc - bb} \& 1 = \frac{bb}{cc - bb} \times 2s - p$$

Unde Equationis  $a + \frac{cc}{b} = \frac{ss}{ss} \times 2s - p$  mul-

tiplicatis terminis per  $\frac{ss}{ss}$ , reductione fa-

cta primi membri ad eundem den: minato-

rem, & substitutione facta valoris  $\frac{ss}{ss}$  su-

per inventi fit  $2s - p = \frac{bb}{cc - bb} \times 2s - p$

sphae-

Denique, primæ Equationis  $a^2 = \frac{ss}{ss} \times$

$2sp - pp$  multiplicatis membris per  $\frac{ss}{ss}$ ,

substituto ejus valore, utrinque mutatis

signis & additis  $ss$ , fit tandem  $ss - \frac{bb}{c^2 - b^2} a^2$

$= 2s - 2sp + pp$ , in qua novæ E-

quatione cum secundum membrum fit ip-

simum quadratum quantitatis  $2 - p$ , substitui-

to ejus valore prius reposito, & loco  $ss$

in primo membro substituto etiam ejus va-

lore, fit  $\frac{bb}{c^2 - b^2} \times a^2 - a^2 = \frac{bb}{c^2 - b^2} \times$

$b a + c^2$  & diviso utroque membro per

$\frac{bb}{c^2 - b^2}$  transponendo  $a^2$ , & reducendo.

secundum membrum ad communem deno-

minatorem, deletisque terminis sese do-

fluentibus est  $a^2 = \frac{cc}{c^2 - b^2} \times a^2 + 2ab + c^2$ ,

sive quia  $PS = a + b$  est  $PS^2 = b^2 + a^2 + 2ab$ ,

ideoque est  $a^2 = \frac{cc}{c^2 - b^2} \times PS^2 - b^2 + c^2$ .

neque  $OT^2 = \frac{CS^2 - AS^2 \times PS^2 - AS^2 + CS^2}{CS^2}$

qui termini sunt omnes dati, hoc ergo

invento cetera ad Ellipsim pertinentia com-

modè inveniuntur.

In gratiam notæ sequentis, ex his va-

lorum

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 515

Sphæroidis centrum S & semidiameter maxima S C: & vis, quâ DE Mo-  
sphæ- TU COR-  
PORUM.

lorem quantitatis  $\frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2}$  deter-  
minabimus, quam esse æqualem quantitati  
 $\frac{CS^2}{PS^2}$

$\frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{CS^2}$ , ita ex valoribus su-  
pra inventis statuitur; Est  $s = \frac{bb^2}{c^2 - b^2}$  ex  
tertiâ Equatione, unde erit  $s^2 + s^2 =$   
 $\frac{b^2 s^2 + c^2 s^2 - b^2 s^2}{c^2 s^2} = \frac{c^2 - b^2}{c^2}$ , ideoque

$\frac{s^2 + s^2}{s^2} = \frac{c^2 - b^2}{c^2} = \frac{CS^2 - AS^2}{CS^2}$ . Est  
verò  $AO = s - p$ , &  $PO = PA + AO$

$= a + s - p$ , & cum sit  $s - p = \frac{b}{c - b}$  ×  
 $\frac{ba + cc}{b}$  (ex secundâ Equatione) est  $PO$

$= a + \frac{c}{c - b} \times \frac{ba + cc}{b}$ , quo valore  
reducto ad communem denominatorem,

deletisque terminis sese destruentibus est  
 $PO = \frac{c}{c - b} \times a + b$  five  $= \frac{CS^2 - AS^2}{CS^2}$

×  $PS$ , cumque sit  $s^2 = \frac{CS^2 - AS^2}{CS^2}$   
 $\times \frac{PO}{PS}$  eff  $\frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2} =$

&  $\frac{PO^2}{s^2} = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$   
Unde tandem est  $\frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2} = \frac{CS^2 - AS^2}{CS^2}$

$\frac{CS^2}{CS^2} \times \frac{PS^2}{PS^2}$ , five  
 $\frac{CS^2 - AS^2}{CS^2} \times \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$ , five

$\frac{CS^2 - AS^2}{CS^2} \times 1 = \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$   
reducendoque ad eundem denominato-

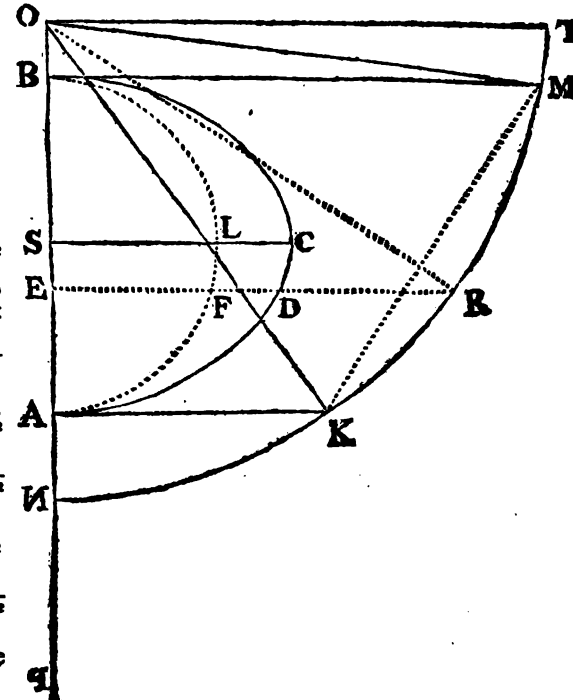
rem, deletisque terminis sese destruentibus  
 $\frac{CS^2}{CS^2} \times \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2} =$

$\frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{CS^2}$  diviso numeratore &  
denominatore per  $CS^2 - AS^2$ . Est ergo

$\frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2} = \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{CS^2}$   
Q. E. D.

544. Sit autem curva data A C B cir-  
culus, ita ut sphæroidis ejus convolutione  
genita, sit accurata sphæra, erit curva

N K R M Parabola, stantibus enim quæ in  
no. 542. dicta sunt, erit ut prius  $PE = a + x$ , LIBER  
& ex naturâ Circuli  $EP^2 = 2bx - xx$ , unde PRIMUS.  
erit  $PF^2$  quadratum  $= PE^2 + EF^2 =$  PROP.  
 $a^2 + 2ax + xx + 2bx - xx = a^2 + 2ax + 2bx$ ; XCI.  
cum ergo ordinata E R ad curvam N K R M PROBL.  
X LV.

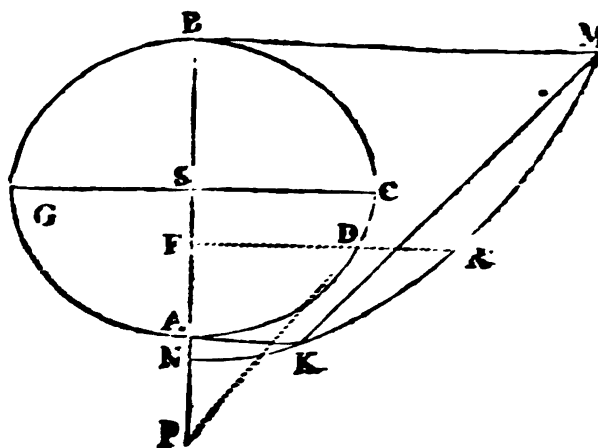


sumatur æqualis P F, ejus ordinatæ qua-  
dratum erit æquale abscissæ ipsi per quan-  
titates constantes ductæ, sed ultra primum  
gradum non assurgenti, quæ est Parabolæ  
proprietas. Dicatur ergo ejus Parabolæ  
latus rectum  $l$ , distantia verticis N à ver-  
tice A curvæ A C B dicatur  $p$ , abscissæ N E  
erit  $p + x$  & ex Parabolæ natura erit or-  
dinatæ E R quadratum  $= l p + l x$  conse-  
ratur hic valor cum valore ejusdem E R  
supra invento  $2a + 2ax + 2bx$ , termini  
constantes cum constantibus & qui varia-  
bilem includunt cum similibus, fient duæ  
Equationes  $l p = a^2$ , &  $l = 2a + 2b = 2PS$ ,  
T t t 2 ideo-



DE MO-Sphæroidis (+) trahit corpus P, erit ad vim, quâ sphæra diametro AB  
TU COR-  
PORUM. descripta trahit idem corpus, ut  $\frac{AS \times CS q - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCI.  
PROBL.  
XLV.



ad  $\frac{AS \text{ cub.}}{3 PS \text{ quad.}}$ . Et eodem computandi fundamento invenire  
licet vires segmentorum sphæroidis.

ideoque  $p = \frac{a^2}{2a+2b} = \frac{PA^2}{2PS}$ ; & cum ex  
natura Parabolæ, sit  $ER^2 = 1 \times p + x$  erit  
 $p + x = NE = \frac{ER^2}{2PS}$ ; Cumque area Pa-  
rabolica inter abscissam, ordinatam, & cur-  
vam intercepta sit æqualis duobus tertiis  
Rectanguli abscissæ per ordinatam, erit area  
Parabolica  $NER = \frac{2}{3} ER \cdot ER$ ;  $\frac{ER^2}{2PS} = \frac{ER^2}{3PS}$ , &  
quoniam, ex constructione, ordinatæ in A  
& B erectæ sunt æquales PA & PB, erit  
area Parabolica  $PAK = \frac{PA^3}{3PS}$  & area Pa-  
rabolica  $PBM = \frac{PB^3}{3PS} = \frac{PA^3 + 2AS^3}{3PS}$  &  
differentia harum arearum AKRMB  
respondens axi Sphaeræ AB, erit  
 $\frac{PA^3 + 2AS^3 - PA^3}{3PS} = \frac{2AS^3}{3PS}$

denique dempto trajectio AKMB, seg-  
mentum Parabolicum rectum KPM erit

æquale  $\frac{2BS^3}{3PS}$ , trapezium enim AKMB  
est æquale  $\frac{1}{2} AB \times AK + BM$  five (quæ  
 $\frac{1}{2} AB = AS$ ,  $AK = PA$  &  $BM = PB =$   
 $PA + 2AS$ ) est æquale  $2AS \times PA +$   
 $2AS^2$ , & reducendo ad denominatorem  
 $3PS$  five  $3PA + 3AS$  est æquale  
 $\frac{6AS \times PA^2 + 12AS^2 \times PA + 6AS^3}{3PS}$   
huic deductum ex area AKRMB =  
 $\frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$   
remanet  $\frac{2AS^3}{3PS}$ . Q. E. D.

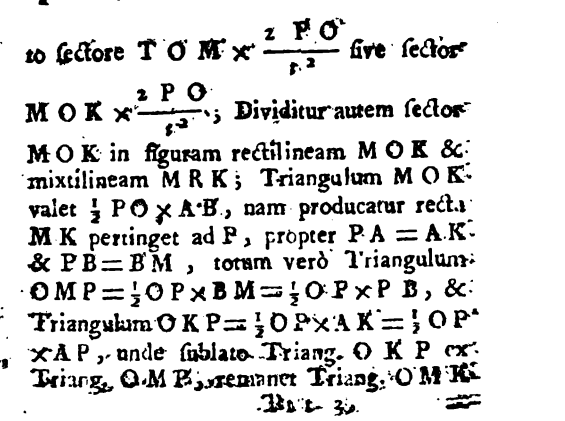
(+) 548. Vis quâ sphæroidis trahit corpus P  
est ad vim quâ sphæra diametro AB descripta  
trahit idem corpus ut  $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 \times CS^2 - AS^2}$

ad  $\frac{AS^3}{3PS^2}$

Supponatur juxta solutionem hujusce Pro-  
blemat, curvam describi se. nendam AP, cu-  
jus

## 517

Triang, O.M.P., remainder Triang, O.M.  
B-1-30



DE MO- =  $\frac{1}{2} OP \times PB - AP = \frac{1}{2} OP \times AB$ . Un-  
TU COR- de tandem fluens quantitas hujus tertii ter-  
PORUM.

LIBER mini est  $\frac{2 PO}{s^2} \times \frac{1}{2} OP \times AB + \frac{2 PO}{s^2} \times$   
PRIMUS.  $MRK = \frac{PO^2}{s^2} \times AB + \frac{2 PO}{s^2} \times MRK$ ;  
PROP.

XC I. quæ detracta ex fluente terminorum positivo-  
PROBL. rum  $AB \times \frac{s^2 + s^2}{s^2}$  fit  $AB \times \frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2}$   
XL V.

$$-\frac{2 PO}{s^2} \times MRK, \text{ cum ergo sit } \frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2}$$

$$= \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2} \& \frac{PO}{s^2} = \frac{PS}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$$

$$(543) \text{ est fluens quaesita (quia } AB = AS)$$

$$\frac{2 AS \times CS^2 - 2 PS \times MRK}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$$

Si autem curva A C B sit circulus,  
sphaerois in sphaeram veram mutatur, fit  
 $CS = AS$  & segmentum M R K fit  $\frac{2 AS^2}{3 PS}$   
(544) ideoque mutatur hæc formula in  
istam  $2 AS \times AS^2 = \frac{2 PS \times 2 AS^2}{3 PS}$

$$\frac{PS^2 - AS^2 + AS^2}{PS^2} = \frac{2 AS^2 - \frac{4}{3} AS^2}{\frac{2}{3} PS^2} = \frac{2 AS^2}{3 PS^2}$$

met vim sphaeræ; itaque divisa expressio-  
ne vis sphaeroidis & vis sphaeræ per com-  
munem multiplicatorem 2; Erit vis spha-  
roidis ad vim sphaeræ ut  $\frac{AS \times CS^2 - PS \times MRK}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$

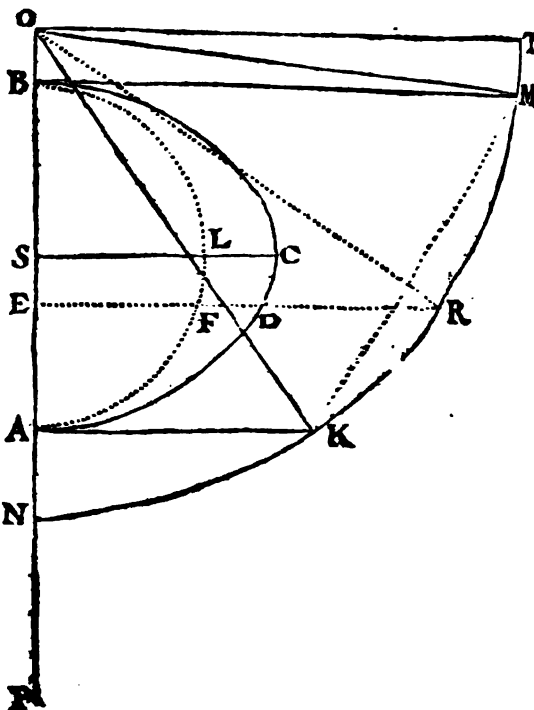
ad  $\frac{AS^3}{3 PS^2}$ . Q. E. D.

Notest etiam determinari vis sphaeræ,  
hoc calculo, sit ut prius  $PA = a$ ,  $AB = 2b$ , abscissa  $AE = x$ ,  $PF = v$ , erit  $PE^2 = a^2 + 2ax + xx$ , &  $EF^2 = 2bx - xx$  (ex naturâ circuli) ideoque  $PF^2 (vv) = a^2 + 2ax + 2bx$ , unde invenitur  $x = \frac{vv - a^2}{2v}$  &  $dx = \frac{2v dv}{2 \times a + b} = \frac{v dv}{a + b}$  &  $PE = a + x = \frac{a^2 + 2ab + vv}{2 \times a + b}$  &  $\frac{dx}{PF} = \frac{dv}{a + b}$

Itaque, cum fluxio areæ quæ exprimit vim  
sphaeræ sit per Cor. 1. Prop. xc. ut  $dx = \frac{PE dx}{PF}$ , erit ea fluxio ut  $dx = \frac{a^2 + 2ab + vv}{2 \times a + b^2} dv$

cujus fluens est  $x = \frac{a^2 v + 2abv + \frac{1}{3} v^3}{2 \times a + b^2}$

+ Q const., quæ evanescere debet ubi  $x = 0$



$$\& v = a \text{ ideoque est } \frac{a^3 + 2a^2b + \frac{1}{3}a^3}{2 \times a + b^2}$$

$$+ Q - 0, \& Q = \frac{\frac{4}{3}a^3 + 2a^2b}{2 \times a + b^2}; \text{ Vis au-}$$

tem totius Sphaeræ obtinetur si fiat  $x = AB$   
(2b) &  $v = PB (a + 2b)$ , estque ideo  $2b + \frac{4}{3}a^3 + 2a^2b - a - 4ab^2 - 4ab^2 - \frac{1}{3}a^3 - 2a^2b - 4ab^2 - \frac{1}{3}b^3$

$$\frac{2 \times a + b^2}{4a^2b + 8ab^2 + \frac{1}{3}b^3} = 2bx -$$

$$\frac{2a^2 + 4ab + \frac{1}{3}b^2}{2 \times a + b^2}, \& \text{ reducen-}$$

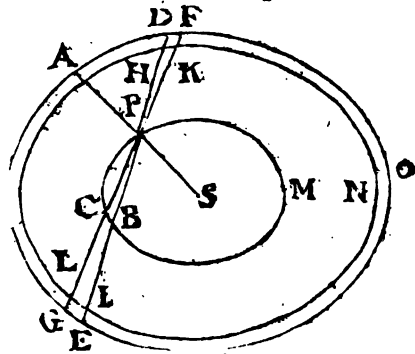
$$\text{do ad eundem denominatorem} = \frac{2b \times}{2a^2 + 4ab + 2b^2 - 2a^2 - 4ab - \frac{1}{3}b^2}$$

$$\frac{2 \times a + b^2}{\frac{2}{3}b^2} = 2b \times \frac{\frac{2}{3}b^2}{2 \times a + b^2}$$

five ponendo  $AS$  pro  $b$ ,  
&  $PS$  pro  $a + b$  dividendoque numerato-  
rem & denominatorem per 2, vis tota

$$\text{Sphaeræ est } \frac{2 AS^3}{3 PS^2}. \text{ Q. E. I.}$$

*Corol. 3.* Quod si corpusculum intra sphæroidem in axe col-  
locetur, attractio erit ut ipsius distantia à centro. Id quod faci-  
lius hoc argumento colligitur, siue particula in axe sit, siue in  
aliâ quâvis diametro datâ. Sit *AGO* sphæroidis attrahens, *S* cen-  
trum ejus, & *P* corpus attractum. Per corpus illud *P* agantur  
tum semidiameter *SPA*, tum rectæ duæ quævis *DE*, *FG*  
sphæroidi hinc inde occurrentes in *D* & *E*, *F* & *G*; sintque  
*PCM*, *HLN* superficies sphæroidum duarum interiorum, ex-  
teriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per  
corpus *P*, & secet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, posterior se-  
cet easdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem sphæroi-  
des omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc  
inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP*  
& *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG*  
sibi mutuò æquales; (1) prop-  
tèrea quod rectæ *DE*, *PB* &  
*HI* bifecantur in eodem pun-  
cto, ut & rectæ *FG*, *PC* &  
*KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG*  
designare conos oppositos, angu-  
lis verticalibus *DPF*, *EPG*



infinîtè parvis descriptos, & lineas etiâ *DH*, *EI* infinîtè par-  
vas esse; & conorum particulæ sphæroidum superficiebus abscissæ  
*DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, (2)  
erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum à corpus-  
culo

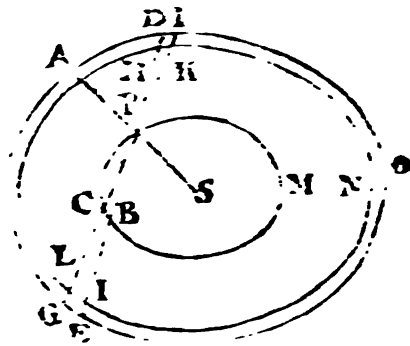
(1) *Proptèrea quod rectæ DE, PB;*  
*&c.* Cum enim tres ellipses *AGO*,  
*HLN*, *PCM* similes sint, idemque cen-  
trum & axes communes ac proinde com-  
munes etiam diametros homologas habeant,  
patet lineas *DE*, *HI*, *PB* esse in tribus  
illis ellipsis ad communem diametrum  
ordinatas, idemque dicendum esse de tri-  
bus lineis *FG*, *KL*, *PC*. Nam si per  
punctum *A*, in ellipsi *AGO* homologum  
puncto *P* in ellipsi *PCM* ducta intelliga-  
tur recta ipsi *PB*, seu *DE* parallela, hæc  
linea ordinata erit ad eandem ellipses

*AGO* diametrum ad quam in ellipsi *PCM*  
ordinata est linea *PB*, atque adeò rectæ  
*DE*, *PB* sunt ad eandem diametrum or-  
dinatæ, idemque eodem modo de ca-  
teris lineis ostendi potest. Quare ab il-  
la communi diametro rectæ *DE*, *PB*,  
& *HI*, bifecantur in eodem puncto, ut  
& rectæ *FG*, *BC*, & *KL* à sua commu-  
ni diametro.

(2) \* *Erunt ad invicem &c.* Si ex pun-  
ctis *D* & *E* in lineam *FG* demissa in-  
telligantur perpendiculara infinîtè parva *p*  
& *p*, hæc, ob angulos *DPF*, *EPG*,  
æqua-

DE ME-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCI.  
PROBL.  
XLV.

culi  $P$ , & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia  $DPF$ ,  $EGCB$  in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus



$P$  in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires conici  $DPF$  & segmenti conici  $EGCB$ , & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra sphæroidem intimam  $PCBM$ . Trahitur igitur corpus  $P$  à sola sphæroide intimâ  $PCBM$ , & propterea (per corol. 3. prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, quâ corpus  $A$  trahitur à sphæroide totâ  $AGOD$ , ut distantia  $PS$  ad distantiam  $AS$ . *Q. E. D.*

### PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

*Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.*

E corpore dato formanda est sphaera vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) (a) inveniri potest. Dein facili experimentis invenienda est vis attractionis in diversis

æquales, erunt ut distantie  $DP$ ,  $EP$ , Sed quoniam evanescentibus angulis  $DPF$ ,  $EPG$ , lineæ  $DH$ ,  $FK$  &  $GL$ ,  $EI$ , sunt parallelæ, erit superficies  $DHKF$ , ad superficiem  $GLIE$ , ut rectangulum  $p \times \frac{DH+FK}{2}$ , ad rectangulum  $p \times \frac{GL+EI}{2}$ , hoc est, (ob  $DH+FK=LG+EI$ ) ut  $p$  ad  $P$ , seu ut  $DP$  ad  $EP$ . Quare si  $DPF$ ,  $EPG$  conos vel pyramides in sphæroide  $AGOD$  designent, solida  $DHKF$ ,  $GLIE$  erunt ut superficies prædictæ in perpendicularibus  $p$ ,  $P$ , similia ductæ, hoc

est, ut quadrata distantiarum  $DP$ ,  $EP$ . Quoniam igitur vis quâ particula solida  $DHKF$  trahit corpusculum  $P$  est ad vim quâ illud trahitur à particula solida  $GLIE$ , ut solidum  $\frac{DHKF}{DP^2}$ , ad solidum  $\frac{GLIE}{EP^2}$ , hoc est, ut  $\frac{DP^2}{DP^2}$ , ad  $\frac{EP^2}{EP^2}$ , manifestum est corpusculum  $P$  utrinque æqualiter trahi.

(a) *Inveniri potest.* Hoc est per propositiones citatas inveniri potest generalis expressio seu formula attractionis corpusculi

## 521

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCII.  
PROB.  
XLVI.

PRO-

ut  $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{x dx}{y^{n-1}} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{y dy}{y^{n-1}} =$   
 $\frac{x^{2-n} dx - y^{2-n} dy}{x^{1-n} y} = \frac{Q \text{ const.}}{x^{1-n} y}$ ; hæc autem eva-

$$= e, \text{ \& } y = e. \text{ Jam verò vis quâ corpusculum } P \text{ in totum cylindrum } ADEKG \text{ trahitur, experimentis inventa fit ut } b - a + c = e, \text{ \& habebitur æquatio } b - a + c = e$$

$$b : a :: a : a + c :: a - e : a$$

$e^z = r$ , & erit (  $L$  significante Logarithmum  
quantitatis cui præfigitur )  $L. a^z = L. p$ ,  
 $L. b^z = L. v$ ,  $L. c^z = L. r$ ,  $L. e^z = L. s$ , adeo-  
que  $z L. a = L. p$ , &  $z = \frac{L. p}{L. a} = \frac{L. v}{L. b} = \frac{L. r}{L. c}$   
 $= \frac{L. s}{L. e}$ . Unde  $\frac{L. a \times L. v}{L. b} = L. p$ , aique

&  $v \frac{L. e}{L. a} = s$ . Quare æquatio erit  $\frac{q. L. v}{L. b}$

$= v - v \overline{L.b} + v \overline{L.b} - v \overline{L.b}$ , quæ ab  
 exponente indeterminata libera est. Ut au-  
 tem tollatur etiam  $L.v$ , ponatur  $v = 1 + \frac{1}{2}t$ ,  
 & (383) erit  $L.v = L.1 + \frac{1}{2}L.t = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{5}t^4 - \&c.$  in infinit. Si ita-  
 que in æquatione modo inventa loco  $v$  scri-  
 batur  $1 + \frac{1}{2}t$ , & loco  $L.v$  series  $1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{5}t^4 - \&c.$  cūñebitur æquatio ab expo-  
 nentibus & logarithmicis indeterminatis li-  
 bera, ex quâ per reversionem serierum in-  
 venietur valor quantitatis  $t$ , & inde repe-  
 rietur  $L.v$ , atque per  $L.v$  habebitur va-  
 lor



# PRINCIPIA MATHEMATICA. 515

sphæroidis centrum S & semidiameter maxima SC: & vis, quâ DE Mo-  
sphæ-  
TU COR-  
PORUM.

lorem quantitatis  $\frac{s^2 + s'^2 - PO^2}{s^2}$  deter-  
minabimus, quam esse æqualem quantitati  
 $\frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ , ita ex valoribus su-

pra inventis statuitur; Est  $s = \frac{bb s^2}{c^2 - b^2}$  ex  
tertiâ Equatione, unde erit  $s^2 + s'^2 =$   
 $\frac{b^2 s^2 + s'^2 - b^2 s'^2}{c^2 - b^2} = \frac{c^2 s^2}{c^2 - b^2}$ , ideoque

$\frac{s^2 + s'^2}{s^2} = \frac{c^2}{c^2 - b^2} = \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2}$ . Est  
verò AO = s - p, & PO = PA + AO  
= a + s - p, & cum sit s - p =  $\frac{b}{c} \times$   
 $\frac{ba + cc}{b}$  (ex secundâ Equatione) est PO

= a +  $\frac{cc - bb}{cc - bb} \times \frac{ba + cc}{b}$ , quo valore  
reducto ad communem denominatorem,  
deletisque terminis sese destruentibus est

PO =  $\frac{cc}{c^2 - b^2} \times a + b$  five =  $\frac{CS^2}{CS^2 - AS^2}$

× PS, cumque sit  $s^2 = \frac{CS^2 - AS^2}{CS^2}$

×  $\frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$  est  $s^2 = \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$

&  $\frac{PO^2}{s^2} = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$

Unde tandem est  $\frac{s^2 + s'^2 - PO^2}{s^2} = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2}$

$\frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$ , five

$\frac{CS^2 - AS^2}{CS^2} \times \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$

reducendoque ad eundem denominato-  
rem, deletisque terminis sese destruentibus

=  $\frac{CS^2 - AS^2}{CS^2} \times \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$

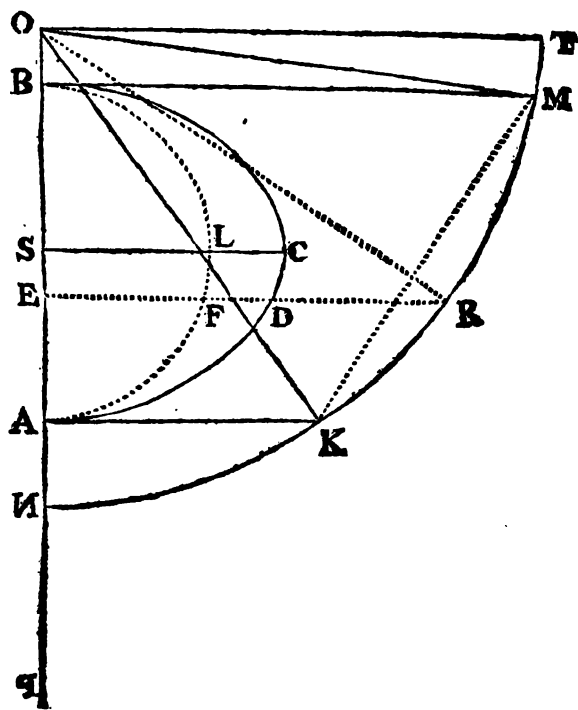
diviso numeratore &  
denominatore per  $CS^2 - AS^2$ . Est ergo

$\frac{s^2 + s'^2 - PO^2}{s^2} = \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$

Q. E. D.

344. Sit autem curva data ACB cir-  
culus, ita ut sphæroidis ejus convolutione  
genita, sit accurata sphæra, erit curva

NKRM Parabola, stantibus enim quæ in  
no. 342. dicta sunt, erit ut prius PE = a + x, LIBER  
& ex naturâ Circuli EP² = 2bx - xx, unde PRIMUS.  
erit PF² quadratum = PE² + EF² = PROP.  
a² + 2ax + xx + 2bx - xx = a² + 2ax + 2bx, XCI.  
cum ergo ordinata ER ad curvam NKRM PROBL.  
XLV.

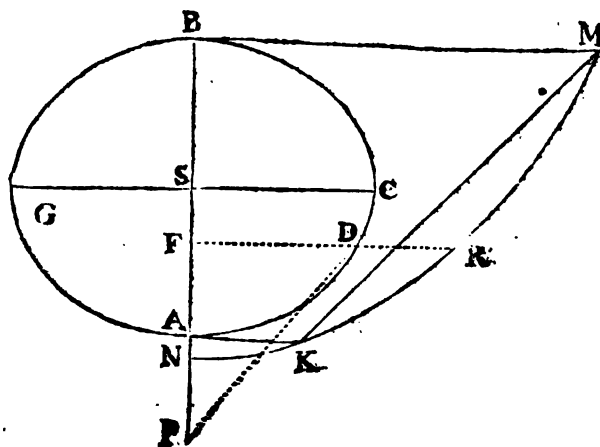


sumatur æqualis PF, ejus ordinatæ qua-  
dratum erit æquale abscissæ ipsi per quan-  
titates constantes ductæ, sed ultra primum  
gradum non assurgenti, quæ est Parabolæ  
proprietas. Dicatur ergo ejus Parabolæ  
latus rectum l, distantia verticis N à ver-  
tice A curvæ ACB dicatur p, abscissâ NE  
erit p + x & ex Parabolæ natura erit or-  
dinatæ ER quadratum = lp + lx confe-  
ratur hic valor cum valore ejusdem ER a  
supra invento 2a + 2ax + 2bx, termini  
constantes cum constantibus & qui varia-  
bilem includunt cum similibus, fient duæ  
Equationes lp = a², & l = 2a + 2b = 2PS,  
T t t 2 ideo-



DE MO-SPHÆROIS (†) trahit corpus  $P$ , erit ad vim, quā sphæra diametro  $AB$  TU COR-  
PORUM. descripta trahit idem corpus, ut  $\frac{AS \times CS q - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ .

LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCI.  
PROBL.  
XLV.



ad  $\frac{AS \text{ cub.}}{3 PS \text{ quad.}}$ . Et eodem computandi fundamento invenire  
licet vires segmentorum sphæroidis.

ideoque  $p = \frac{a^2}{2a+2b} = \frac{PA^2}{2PS}$ ; & cum ex  
natura Parabolæ, sit  $ER^2 = l \times p + x$  erit  
 $2+x = NE = \frac{ER^2}{2PS}$ ; Cumque area Pa-  
rabolica inter abscissam, ordinatam, & cur-  
vam intercepta sit æqualis duobus tertiis  
Rectanguli abscissæ per ordinatam, erit area  
Parabolica  $NER = \frac{2}{3} \frac{ER^2}{PS} = \frac{ER^2}{3PS}$ , &  
quoniam, ex constructione, ordinatæ in A  
& B erectæ sunt æquales PA & PB, erit  
area Parabolica  $PAK = \frac{PA^3}{3PS}$  & area Pa-

rabolica  $PBM = \frac{PB^3}{3PS} = \frac{PA+2AS}{3PS}$  &  
differentia harum arearum  $AKRMB$   
respondens axi Sphære  $AB$ , erit  
 $\frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$  &

denique dempto trapezio  $AKMB$ , seg-  
mentum Parabolicum residuum  $KRM$  erit

æquale  $\frac{2BS^3}{3PS}$ , trapezium enim  $AKMB$

est æquale  $\frac{1}{2} AB \times AK + BM$  five (quia  
 $\frac{1}{2} AB = AS$ ,  $AK = PA$  &  $BM = PB =$   
 $PA + 2AS$ ) est æquale  $\frac{1}{2} AS \times PA +$   
 $\frac{1}{2} AS^2$ , & reducendo ad denominatorem  
 $\frac{3PS}{3PS}$  five  $\frac{3PA^2 + 3AS \times PA + 3AS^2}{3PS}$  est æquale  
 $\frac{6AS \times PA^2 + 12AS^2 \times PA + 6AS^3}{3PS}$

huic deductum ex area  $AKRMB =$   
 $\frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$

remanet  $\frac{2AS^3}{3PS}$ . Q. E. D.

(†) 545. Vis quā sphærois trahit corpus  $P$   
est ad vim quā sphæra Diametro  $AB$  descripta  
trahit idem corpus ut  $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 \times CS^2 - AS^2}$

ad  $\frac{AS^3}{3PS^2}$

Supponatur juxta solutionem hujusce Pro-  
blematis, curvam describi secundum  $AP$ , cu-  
jus

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 517

ius ordinatæ singulo puncto E applicatæ sint æquales vi quâ corpus P à circulo cuius radius est E D trahitur; ea vis est per Cor. 1. Prop. xc. ut  $z = \frac{PE}{PD}$ , sit C E.

hujus curvæ abscissa sumpta à puncto O (centro curvæ N K R M juxta notam 543. determinatæ) dicaturque  $z$ , ejus fluxio erit  $dz$ , fluxio itaque areæ curvæ quæ exhibet vim sphaeroidis erit  $dz = \frac{PE}{PD} dz$ , cumque sit  $PE = PO - OE = PO - z$  &  $PD = ER$  ordinatæ curvæ N K R M, per constructionem, sitque E R (ut facile deducitur ex n°. 543)  $= \frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}$ , fluxio

$$\text{ejus areæ erit } dz = \frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}} + \frac{z dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$$

$$\text{Terminorum positivorum } dz + \frac{z dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$$

$$\text{fluens est } z = \frac{s}{1} \sqrt{ss - zz} \text{ (165) sed ut } z$$

$$= OE \& \frac{s}{1} \sqrt{ss - zz} = \frac{ss}{11} \times \frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}$$

$$= \frac{ss}{11} ER \text{ fluxio terminis positivis respondens}$$

$$\text{est } OE = \frac{ss}{11} ER, \& \text{ area toti lineæ OA respondens est } OA = \frac{s^2}{11} AK, \text{ ex qua demenda}$$

$$\text{area parti OB respondens secundum quam curva quæ vim sphaeroidis exprimit non ducitur quæque est } OB = \frac{s^2}{11} BM, \text{ utque per}$$

$$\text{constructionem } AK = AP, \& BM = PB = BA + AP \text{ erit vera fluens } OA = OB =$$

$$\frac{s^2}{11} \times AB - BA - AP = AB + \frac{s^2}{11} AB$$

$$= AB \times \frac{s^2 + 11}{11}$$

$$\text{Tertii termini } \frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}} \text{ fluens sic inve-$$

$$\text{nitur, Sectoris Elliptici TOK fluxio est (144)}$$

$$\frac{1}{2} s^2 dz \text{ multiplicata per } \frac{2 PO}{s^2} \text{ nascetur}$$

$$\text{fluxio } \frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$$

$$\text{terminus propositus } \frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}} \text{ unde fluens}$$

terminus propositus  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  unde fluens

termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per  $\frac{2 PO}{s^2}$  multiplicatus, sed

quoniam area quaesita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quaesitæ ex tertio termino inveniendo est sector TOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  demp-

terminus propositus  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  unde fluens

termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per  $\frac{2 PO}{s^2}$  multiplicatus, sed

quoniam area quaesita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quaesitæ ex tertio termino inveniendo est sector TOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  demp-

terminus propositus  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  unde fluens

termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per  $\frac{2 PO}{s^2}$  multiplicatus, sed

quoniam area quaesita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quaesitæ ex tertio termino inveniendo est sector TOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  demp-

terminus propositus  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  unde fluens

termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per  $\frac{2 PO}{s^2}$  multiplicatus, sed

quoniam area quaesita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quaesitæ ex tertio termino inveniendo est sector TOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  demp-

terminus propositus  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  unde fluens

termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per  $\frac{2 PO}{s^2}$  multiplicatus, sed

quoniam area quaesita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quaesitæ ex tertio termino inveniendo est sector TOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  demp-

terminus propositus  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  unde fluens

termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per  $\frac{2 PO}{s^2}$  multiplicatus, sed

quoniam area quaesita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quaesitæ ex tertio termino inveniendo est sector TOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  demp-

terminus propositus  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  unde fluens

termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per  $\frac{2 PO}{s^2}$  multiplicatus, sed

quoniam area quaesita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quaesitæ ex tertio termino inveniendo est sector TOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  demp-

terminus propositus  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  unde fluens

termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per  $\frac{2 PO}{s^2}$  multiplicatus, sed

quoniam area quaesita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quaesitæ ex tertio termino inveniendo est sector TOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  demp-

terminus propositus  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  unde fluens

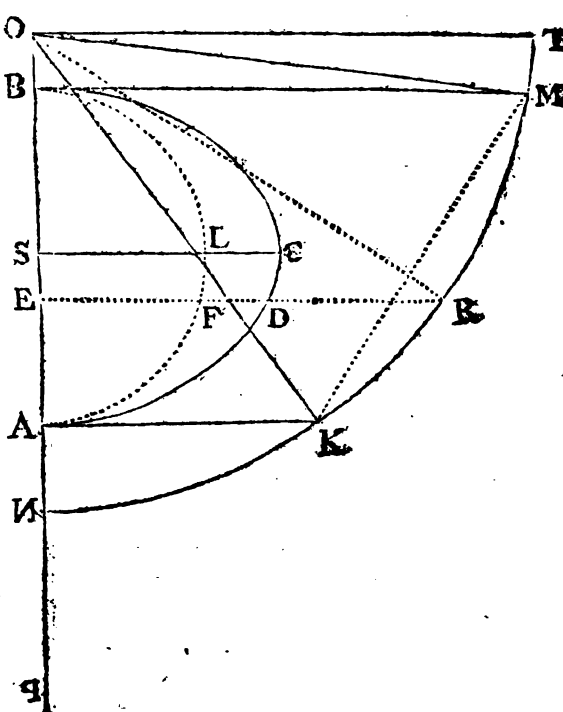
termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per  $\frac{2 PO}{s^2}$  multiplicatus, sed

quoniam area quaesita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quaesitæ ex tertio termino inveniendo est sector TOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  demp-

terminus propositus  $\frac{PO dz}{\frac{1}{s} \sqrt{ss - zz}}$  unde fluens

termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per  $\frac{2 PO}{s^2}$  multiplicatus, sed

DE MO  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCI.  
PROBL.  
XLV.



to sectore TOM  $\times \frac{2 PO}{s^2}$  five sector

MOK  $\times \frac{2 PO}{s^2}$ ; Dividitur autem sector

MOK in figuram rectilineam MOK &

mixtilineam MRK; Triangulum MOK

valet  $\frac{1}{2} PO \times AB$ , nam producat recta

MK pertinet ad P, propter PA = AK

& PB = BM, totum verò Triangulum

OMP =  $\frac{1}{2} OP \times BM = \frac{1}{2} OP \times PB$ , &

Triangulum OKP =  $\frac{1}{2} OP \times AK = \frac{1}{2} OP$

$\times AP$ , unde sublato Triang. OKP ex

Triang. OMP, remanet Triang. OMK

Triang. OMP, remanet Triang. OMK

DE MO- =  $\frac{1}{2} OP \times PB - AP = \frac{1}{2} OP \times AB$ . Un-  
TU COR- de tandem fluens quaesita hujus tertii ter-  
PORUM. mini est  $\frac{2PO}{s^2} \times \frac{1}{2} OP \times AB + \frac{2PO}{s^2} \times$

LIBER PRIMUS.  $MRK = \frac{PO^2}{s^2} \times AB + \frac{2PO}{s^2} \times MRK$ ,  
PROP.

XCI. quæ detracta ex fluente terminorum positivo-  
PROBL. rum  $AB \times \frac{s^2 + s^2}{s^2}$  fit  $AB \times \frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2}$

XLV.  $-\frac{2PO}{s^2} \times MRK$ , cum ergo fit  $\frac{s^2 + s^2 - PO^2}{s^2}$   
 $= \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2} \& \frac{PO}{s^2} = \frac{PS}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$   
(543) est fluens quaesita (quia  $AB = 2AS$ )  
 $2AS \times CS^2 - 2PS \times MRK$ .  
 $\frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ .

Si autem curva  $ACB$  sit circulus,  
sphærois in sphæram veram mutatur, fit  
 $CS = AS$  & segmentum  $MRK$  fit  $\frac{2AS^2}{3PS}$   
(544) ideoque mutatur hæc formula in  
istam  $2AS \times AS^2 = \frac{2PS \times 2AS^2}{3PS}$

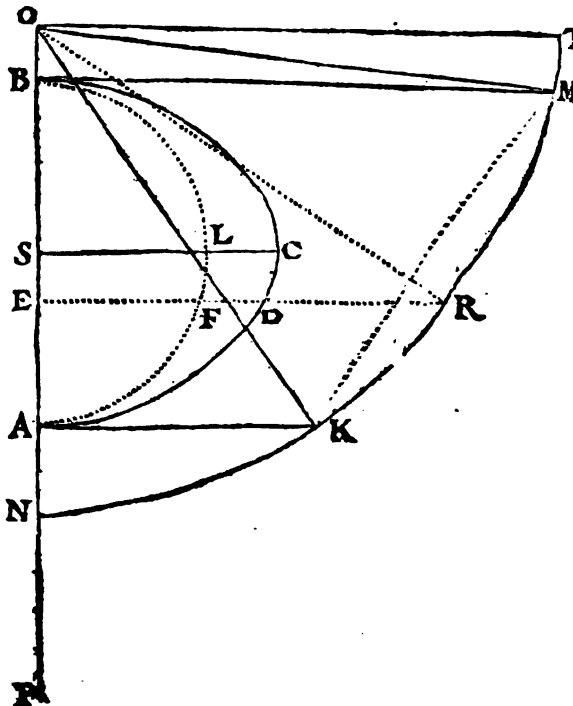
$\frac{PS^2 - AS^2 + AS^2}{PS^2 - AS^2 + AS^2}$   
 $= \frac{2AS^2 - \frac{4}{3}AS^2}{PS^2} = \frac{2AS^2}{3PS^2}$  quæ expri-

met vim sphære; itaque divisa expressio-  
ne vis sphæroidis & vis sphære per com-  
munem multiplicatorem 2; Erit vis sphæ-  
roidis ad vim sphære ut  $\frac{AS \times CS^2 - PS \times MRK}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$

ad  $\frac{AS}{3PS^2}$ . Q. E. D.

Rotest etiam determinari vis sphære,  
hoc calculo, fit ut prius  $PA = a$ ,  $AB = 2b$ , abscissa  $AE = x$ ,  $PF = v$ , erit  $PE^2 = a^2 + 2ax + xx$ , &  $EF^2 = 2bx - xx$  (ex naturâ circuli) ideoque  $PF^2 (vv) = a^2 + 2ax + 2bx$ , unde invenitur  $x = \frac{vv - a^2}{2a + b}$  &  $dx = \frac{2v dv}{2a + b} = \frac{v dv}{a + \frac{1}{2}b}$  &  $PE = \frac{a^2 + 2ab + vv}{2a + b}$  &  $\frac{dx}{PF} = \frac{dv}{a + \frac{1}{2}b}$   
 $= a + x = \frac{a^2 + 2ab + vv}{2a + b}$  &  $\frac{dx}{PF} = \frac{dv}{a + \frac{1}{2}b}$

Itaque, cum fluxio areæ quæ exprimit vim  
sphære sit per Cor. 1. Prop. xc. ut  $dx = \frac{PE dx}{PF}$ , erit ea fluxio ut  $dx = \frac{a^2 + 2ab + vv}{2a + b^2} dv$   
cujus fluens est  $x = \frac{a^2 v + 2abv + \frac{1}{3}v^3}{2a + b^2}$   
+ Q const., quæ evanescere debet ubi  $x = 0$



&  $v = a$  ideoque est  $\frac{a^2 + 2a^2b + \frac{1}{3}a^3}{2 \times a + b^2}$

+ Q = 0, &  $Q = \frac{\frac{4}{3}a^2 + 2a^2b}{2 \times a + b^2}$  : Vis au-

tem totius Sphære obtinetur si fiat  $x = AB$   
(2b) &  $v = PB (a + 2b)$ , estque ideo  $2b + \frac{4}{3}a^2 + 2a^2b - a - 4ab^2 - 4ab^2 - \frac{1}{3}a^2 - 2a^2b - 4ab^2 - \frac{8}{3}b^3$

$\frac{2 \times a + b^2}{4a^2b + 8ab^2 + \frac{8}{3}b^3} = 2b - \frac{2b \times x}{2 \times a + b^2}$

$\frac{2a^2 + 4ab + \frac{4}{3}b^2}{2 \times a + b^2}$ , & reducen-

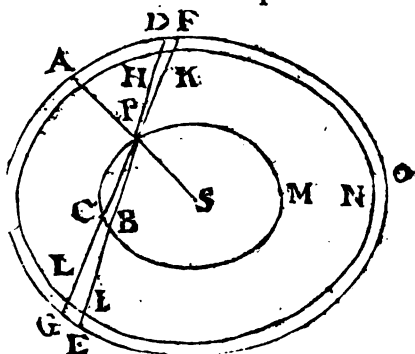
do ad eundem denominatorem =  $2b \times \frac{2a^2 + 4ab + 2b^2 - 2a^2 - 4ab - \frac{4}{3}b^2}{2 \times a + b^2}$

$\frac{2 \times a + b^2}{\frac{2}{3}b^2}$

=  $2b \times \frac{\frac{2}{3}b^2}{2 \times a + b^2}$  five ponendo  $AS$  pro  $b$ ,  
&  $PS$  pro  $a + \frac{1}{2}b$  dividendoque numerato-

rem & denominatorem per 2, vis tota  
Sphære est  $\frac{2AS^2}{3PS^2}$ . Q. E. I.

*Corol.* 3. Quod si corpusculum intra sphæroidem in axe collocetur, attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius hoc argumento colligitur, siue particula in axe sit, siue in aliâ quâvis diametro datâ. Sit *AGO* sphæroidis attrahens, *S* centrum ejus, & *P* corpus attractum. Per corpus illud *P* agantur tum semidiameter *SPA*, tum rectæ duæ quævis *DE*, *FG* sphæroidi hinc inde occurrentes in *D* & *E*, *F* & *G*; sintque *PCM*, *HLN* superficies sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per corpus *P*, & secet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, posterior secet easdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* sibi mutuò æquales; (1) propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* bifecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* designare conos oppositos, angulis verticalibus *DPF*, *EPG*



infinîtè parvis descriptos, & lineas etiâ *DH*, *EI* infinîtè parvas esse; & conorum particulæ sphæroidum superficiebus abscissæ *DHKE*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, (2) erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum à corpusculo

(1) *Propterea quod rectæ DE, PB, HI, PC, KL, FG, PC, KL, FG* bifecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Nam si per punctum *A*, in ellipsi *AGO* ducta intelligatur recta ipsi *PB*, seu *DE* parallela, hæc linea ordinata erit ad eandem ellipsem

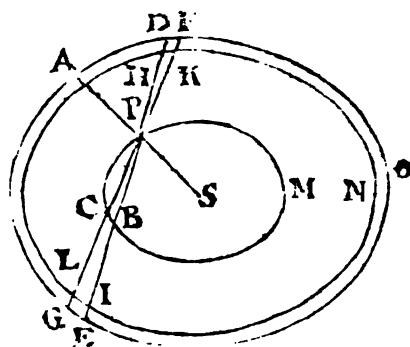
*AGO* diametrum ad quam in ellipsi *PCM* ordinata est linea *PB*, atque adeò rectæ *DE*, *PB* sunt ad eandem diametrum ordinatæ, idemque eodem modo de cæteris lineis ostendi potest. Quare ab illâ communi diametro rectæ *DE*, *PB*, & *HI*, bifecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC*, & *KL* à suâ communi diametro.

(2) \* *Erunt ad invicem &c.* Si ex punctis *D* & *E* in lineam *FG* demissa intelligantur perpendiculara infinîtè parva *DP* & *EP*, hæc, ob angulos *DPF*, *EPG*, æqua-

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCI.  
PROBL.  
XLV.

# 520 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo-culo P, & propterea corpusculum  
TU COR-illud æqualiter trahent. Et pari  
PORUM. ratione, si superficiebus sphæroi-  
LIBER dum innumerarum similium con-  
PRIMUS. centricarum & axem communem  
PROP. habentium dividantur spatia  $DPF$ ,  
XCI.  $EGCB$  in particulas, hæ omnes  
PROBL. utrinque æqualiter trahent corpus  
XLV.



$P$  in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires conii  $DPF$  & segmenti conici  $EGCB$ , & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra sphæroidem intimam  $PCBM$ . Trahitur igitur corpus  $P$  à sola sphæroide intimâ  $PCBM$ , & propterea (per corol. 3. prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, quâ corpus  $A$  trahitur à sphæroide totâ  $AGOD$ , ut distantia  $PS$  ad distantiam  $AS$ . Q. E. D.

## PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

*Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.*

E corpore dato formanda est sphaera vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) (a) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis

æquales, erunt ut distantia  $DP$ ,  $EP$ , Sed quoniam evanescentibus angulis  $DPF$ ,  $EPG$ , lineæ  $DH$ ,  $FK$  &  $GL$ ,  $EI$ , sunt parallelæ, erit superficies  $DHKF$ , ad superficiem  $GLIE$ , ut rectangulum  $p \times DH + FK$ , ad rectangulum  $p \times GL + EI$ , hoc est, (ob  $DH + FK = LG + EI$ ) ut  $p$  ad  $P$ , seu ut  $DP$  ad  $EP$ . Quare si  $DPF$ ,  $EPG$  conos vel pyramides in sphæroide  $AGO$  designent, solida  $DHKF$ ,  $GLIE$  erunt ut superficies prædictæ in perpendicularibus  $p$ ,  $P$ , similia ductæ, hoc

est, ut quadrata distantiarum  $DP$ ,  $EP$ . Quoniam igitur vis quâ particula solida  $DHKF$  trahit corpusculum  $P$  est ad vim quâ illud trahitur à particula solida  $GLIE$ , ut solidum  $\frac{DHKF}{DP^2}$ , ad solidum  $\frac{GLIE}{EP^2}$ , hoc est, ut  $\frac{DP^2}{EP^2}$ , manifestum est corpusculum  $P$  utrinque æqualiter trahi.

(a) *Inveniri potest.* Hoc est per propositiones citatas inveniri potest generalis expressio seu formula attractionis corpusculi

## 521

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCII.  
PROB.  
XLVI.

PRO-

$e^z = r$ , & erit (  $L$  significante Logarithmum  
quantitatis cui præfigitur )  $L. a^z = L. p$ ,  
 $L. b^z = L. v$ ,  $L. c^z = L. r$ ,  $L. e^z = L. s$ , adeo-  
que  $z L. a = L. p$ , &  $z = \frac{L. p}{L. a} = \frac{L. v}{L. b} = \frac{L. r}{L. c}$

$$= \frac{L. r}{L. e}. \text{ Unde } \frac{L. a \times L. v}{L. b} = L. p, \text{ aique}$$

$$\text{adeo } L. v \frac{L. b}{L. a} = L. p, \text{ proindeque } v \frac{L. b}{L. a}$$

$\therefore p$ , & simili modo invenietur  $vL.b = r$ ,  
 $\frac{L.e}{L.a}$   
 &  $vL.t = s$ . Quare æquatio erit  $\frac{q.L.v}{L.b}$

=  $v - v.L.b + v.L.b - v.L.b$ , quæ ab  
exponente indeterminata libera est. Ut au-  
tem tollatur etiam  $L.v$ , ponatur  $v = s + \frac{1}{2}s$ ,  
& (383) erit  $L.v = L.s + \frac{1}{2}L.s = \frac{1}{2}s : +$   
 $\frac{1}{2}s : - \frac{1}{4}s : + \frac{1}{8}s : - &c.$  in infinit. Si ita-  
que in æquationis modo inventa loco  $v$  scri-  
batur  $s + \frac{1}{2}s$ , & loco  $L.v$  series  $-\frac{1}{2}s : +$   
 $+\frac{1}{2}s : - &c.$  obtinebitur æquatio ab expo-  
nentibus & logarithmis indeterminatis li-  
bera, ex qua per reversionem serierum in-  
venietur valor quantitatis  $s$ , & inde repe-  
rietur  $L.v$ , atque per  $L.v$  habebitur va-

V V V

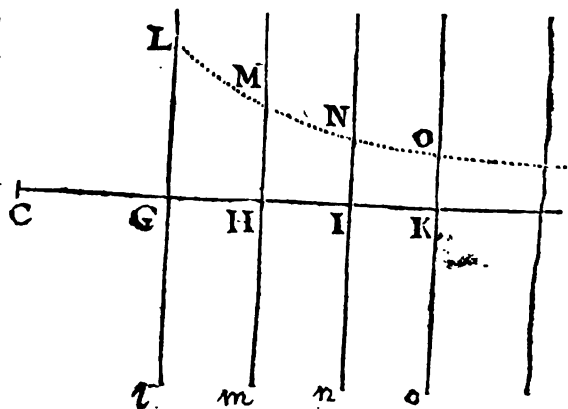
Tona. I.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCIII.  
THEOR.  
XLVII.

## PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVI

*Si solidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus in-  
tum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, q-  
rum vires in recessu à solido decrescunt in ratione potestatis  
jusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi solidi totius c-  
pusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur : d-  
quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie pl-  
nâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia co-  
pusculi à plano, & index ternario minor quam index potestatis  
distantiarum.*

*Cas. 1.* Sit  $LG$  planum quo solidum terminatur. Jace-  
solidum autem ex parte plani hujus versus  $I$ , inque plana innumeri  
 $m HM$ ,  $n IN$ ,  $o KO$ ,  
&c. ipsi  $GL$  parallela  
resolvatur. Et primo  
collocetur corpus attrac-  
tum  $C$  extra solidum.  
Agatur autem  $CGHI$   
planis illis innumeris  
perpendicularis, & de-  
crecant vires attracti-  
væ punctorum solidi in  
ratione potestatis distan-  
tiarum, cujus index fit numerus  $n$  ternario non minor. Ergo  
(per



lor indicis  $z$ , & inde valor ipsius  $n$ . Nam  
cum sit  $z = \frac{L \cdot v}{L \cdot a}$ , &  $L \cdot v = L \cdot t + 1$ , erit

$$z = \frac{L \cdot t + 1}{L \cdot a}, \text{ \& } n = 3 - z = 3 - \frac{L \cdot t + 1}{L \cdot a}.$$

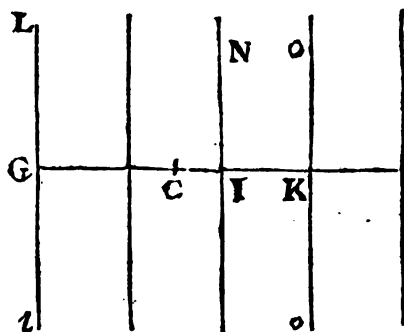
Si in æquatione vel quantitate exponen-  
tiali proposita, indeterminata  $z$  in solis

quantitatum datarum exponentibus reperire-  
tur, hæc æquatio vel quantitas superiori  
methodo posset ad aliam reduci numero  
terminorum finitam, in quâ nulla esset am-  
plius exponens vel logarithmus indetermi-  
nata. Nam si  $q = f a^z + g b^z + h c^z$   
+ &c., sitque  $v = a^z$  erit  $b = f v +$   
 $2 L$

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 523

(per corol. 3. prop. xc.) vis, quâ planum quodvis  $mHM$  tra- DE MO- hit punctum  $C$ , (b) est reciproce ut  $CH^n - 2$ . In plano  $mHM$  TU COR- capiatur longitudo  $HM$  ipsi  $CH^n - 2$  reciproce proportionalis, FORUM. & erit vis illa ut  $HM$ . Similiter in planis singulis  $IGL$ , LIBER.  $nIN$ ,  $oKO$ , &c. capiuntur longitudines  $GL$ ,  $IN$ ,  $KO$ , PRIMUS. &c. ipsis  $CG^{n-2}$ ,  $CI^{n-2}$ ,  $CK^{n-2}$ , &c. reciproce proportio- XCIII. nales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines cap- THEOR. tæ, ideoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, XLVII. vis solidi totius ut area  $GLOK$  in infinitum versus  $OK$  pro- ducta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciproce ut  $CG^n - 3$ , & propterea vis solidi totius est recipro- cè ut  $CG^n - 3$ . Q. E. D.

Def. 2. Collocetur jam cor- pusculum  $C$  ex parte plani  $IGL$  intra solidum, & capiatur distan- tia  $CK$  æqualis distantie  $CG$ . Et solidi pars  $LGloKO$ , planis parallelis  $IGL$ ,  $oKO$  termina- ta, corpusculum  $C$  in medio situm nullam in partem trahet, con- trariis oppositorum punctorum actionibus se mutuò per æquali- tatem tollentibus. Proinde corpusculum  $C$  solâ vi solidi ultra pla- num



$$\begin{aligned} & \frac{2L.b}{g v L.a} + \frac{4L.c}{h v L.a} + \&c. \text{ erit enim } x = \\ & \frac{L.v}{L.a} \& b^2 = b^2 \frac{L.v}{L.a} \& Lb^2 = \frac{2L.v}{L.a} L.b \\ & = \frac{2L.b}{L.a} L.v, \text{ unde est } b^2 = \frac{L.b}{L.a} \\ & v L.a \& \text{ sic de cæteris.} \end{aligned}$$

(b) Est reciproce &c. Sit  $CH = x$ , erit  $MH$  ut  $\frac{1}{x^{n-2}}$ , (Hyp.) & areæ  $GLMH$ , elementum ut  $\frac{dx}{x^{n-2}}$ , adeoque (165) area

ipsa ut  $Q \text{ const. } \frac{1}{(n-3)x^{n-1}}$ , quæ evanescit  
ubi  $x = CG$ , Quare  $Q = \frac{1}{(n-3)CG^{n-1}}$   
& area  $GLMH$ , ut  $\frac{1}{(n-3)CG^{n-1}}$   
 $= \frac{1}{(n-3)CH^{n-1}}$ . At cùm  $CH$  infi-  
nita evadit, terminus  $\frac{1}{(n-3)GH^{n-1}}$   
evanescit sitque area infinita  $GLOK$ , ut  
 $\frac{1}{(n-3)CG^{n-1}}$ , seu ob datam  $n - 3$   
ut  $CG^{n-1}$ , reciproce.  
V. v. v.



DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP. cē ut  $CG^n - 3$ . Q. E. D.

XCIII. Corol. 1. Hinc si solidum  
THEOR.  $LGIN$  planis duobus infinitis pa-  
XLVII. rallelis  $LG$ ,  $IN$  utrinque termi-  
netur; (c) innotescit ejus vis attra-  
ctiva, subducendo de vi attra-  
ctivâ solidi totius infiniti  $L G K O$  vim attractivam partis ulterio-  
ris  $NIKO$ , in infinitum versus  $KO$  productæ.

Corol. 2. Si solidi hujus infiniti pars ulterior, quando at-  
tractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pe-  
ne est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris au-  
gendo distantiam (d) decrescet quàm proximè in ratione po-  
testatas  $CG^n - 3$ .

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex unâ par-  
te planum trahat corpusculum è regione medii illius plani, &  
distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus  
corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attra-  
hens ex particulis homogeneis, quatum vires attractivæ decref-  
cunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distan-  
tiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quàmproximè in

12-

(c) \* Innotescit ejus vis &c. Ex demon-  
stratis attractio solidi totius  $L G K O$ , in  
infinitum versus  $O$  producti, est ut  $\frac{1}{CG^{n-3}}$ .

Solidi verò infiniti  $NIKO$ , ut  $\frac{1}{CI^{n-3}}$ .  
Quare attractio solidi  $LGIN$ , est ut

$$\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}.$$

(d) \* Decrescet quàm proximè &c. Vis  
enim attractiva, si corpus infinitum sit, est  
ut  $\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}$ ; sed si perexi-  
gua sit distantia  $CQ$  respectu  $CI$ , ter-

minus  $\frac{1}{CI^{n-3}}$ , minimus erit respectu

termini  $\frac{1}{CG^{n-3}}$  & negligi poterit, ideo-

que attractio erit quàm proximè ut  $CG^{n-3}$ ;  
reciprocè. Quod tamen verum esse non  
potest, si fuerit  $n = 3$ ; Nam in hoc casu

$$\frac{1}{CH^{n-2}} = \frac{1}{CH},$$

ideoque  $MH$  erit ut  $\frac{1}{CH}$   
& rectangulum  $MH \times CH$  datum, proin-  
deque curva  $LMO$  hyperbola, cujus as-  
ymptotus  $CK$ , & area illius finita  $LMNIG$ .  
vim exponis solidi  $LGIN$ ; area verò in-  
finita  $NIKO$ , vim solidi infiniti  $NIKO$ .

ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, & index ternario minor quam index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet; propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in corollario secundo, semper est infinitè major quam attractio partis ceterioris.

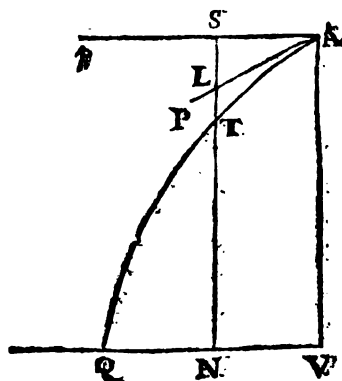
DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS.  
PROP. XCIII.  
THEOR. XLVII.

*Scholium.*

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, & ex datâ lege attractionis quæratuſ motus corporis: solvetur problema quærendo (per prop. xxxix.) motum corporis rectâ descendentis ad hoc planum, & (per legem corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, (a) secundum lineas eidem plano parallelas factò. Et contra, si quæratuſ lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractum in datâ quâcunque curvâ lineâ

mo-

(a) 546. Secundum lineas eidem plano parallelas &c. Corpus A quod ad planum VQ perpendiculariter & secundum lineas lineæ AV parallelas trahitur, exeat de loco A juxta directionem quamlibet AP. 1°. Si projectionis directio AP plano VQ parallela fuerit, dabitur tempus quo corpus, datâ velocitate uniformi projectionis, percurreret lineam AS, & per prop. 39. invenietur in lineâ SN lineæ AV parallela spatium ST quod corpus vi attractrice eodem tempore describit, & hinc habebitur punctum T in trajectoriâ ATQ, quam corpus utroque motu, impresso nimirum & ex vi attractrice genito describit. 2°. Si directio projectionis AP plano trahenti VQ parallela non est, ductâ AS plano VQ & SL rectæ AV parallelis, motus projectionis AL resolvatur in motus AS & SL, & datis velocitatibus uniformibus AS & SL, dabuntur tum tempus quo percurratur AS, tum spatium ST quod corpus hoc eodem tempore descri-



bit ex vi attractrice & motu impresso SL simul (per cor. 3. prop. 39.) unde habebitur punctum T trajectoriæ ATQ, cujus omnia puncta eodem modo possunt inveniri.

V. V. 3.

Exem-

DE MO-  
TU COR-  
moveatur, (b) solvetur problema operando ad exemplum pro-  
blematis tertii.

**PORUM.**

LIBER

## PRIMUS

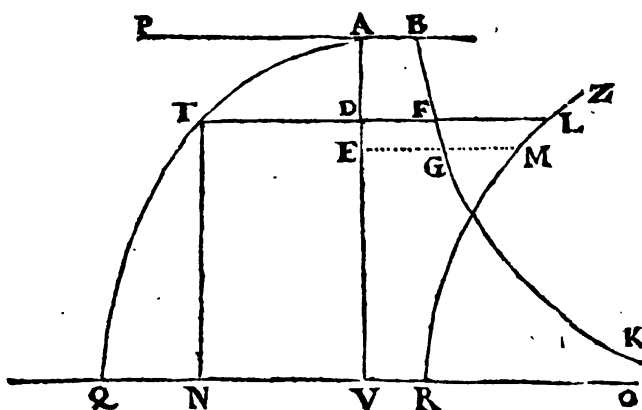
PROP.

**XCIII.**

**THEOR.**

XLVII.

Ope-



*Exemplum.* Exeat corpus de loco A secundum directionem A P plano trahenti V Q parallelam, & ducta D T eidem plano parallela, sit vis trahens in tota linea D T, ut D V cubus reciprocè. De loco D, erigatur semper D F perpendicularis ad A V & vi trahenti in linea D T proportionalis, sitque BFG linea curva quam punctum G perpetuò tangit. In DF capiatur D L lateri quadrato areæ ABFD reciprocè proportionalis, & punctum L sit semper in linea curvâ Z I. k, prorsus ut in prop. 39. Jam dicatur A V = a, D V = x, T D = y,

crit area A B F D ut  $\frac{44 - x x}{x x} (430) \&$

proindè D L, ut  $\frac{x}{\sqrt{aa-xx}}$  adeóque ele.

mentum DLME, ut  $\frac{x dx}{\sqrt{aa - xx}}$ , & area

V D L R, ut hujus elementi fluens  $\mathcal{Q} = \sqrt{aa - xx}$  (165. 166), evanescit autem area V D L R ubi  $x = o$ . Quare  $\mathcal{Q} = a$ , &

area  $V D L R$ , ut  $a - \sqrt{a a - x x}$ . Hinc  
posita  $x = a$ , erit area  $V A B Z R$ , ut  $a$ , &c

area D A B Z L, ut  $\sqrt{aa - xx}$ . Porro si punctum T est in trajectory A T Q erit D T seu y proportionalis tempori quò

uniformiter describitur D T, & quō motu  
accelerato percurritur A D seu ( *per prop.*

39.) erit  $y$ , ut  $\sqrt{aa - xx}$ , adeoque  $yy$  ut  $aa - xx$ . Unde patet trajectoriam  $ATQ$  esse ellipsim cujus centrum  $V$ , semiaxis unus  $VA$ , alter conjugatus  $VQ$ . Iisdem positis & vi ad planum  $VQ$  trahente in vim repellentem mutata corpus describet hyperbolam cujus centrum  $V$  semiaxis  $VA$  vertex  $A$ .

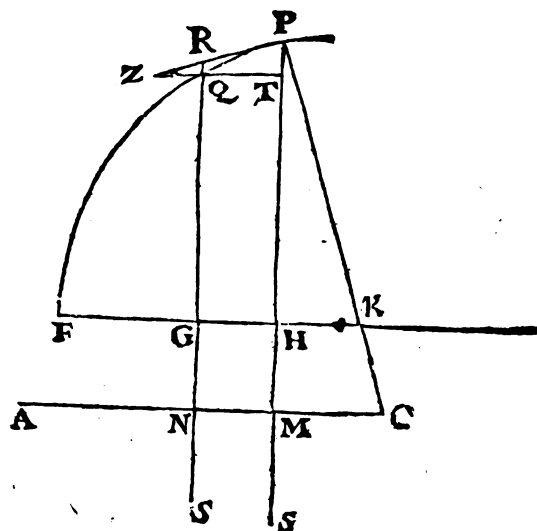
(b) 547. *Solvetur problema &c.* Moveatur corpus P in curvâ P Q F vi perpendiculariter tendente ad planum F K, sine P & Q puncta infinîtè propinqua, P Z tangens in P, P C radius circuli curvam P Q F osculantem in P; P H, Q G perpendicularia ex punctis P, Q in planum F K demissa, C A recta lineæ F K parallela & secans perpendicularia P H, Q G producta in M & N; productura G Q, ut tangenti P Z occurrat in R, & per Q agatur recta Z Q T. plano F K parallela, ac tangenti occurrens in Z rectæ verò P H in T. Jam ob similia triangula CPM, PZT & RZQ, est  $CP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$ , & ex narurâ circuli osculatoris  $PR^2 = QR \times RN + QN$  (per prop. 36. lib. 3. Elem.) five coeuntibus punctis P & Q,  $PR^2 = QR \times 2 PM$ .

**Er-**

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 527

Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim ap- DE Mo-  
plicatas in series convergentes. Ut si ad basem A in angu- TU Cor-  
lo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ sit ut ba- PORUM.

fis dignitas quælibet  $A^{\frac{m}{n}}$ ; & quærat vis quâ corpus, secun- LIBER  
dum positionem ordinatim applicatæ, vel in basem attractum PRIMUS.  
vel à basi fugatum, moveri possit in curvâ lineâ, quam ordina- PROP.  
tim applicata termino suo superiore semper attingit : Suppono XCIII.  
basem augeri parte quàm minimâ O, & ordinatim applicatam THEOR.  
A + XLVII.



Ergò  $CP^2, PM^2 = QR \times 2PM : QT^2$ ;  
ideòque  $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM}{CP^2}$ , consideretur  
vis centripeta ut tendens ad centrum S  
infinite distans, & erit SP quantitas con-  
stans, ac  $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM \times SP^2}{CP^2}$ . Est  
igitur (per cor. 1. & 5. prop. 6.) vis cen-  
tripeta reciprocè ut  $\frac{2PM \times SP^2}{CP^2}$ , hoc  
est, ob constantem quantitatem  $2SP^2$ ,

reciprocè ut  $\frac{PM}{CP^2}$ , seu in ratione com-  
positâ ex duplicatâ ratione radii oscula-  
toris CP directè & triplicatâ perpendiculari  
PM inversè. Porro datâ curvâ PQF in-  
venietur in singulis locis radius osculi CP  
(214) & punctum K ubi plano occurrit  
ac proinde invenietur PM, per propor-  
tionem: PK:PH=PC:PM, vel etiam  
per proportionem PR vel PQ:QT=PC:  
PM. Quare dabitur lex vis centripetæ.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCIII.

$A + O \mid^n$  resolvo  $(+)$  in seriem infinitam  $A \frac{m}{n} + \frac{m}{n} O A \frac{m-n}{n}$   
 $+ \frac{m m - m m}{2 n n} O O A \frac{m-2 n}{n} \&c.$  arque hujus termino in quo

THEOR.  $(+)$  548. Resolvo in seriem infinitam &c.  
 Ut hæc liqueant sequentia de dignitatum  
 & LVII. formulis sunt memoriz revocanda.

Lemma. Binomii  $a + b$ , dignitas  $a + b^n$   
 cujus index  $n$ , est  $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \times n - 1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^{n-4} b^4$   
 $+ \&c.$  Satis patet ex potentiæ forma-  
 tione. Si enim binomium  $a + b$ , ad  
 $2^{am}$ ,  $3^{am}$ ,  $4^{am}$ , &c. dignitates evehatur,  
 in singulis dignitatis cujusque terminis,  
 index litteræ  $a$  unitate perpetuo decre-  
 scit, dum contra index litteræ  $b$  unitate  
 crescit, & coefficientes seu unciz singulo-  
 rum terminorum progrediuntur ut numeri  
 $\frac{n}{1}$ ,  $\frac{n \times n - 1}{1 \times 2}$ ,  $\frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3}$ ,  
 $\frac{n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ , &c.

549. Cor. 1. Si ponatur  $a = P$ , &  $Q$   
 $-\frac{b}{a}$ , adeoque  $a^n = P^n$ ,  $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$ ,  $\frac{b^3}{a^3}$   
 $= Q^3$ ,  $\frac{b^4}{a^4} = Q^4$ , his valoribus in lem-  
 matis formulâ substitutis erit  $a + b^n = P^n$   
 $+ \frac{n}{1} P^n Q + \frac{n \times n - 1}{1 \times 2} P^n Q^2 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3$   
 $+ \&c.$  & si rursus ponatur  $P^n = A$ ;  
 $\frac{n}{1} P^n Q = B$ ;  $\frac{n \times n - 1}{1 \times 2} P^n Q^2 = C$ ;  
 $\frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3 = D$ , & ita por-  
 to, erit  $a + b^n = P + \frac{n}{1} Q = P + \frac{n}{1} A Q$   
 $= \frac{n-1}{1^2} B Q + \frac{n-2}{3} C Q + \frac{n-3}{4} D Q +$   
 $\&c.$

550. Cor. 2. Iisdem formulis uti pos-  
 sumus pro polynomio quovis ad datam

dignitatem evehendo, si pars una polyno-  
 mii litteræ  $a$  binomii ponatur æqualis,  
 cæteræ verò partes omnes supponantur æ-  
 quales litteræ  $b$ . Exempli causâ. Sit tri-  
 nomium  $d + e + f$  ad tertiam dignitatem  
 elevandum, pone  $n = 3$ ,  $d = a$ ,  $e + f = b$ ,  
 & formula  $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \times n - 1}{1 \times 2}$   
 $a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3$ ,  
 mutabitur in seriem  $d + 3 d^2 (e + f)$   
 $+ 3 d (e + f)^2 + (e + f)^3$ ; cum enim  
 perventum est ad coefficientem in quâ est  
 $n - 3$ , abruptitur series ob  $n - 3 = 0$ . Por-  
 ro per eandem formulam generalem  $(e + f)^2$   
 $= e^2 + 2 e f + f^2$ , &  $(e + f)^3 = e^3 + 3 e^2 f$   
 $+ 3 e f^2 + f^3$ . Quare tandem  $(d + e + f)^3$   
 $= d^3 + 3 d^2 e + 3 d^2 f + 3 d e^2 + 3 d e f$   
 $+ 3 d f f + e^3 + 3 e^2 f + 3 e f^2 + f^3$ .

Ita etiam formulam pro dignitate infi-  
 nitononii possumus obtinere, sit enim se-  
 ries  $A + B Z + C Z^2 + D Z^3 + E Z^4 \&c.$   
 ad dignitatem  $p$  evehenda sub ducto cal-  
 culo invenietur.

$$A^p + p A^{p-1} B Z + \frac{p \times p - 1}{1 \times 2} A^{p-2} B^2 Z^2 + \frac{p \times p - 1 \times p - 2}{1 \times 2 \times 3} A^{p-3} B^3 Z^3 + \frac{p \times p - 1 \times p - 2 \times p - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} A^{p-4} B^4 Z^4 + \&c.$$

551. Cor. 3. Si ex binomio  $a + b$ , ex-  
 trahenda sit radix cujus index  $\frac{m}{p}$ , loco  $n$ ,

in formulâ generali scribatur  $\frac{m}{p}$ , & erit  
 $\frac{m}{a + b} \frac{m}{p} = a \frac{m}{p} + \frac{m}{p} a \frac{m-p}{p} b + \frac{m \times m - p}{1 \times 2 \times p^2} a \frac{m-2 p}{p} b^2 + \frac{m \times m - p \times m - 2 p}{1 \times 2 \times 3 p^3} a \frac{m-3 p}{p} b^3 + \frac{m \times m - p \times m - 2 p \times m - 3 p}{1 \times 2 \times 3 \times 4 p^4} a \frac{m-4 p}{p} b^4 + \&c.$  vel etiam erit  $\frac{m}{a + b} \frac{m}{p} = \frac{m}{p}$

O duarum est dimensionum, id est, termino  $\frac{mm-mn}{2nn}$  OOA  $\frac{m-2n}{n}$  DE Mo. TU COR. FORUM.

$$= P + P Q \frac{m}{p} = P P + \frac{m}{p} A Q + \frac{m-p}{2p} B Q + \frac{m-2p}{3p} C Q + \frac{m-3p}{4p} D Q + \&c.$$

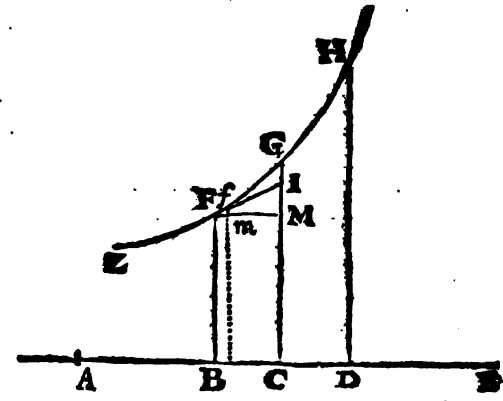
Nam sit Radix quæ sita  $a + b$  æqualis seriei infinitæ  $A + B Z + C Z^2 + D Z^3$  &c. erit  $a + b$  æqualis huic seriei ad dignitatem  $p$  evectæ, sumatur ergo serie potentiz  $a + b$  quæ erit  $a^m + m a^{m-1} b + m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3$  &c. conferantur cum terminis dignitatis infinitinomiali  $A + B Z + C Z^2 + D Z^3$  &c. ad dignitatem  $p$  evecti, (n. 550) invenieturque  $A p = a^m$ ;  $p A p - 1 B Z = m a^{m-1} b$ ;  $p A p - 2 C Z^2 + p \times \frac{p-1}{2} A p - 3 D Z^3$

$$= m a^{m-1} b; p A p - 2 C Z^2 + p \times \frac{p-1}{2} A p - 3 D Z^3 = m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2; p A p - 3 D Z^3 + p \times \frac{p-1}{2} A p - 2 \times 2 B C Z^2 + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A p - 1 B Z^3 = m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3$$

$$\&c. Unde invenietur  $A = a^{\frac{m}{p}}$ ,  $B Z = \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b$ ,  $C Z^2 = \frac{m \times m-p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2$  &c.$$

552. Lemma. Si in rectâ A E positio-  
ne datâ, ad quam curva Z F H refertur,  
capiatur abscissa quævis A B, sitque ordi-  
nata correspondens F B æqualis dignitati  
abscissæ A B, in datam quantitatem 1  
ductæ, & deinde capiantur intervalle æ-  
qualia B C, C D, & agantur ordinatæ  
C G, D H, ac per punctum F ducatur tan-  
gens F I ordinatæ C G occurrens in I, &  
Tunc L

recta F M parallela lineæ A E, eidem or-  
dinatæ occurrens in M, ac tandem ordi-  
nata C G, seu A B + B C, eleveatur ad  
dignitatem cujus est index  $q$  atque ita in  
seriem infinitam convergentem resolvatur,  
hujus seriei primus terminus erit semper



æqualis ordinatæ F B, insistenti ad initium  
quantitatis constantis B C; secundus ter-  
minus æqualis erit differentiz inter F B &  
C I, id est, lineæ M I, & tertius ter-  
minus unâ cum sequentibus in infinitum æ-  
quabitur lineæ C I quæ jacet inter tangen-  
tem & curvam. ... Dem. Sit A B = x, F B  
= y, data B C = O, ducta intelligatur ordi-  
nata f b, alteri F B infinite propinqua  
quæ lineam F M secet in m, & punctis  
F, f, coeuntibus erit F m = d x, f m = d y,  
ac triangula F m f, F M I similia, ideo-  
que d x : d y = O : M I, sed quoniam y = x<sup>q</sup>  
(ex hyp.) & proinde d y = q x<sup>q-1</sup> d x,  
est d x : d y = 1 : q x<sup>q-1</sup>, ergo M I = q x<sup>q-1</sup> x O  
& C I = F B + M I = x + q x<sup>q-1</sup> x O.  
Præterea (ex hyp.) est G C = x + O<sup>q</sup> =  
x + q x<sup>q-1</sup> O +  $\frac{q \times q-1}{1 \times 2} x^2 O^2 +$   
 $\frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3} x^3 O^3 + \&c.$  in infi-  
nitum (548). Quare erit G I = G C -  
C I =  $\frac{q \times q-1}{1 \times 2} x^2 O^2 + \frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3} x^3 O^3$   
X x x.

LIBER  
PRIMUS  
PROP.  
XCIII.  
THEOR.  
XLVII.

DE MO-  $x^1 - 10 + \&c.$  in infinitum. Ergo seriei

TU COR- inquam resolvitur  $x + 0$ , terminus primus

FORUM  $x^1$ , æqualis est ordinatæ F B, secundus

LIBER terminus  $q x^1 - 10$ , æqualis differentiæ

PRIMUS. inter F B & C I, & tertius terminus unâ cum

PRO P. sequentibus in infinitum æqualis lineæ G I.

Eadem est demonstratio, si curva Z F H

concavitatem lineæ A E obvertat. Q. E. D.

XIII. THEOR. 553. Cor. 1. Si quantitas O, seu B C,

in infinitum minuatur ut fiat  $= dx$ , termi-

ni omnes in serie subsequentes sunt infi-

niti minores quovis termino antecedente,

quod quantitatis O index in singulis ter-

minis unitate crescat, ideòque termini illi

subsequentes neglegi possunt, & proinde

in hac hypothesi  $M I = dy = M G$ ,  $G I =$

$\frac{q \times q - 1}{1 \times 2} x^1 - 10^2 = \frac{q \times q - 1}{1 \times 2} x^1 - 2 dx^2$

$= \frac{1}{2} dy$ . Nam cum sit  $dy = q x^1 - 10 dx$

&  $dx$ , constans, erit sumptis fluxioni-

bus,  $ddy = q \times q - 1 x^1 - 2 dx^2$ .

554. Cor. 2. In eadem Hypothesi erit

$dddy$  ut quantus seriei terminus,  $ddddy$ ,

ut quintus, & ita porro in infinitum. Nam

quia est  $ddy = q \times q - 1 x^1 - 2 dx^2$ , erit  $dddy$

$= q \times q - 1 \times q - 2 x^1 - 3 dx^3$ , &  $ddddy$

$= q \times q - 1 \times q - 2 \times q - 3 x^1 - 4 dx^4$ , &

ita deinceps. Quartus autem seriei termi-

nus positâ  $O = dx$ , est  $\frac{q \times q - 1 \times q - 2}{1 \times 2 \times 3}$

$x^1 - 10 dx$ . Quintus  $\frac{q \times q - 1 \times q - 2 \times q - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$

$x^1 - 10 dx +$ ; Ergo ob datos numeros  $1 \times 2 \times 3$

&  $1 \times 2 \times 3 \times 4$ . &c. patet corollarium.

555. Cor. 3. Eadem omnia vera sunt,

si fuerit ordinata B F seu y æqualis seriei

cuius potentiarum quarumlibet abscissæ

A B in datas quantitates ductarum, hoc

est  $y = ex^1 + fx^2 + gx^3 + \&c.$  Ea-

dem enim demonstratio. Observandum

tamen est in hoc casu primum seriei ter-

minum dici in quo quantitas O, seu B C,

non extat, secundum terminum in quo

quantitas illa est unius dimensionis, tertium

in quo extat duarum dimensionum & sic

in infinitum, licet in singulis terminis itâ

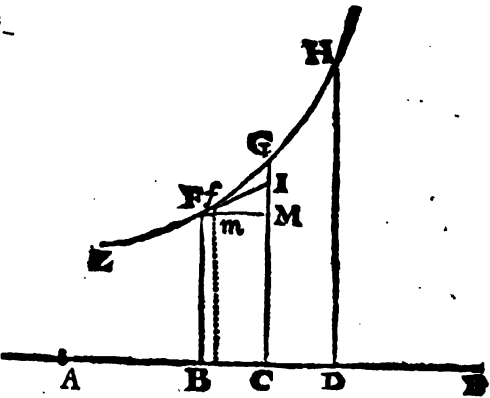
definitis plures contineantur quantitates fi-

gnis + vel - conjunctæ. Exempli cau-

sâ. Positâ  $y = ex^1 + fx^2 = B F$ , erit G C

$= e(x + 0) + f(x + 0) = ex^1 + fx^2$

$+ \frac{m}{1} ex^1 - 10 + \frac{n}{1} ex^1 - 10 + \&c.$



in infinitum. Primus seriei terminus est

$ex^1 + fx^2$ , secundus  $\frac{n}{1} ex^1 - 10 +$

$\frac{m}{1} ex^1 - 10$  & ita de cæteris.

556. Cor. 4. Hinc sequitur eadem omnia

valere, si fuerit ordinata B F seu y

æqualis cuilibet functioni ipsius abscissæ

A B, seu x, hoc est  $y = Q$ , & Q quanti-

tas ex abscissâ x, ipsiusque potentiis ac

aliis quantitatibus datis quomodolibet com-

positâ. Nam quantitas illa Q poterit sem-

per vel (per Lemma 548.) ejusque co-

rollaria vel per divisionem in seriem ali-

quam resolvi, cujus singuli termini erunt

vel ipsius abscissæ x potentie in quantita-

tes datas ductæ, vel quantitates omnino

datæ, omnis verò quantitas data  $c = ex^1$ .

Quare æquatio  $y = Q$ , semper reduci po-

terit in formam æquationis cor. 3. (555.)

$y = ex^1 + fx^2 + gx^3 + \&c.$  Exempli

causâ: Sit  $y = g + \frac{ee}{b+x} + (ff + xx)^{\frac{1}{2}}$ .

Peraçtâ divisione in infinitum, erit

$\frac{ee}{b+x} = \frac{ee}{b} - \frac{ee x}{b^2} + \frac{ee x^2}{b^3} - \frac{ee x^3}{b^4} +$

$\frac{ee x^4}{b^5} \&c.$  in infinitum; &  $ff + xx^{\frac{1}{2}} =$

$f + \frac{x^2}{2f} - \frac{x^4}{8f^3} + \frac{x^6}{16f^5} \&c.$  in infinitum.

Nam in hoc casu erit in formulâ P

$+ \frac{m}{p} A Q + \frac{m-p}{2p} B Q \&c.$  (551.)

$m =$

# PRINCIPIA MATHEMATICA. 531

vim proportionalem esse suppono. (c) Est igitur vis DE Mo-  
 quæfita ut  $\frac{m m - n n}{n n} A \frac{m - 2 n}{n}$ , vel quod perinde est, ut  $\frac{m m - n n}{n n} B \frac{m - 2 n}{m}$ . Ut si ordinatim applicata parabolam attin-  
 gat, existente  $m = 2$ , &  $n = 1$ : fiet vis ut data  $2 B^o$ , ideoque  
 dabitur. Datâ igitur vi corpus movebitur in parabolâ, quemad-  
 modum

DE Mo-  
 TU COR-  
 PORUM.  
 LIBER  
 PRIMUS.  
 PROP.  
 XCIII.

THEOR.  
 XLVII.

$$m = 1, p = 1, P = f f, Q = \frac{x^2}{f f} A = P \frac{m}{p} =$$

$$f f \frac{1}{2} = f B = \frac{m}{p} \times A Q = \frac{x^2}{2 f}, \text{ \& sic deinceps, ergo erit } y = g + \frac{e e}{b} + f - \frac{e e x}{b}$$

$$+ \left( \frac{e e}{b} + \frac{1}{2} f \right) x^2 - \frac{e e x^3}{b} + \left( \frac{e e}{b} - \frac{1}{8 f} \right) x^4,$$

\&c. in infinitum.

(c) 157. \* Est igitur vis quæfita &c.  
 Moveatur corpus in curvâ P Q F, vi ten-  
 dente ad planum seu basim A F, secun-  
 dum lineas P B, Q C cum basî A F an-  
 gulum datum constituentibus. Producatur  
 ordinata C Q ut tangenti per P ductæ  
 occurrat in R, & ex puncto curvæ Q ad  
 ordinatam P B agantur Q L parallela A F,  
 & Q T ad P B perpendicularis. Jam si  
 vis centripeta fingatur ad punctum S infi-  
 nitè distans tendere, coeuntibus punctis  
 P & Q vis illa in puncto P erit ( per

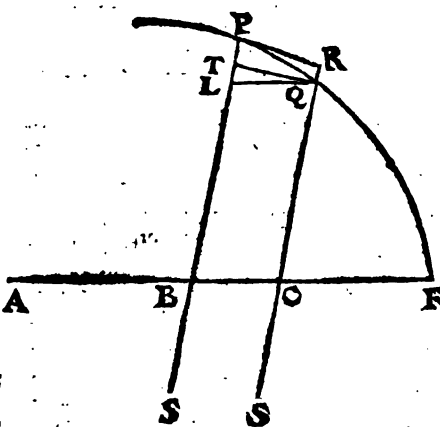
cor. 2. prop. 6. ) directè ut  $\frac{Q R}{S P^2 \times Q T}$ ,

hoc est, ob constantem S P, ut  $\frac{Q R}{Q T}$ .

Porro ob angulum Q L T datum, & angu-  
 lum Q T L rectum, datur specie triangu-  
 lum Q T L, & idè datâ Q L, datur etiam  
 Q T, ergo datâ B C seu Q L, vis erit  
 ut Q R. Sed si abscissa A B dicatur = A,

ordinata B P = B, & B C = O, cum sit  
 (ex Hyp.) B, ut  $A \frac{m}{n}$ , erit ordinata C Q  
 ut  $A + O \frac{m}{n}$ , & (152.) Q R ut æquius

terminus seriei in quam resolvitur  $A + O \frac{m}{n}$ ,  
 hoc est, (150) ut  $\frac{m \times m - n}{1 \times 2 \times n^2} A \frac{m - 2 n}{n} \times O O$ ,  
 $= \frac{m m - n n}{2 n^2} A \frac{m - 2 n}{n} \times O O$ , seu ut  $\frac{m m - n n}{n^2}$   
 $\times A \frac{m - 2 n}{n}$ , ob datam quantitatem



$\frac{O Q}{2}$ . Est igitur vis quæfita ut  $\frac{m m - n n}{1 \times 2 \times n^2}$   
 $\times A \frac{m - 2 n}{n}$  vel ut  $\frac{m m - n n}{n n} B \frac{m - 2 n}{m}$   
 quia cum sit B, ut  $A \frac{m}{n}$ , erit B ut  $A$ , &  
 X x x 2 B



DE MO- modum *Galileus* demonstravit. Quod si ordinatim applicat  
TU COR- hyperbolam attingat, existente  $m = 0 - 1$ , &  $n = 1$ ; fiet vis ut  
PORUM.  $2 A - 3$  seu  $2 B$  : ideoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim ap-  
LIBER. plicatæ, corpus movebitur in hyperbolâ. Sed missis hujusmodi  
PRIMUS. propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum  
PROP. attigi.

XCIII. THEOR.

XLVII.

SEC.

$$B \frac{n}{m} \times \frac{m-2n}{n}, \text{ seu } B \frac{m-2n}{m}, \text{ ut } A \frac{m-2n}{n}$$

Itaque si ponatur  $m = 2$ ,  $n = 1$ , erit  $B$ ,

ut  $A^2$ , & curva  $PF$  parabola, &  $\frac{mm-mn}{nn}$

$$B \frac{m-2n}{m} = 2 B^0, \text{ adeoque vis ut data}$$

$2 B^0 = 2$ . Quod si ponatur  $m = -1$ , &

$n = 1$ , erit  $B$ , ut  $\frac{1}{A}$  hoc est  $B \times A$  rectan-

gulum datum, & proinde curva  $PF$  hy-  
perbola cujus asymptotus  $AF$ , & centrum

$$A; \& \frac{mm-mn}{nn} A \frac{n}{n} = 2 A - 1 = \frac{2}{A};$$

$2 B$ ; & ideo vis ut cubus ordinatæ  $B$ . Sed  
quoniam hyperbola convexitatem obver-  
tis asymptoto  $AF$ , vi. illâ corpus à basi  
 $AF$  repelletur.

Si curva  $PQF$ , est ellipsis cujus cen-  
trum  $A$ , semidiameter  $AF = C$ , erit  $PB^2$

seu  $B^2$ , ut rectangulum  $AF + AB \times BF$

$= C + A \times C - A = CC - AA$ , & ponen-

do  $BC = O$ , erit  $QC^2$ , ut  $CC - AA$

$= 2 AO - OO$ , fiat  $CC - AA = DD$ ,

erit  $QC^2$ , ut  $DD - 2 AO - OO$ , & radi-

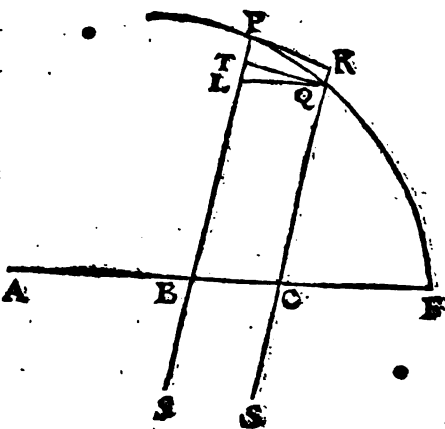
oe per formulam generalem extractâ (550.

551) erit  $QC$ , ut  $D - \frac{AO}{D} - \frac{OO}{2D} =$

$\frac{AAOO}{2D} - \frac{AO}{2D} - \frac{AO}{2D}$ , &c. tertius

seriei terminus est  $\frac{OO}{2D} + \frac{AAOO}{2D} =$

$\frac{DD + AA \times OO}{2D} = \frac{CCOO}{2D}$ , erit igitur



ut  $QR$  (552. 553) seu vis ut  $\frac{CC}{2D}$ , hoc

est, ob datam quantitatem  $\frac{CC}{2}$ , ut  $\frac{1}{D}$ ,

ac proinde quoniam  $BE$  est ut  $GC - AA$

seu  $DD$ , vis erit ut  $\frac{1}{B}$ , hoc est,

ut cubus ordinatim applicatæ reciprocè,

quod convenit cum solutione Problematis

III. Eodem modo demonstratur vim à pla-

no  $AF$  repellentem, decrescere in ratione

triplicatâ ordinatim applicatæ  $PB$  si cor-

pus moveatur in hyperbolâ, cujus diame-

ter una sit in plano  $AF$ , altera conjugata

in lineâ parallelâ ordinatis  $PE$ ,  $QC$ , &c.

convexitus plano  $AF$  obverta.

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

## SECTIO XIV.

533

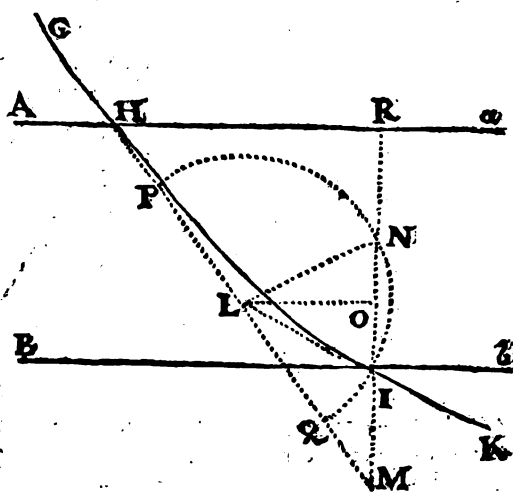
*De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.*

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCIV.  
THEOR.  
XLVIII.

### PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

*Si media duo similia, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum; neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinus emergentiæ ex plano altero in ratione datâ.*

*Cas. 1.* Sunto  $Aa$ ,  $Bb$  plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius  $Aa$  (d) secundum lineam  $GH$ , ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eaque actione describat lineam curvam  $HI$ , & emergat (e) secundum lineam  $IK$ . Ad planum emergentiæ  $Bb$  erigatur perpendicularum  $IM$ , occurrens tum lineæ incidentiæ  $GH$  productæ in  $M$ , tum plano incidentiæ  $Aa$  in  $R$ ; & lineæ emergentiæ  $KI$  producta occurrat  $HM$  in



L. Cen-

(d) 558. \* Secundum lineam  $GH$ . Angulus incidentiæ hic dicitur complementum anguli  $GHA$  ad rectum, seu angulus quem linea  $GH$  constituit cum rectâ ad planum incidentiæ  $Aa$  perpendiculariter erectâ in  $H$ . Angulus emergentiæ est etiam angulus  $KIM$ , quem linea directio-

nis corporis emergentis, efficit cum rectâ  $IM$  ad planum emergentiæ  $Bb$ , perpendiculari in  $I$ .

(e) \* *Es emergat secundum lineam.* Patet rectas  $GH$ ,  $IK$  seu corporis in  $H$  &  $I$  directiones, curvam  $HI$  in punctis  $H$ ,  $I$  contingere.

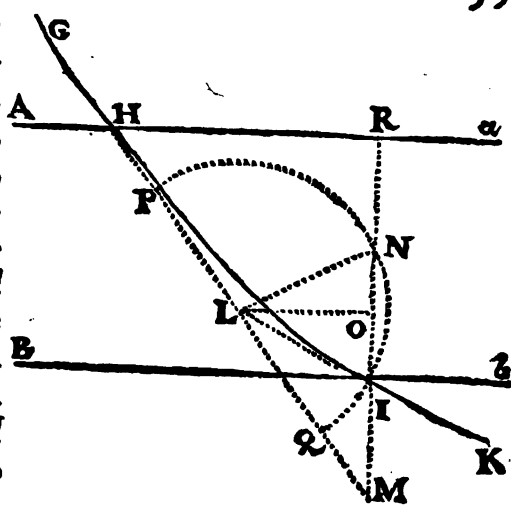


ad  $MI$  demittatur per-  
pendiculum  $LO$ , <sup>(h)</sup> æ-  
quales erunt  $MO$ ,  $OR$ ; &  
additis <sup>(i)</sup> æqualibus  $ON$ ,  
 $OI$ , fient totæ æquales  $MN$ ,  
 $IR$ . Proinde cum  $IR$  de-  
tur, datur etiam  $MN$ ; est-  
que rectangulum  $NMI$   
ad rectangulum sub latere  
recto &  $IM$ , hoc est, ad  
 $HMq$ , in datâ ratione.

<sup>(k)</sup> Sed rectangulum  $NMI$   
æquale est rectangulo  
 $PMQ$ , id est, differentiæ

quadratorum  $MLq$ , &  $PLq$  seu  $LIq$ ; &  $HMq$  datam ra-  
tionem habet ad sui ipsius quartam partem  $MLq$ : ergo da-  
tur ratio  $MLq - LIq$  ad  $MLq$ , <sup>(l)</sup> & convertendo ratio  $LIq$   
ad  $MLq$ , & ratio dimidiata  $LI$  ad  $ML$ . Sed in omni trian-  
gulo  $LMI$ , sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppo-  
sitis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ  $LMR$  ad sinum  
anguli emergentiæ  $LIR$ . Q. E. D.

Cas. 2. Transeat jam corpus successivè per spatia plura pa-  
ral-



tro  $HT$  datum; agatur ordinatim appli-  
cata  $XE$  parabolæ occurrens in  $E$ , & per  
 $E$  ducatur  $ED$  parallela  $XH$  & tangenti  
 $HM$  occurrens in  $D$ , ac proinde æqualis  
datæ  $XH$ . Jam verò  $HX$  seu  $DE$ , est  
spatium quod corpus vi attractrice describit  
eodem tempore dato quo motu uniformi  
projectionis percurrit  $HD$ , ideòque datis vi  
attractrice & velocitate projectionis, data  
quoque erit linea  $HD$  in quovis inciden-  
tiæ angulo  $GHT$ . Est autem latus rectum  
diametri  $HT$  tertia proportionalis ad ab-  
scissam  $HX$ , & ordinatam  $XE$  seu  $HD$ .  
Ergò datis vi attractrice & velocitate pro-  
jectionis, datum seu constans est latus re-  
ctum diametri  $HT$ . Q. E. D.

(h) \* *Æquales erunt  $MO$ ,  $OR$*  (per  
prop. 2. lib. 6. Elem.)

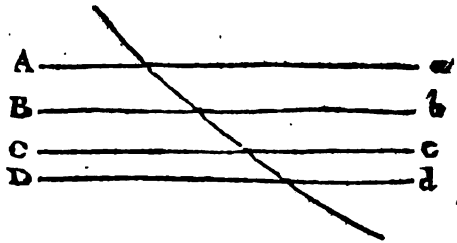
(i) \* *Æqualibus  $ON$ ,  $OI$* . Per prop;  
3. lib. 3. Elem.

(k) \* *Sed rectangulum  $NMI$  æquale  
est rectangulo  $PMQ$* , (per cor. 1. prop;  
36. lib. 3. Elem.) id est, differentiæ quadra-  
torum  $ML^2$  &  $PL^2$ , est enim  $PM = ML$   
+  $PI$ , &  $QM = ML - LQ = ML - PL$ ;  
Quare  $PM \times QM = ML^2 - PL^2$ . (Per  
Corol. 6. 2<sup>a</sup>. Elem.)

(l) \* *Es convertendo*. Sint enim  $A$   
&  $B$ , quantitates datæ, &  $ML^2 - LI^2$ :  
 $ML^2 = A^2 : B^2$ : erit  $ML^2 : LI^2 = B^2 : B^2$   
 $= A^2$ , quæ est ratio data.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCIV.  
THEOR.  
XLVIII.

rallis planis terminata,  $Aa b B$ ,  $B b c C$ , &c. & agitetur vi qua  
fit in singulis separatim unifor-  
mis, at in diversis diversa; &  
per jam demonstrata, sinus in-  
cidentiæ in planum primum  $Aa$   
erit ad sinum emergentiæ ex  
plano secundo  $B b$ , in datâ ra-  
tione; & hic sinus, qui est si-

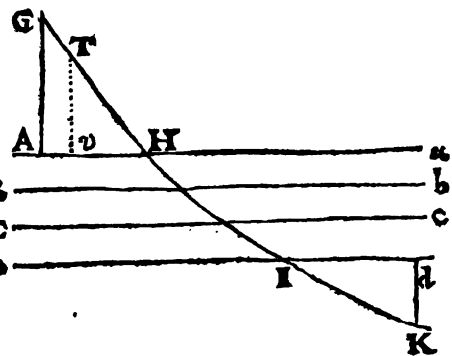


nus incidentiæ in planum secundum  $B b$ , erit ad sinum emergen-  
tiæ ex plano tertio  $C c$ , in datâ ratione; & hic sinus ad sinum emer-  
gentiæ ex plano quarto  $D d$ , in datâ ratione; & sic in infinitum:  
& (\*) ex æquo, sinus incidentiæ in planum primum ad sinum  
emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam  
planorum intervalla, & augeatur numerus in infinitum, eò ut at-  
tractionis vel impulsus actio, secundum legem quamcunque assi-  
gnatam, continua reddatur, & ratio sinus incidentiæ in planum  
primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo, semper data existi-  
tens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*

### PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

*Isdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus ve-  
locitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.*

Capiantur  $AH$ ,  $Id$  æqua-  
les, & erigantur perpendicu-  
la  $AG$ ,  $dK$  occurrentia li-  
neis incidentiæ & emergen-  
tiæ  $GH$ ,  $IK$ , in  $G$  &  $K$ .  
In  $GH$  capiatur  $TH$  æqualis  
 $IK$ , & ad planum  $Aa$  de-  
mittatur normaliter  $Tv$ . Et  
(per legum corol. 2.) distin-  
guatur motus corporis in duos,



unum

(\*) \* Et ex æquo. Sint quantitates  
datæ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , &c. Sinus inciden-  
tiæ in planum primum  $S$ , sinus emergentiæ  
ex secundo plano, idem qui sinus inciden-

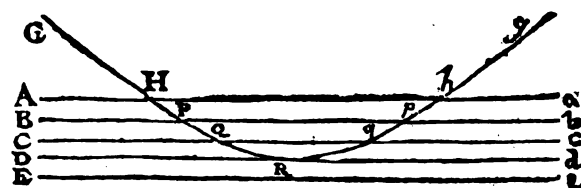
tiæ in secundum planum  $T$ , & ita porro  
sinus sint  $S$ ,  $T$ ,  $V$ ,  $X$ , &c. ponaturque  
 $S : T = A : B$ ,  $T : V = B : C$ ,  $V : X = C : D$ ,  
& erit, ex æquo,  $S : X = A : D$ .

unum planis  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ , &c. perpendiculararem, alterum DE MO-  
iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo se- TU COR-  
cundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum PORUM.  
parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æquali- LIBER  
bus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ PRIMUS.  
sunt inter lineam  $AG$  & punctum  $H$ , interque punctum  $I$  & x cv.  
lineam  $dK$ ; (n) hoc est, æqualibus temporibus describet lineas THEOR.  
 $GH$ ,  $IK$ . Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem XLIX.  
post emergentiam, ut  $GH$  ad  $IK$  vel  $TH$ , id (o) est, ut  $AH$   
vel  $Id$  ad  $vH$ , hoc est (respectu radii  $TH$  vel  $IK$ ) (p) sinus  
emergentiæ ad sinum incidentiæ. Q. E. D.

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

*Iisdem positis, & (q) quod motus ante incidentiam velocior sit  
quam postea, dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ,  
refleſctetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo in-  
cidentiæ.*

Nam concipe cor-  
pus inter parallela pla-  
na  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  
&c. describere arcus  
parabolicos, ut su-  
pra; sintque arcus illi



$HP$ ,  $PQ$ ,  $QR$ , &c. Et si ea lineæ incidentiæ  $GH$  obli-  
quitas ad planum primum  $Aa$ , ut sinus incidentiæ sit ad ra-  
dium circuli, cujus est sinus, in eâ ratione quam habet idem  
sinus

(n) \* Hoc est, æqualibus temporibus.  
Quoniam motu composito corpus fertur  
per lineas  $GH$  &  $IK$ , eodem tempore de-  
scribit  $GH$  quo  $AH$ , &  $IK$  quo  $Id$ , sed  
(ex Dem.) tempora quibus conficiuntur  
intervalla parallela & æqualia  $AH$ ,  $Id$   
æquantur, ergo corpus æqualibus tempo-  
ribus describit lineas  $GH$  &  $IK$ .

(o) \* Id est ut  $AH$  vel  $Id$  ad  $vH$ .  
Per prop. 2. lib. 6. Elem.

(p) \* Ut sinus emergentiæ. Est enim  
Tom. I.

angulus  $vTH$  anguli  $THv$ , & angulus  
 $IKd$  anguli  $KId$ , complementum ad re-  
ctum, & proinde (558) prior est æqualis  
angulo incidentiæ, posterior est æqualis  
angulo emergentiæ.

(q) \* Et quod motus ante incidentiam  
&c. Ut angulus emergentiæ semper cres-  
cat (prop 95.) & ipsius proinde comple-  
mentum ad rectum semper decreſcat in  
transitu corporis per diversa media.

# 538 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE Mo sinu incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano  $Dd$ , in spa-  
TU COR- tium  $DdeE$ : & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem  
PORUM. radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergen-  
LIBER tiæ coincidit cum plano  $Dd$ . Perveniat corpus ad hoc pla-  
PRIMUS. num in puncto  $R$ ; &

P R O P. quoniam linea emer-

XCVL gentiæ coincidit cum

THEOR. eodem plano, perspi-

L. cum est quod corpus

non potest ultra perge-

re versus planum  $Ee$ . Sed nec potest idem pergere in lineâ

emergentiæ  $Rd$ , propterea quod perpetuò attrahitur vel impel-

litur ( <sup>r</sup> ) versus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter

plana  $Cc$ ,  $Dd$ , describendo arcum parabolæ  $QRq$ , ( <sup>f</sup> ) cu-

jus vertex principalis ( juxta demonstrata *Galilei* ) est in  $R$ ;

secabit planum  $Cc$  in eodem angulo in  $q$ , ac prius in  $Q$ ;

dein pergendo in arcubus parabolicis  $qp$ ,  $ph$ , &c. arcubus

prioribus  $QP$ ,  $PH$  similibus & æqualibus, secabit reliqua

plana in iisdem angulis in  $p$ ,  $h$ , &c. ac prius in  $P$ ,  $H$ ,

&c. emergetque tandem eâdem obliquitate in  $h$ , quâ inci-

dit in  $H$ . Concipe jam planorum  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ ,  $Ee$ ,

&c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut

actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque as-

signatam continua reddatur: & angulus emergentiæ semper an-

gulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æ-

qualis. *Q. E. D.*

Scho-

( <sup>r</sup> ) \* Versus medium incidentiæ v. gr.  $Cc$ .

( <sup>f</sup> ) \* Cujus vertex principalis. Quo-  
niam enim ( ut patet ex not. 40. ) omnes  
diametri parabolæ  $QRq$  sunt ad basim  
 $Qq$  perpendiculares, erit  $Qq$  ad axem  
ordinatim applicata, cumque recta  $DRd$   
ipsi  $Qq$  parallela parabolam tangat in  $R$ ,  
( 40 ) erit  $R$  vertex principalis ( per lem.  
4. de Conic. ) & propterea velocitates cor-

poris in locis  $Q$  &  $q$  à vertice  $R$  æque re-  
motis æquales erunt, & directiones illius-  
ad lineam  $Qq$  æque inclinatz. Insuper  
velocitas perpendicularis quâ corpus ex  
solâ vi attractrice ad planum  $Pp$  urgetur,  
iisdem gradibus crescit per totum spatium  
 $qp$ , quibus antè decreverat per spatium  
æquale  $PQ$ . Quare corpus pergendo in ar-  
cubus parabolicis &c.

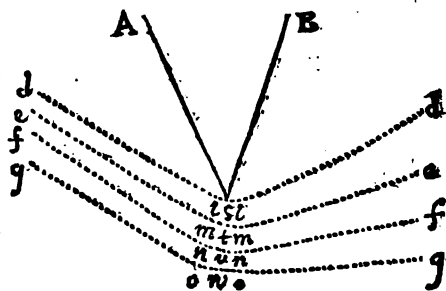




DE Mo-  
TU COR-  
PORUM. LIBER  
PRIMUS. PROP.  
xcvi. THEOR.  
L.

porum vel opacorum vel perspicuorum angulos ( quales sunt  
nummorum ex auro, argento & ære cusorum termini rectan-  
guli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum  
acies ) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; &  
ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora  
incurvantur magis, (x) quasi magis attracti, ut ipse etiam di-  
ligenter observavi. Et qui transeunt ad majores distantias mi-  
nus incurvantur; & ad distantias adhuc majores incurvantur ali-  
quantulum ad partes contrarias, & tres colorum fascias efformant.

In figura designat s aciem cultri vel cunei cujusvis *A*; *B*; & *g o w o g*  
*f n u n f*, *e m t m e*, *d l s l d* sunt  
radii, arcubus *o w o*, *m t m*,  
*l s l* versus cultrum incurvati;  
idque magis vel minus pro di-  
stantia eorum à cultro. Cum  
autem talis incurvatio radio-  
rum fiat in aere extra cultrum,  
debeant etiam radii, qui inci-  
dunt in cultrum, prius incur-



viri in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio in-  
cidentium in vitrum. (y) Fit igitur refraction, non in puncto in-  
cidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum,  
factam

(x) \* *Quasi magis attracti.* Alia egregia experimenta vide in *Newtoni Opticæ* initio lib. 3. & quæst. 29.

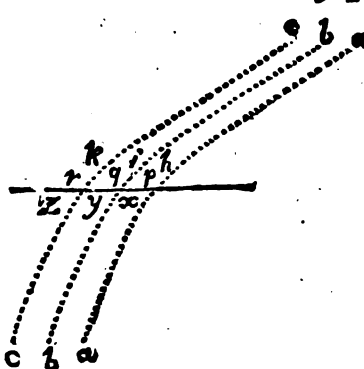
(y) \* *Fit igitur refraction & reflexio.* Vide *Prop. 8. & 9. Partis 3. Lib. Opticæ Newtoni.* Sed ut res clariùs intelligatur, sint media duo contigua, *A a b B*, *B b c C*, planis parallelis terminata, & quorum talis sit attractionis lex ut ultra distantiam *p R* à medio alterutro evanescat ejus medii attractio. Itaque centro *p* & radio *p R* (*fig. 1.*) describatur circulus vel potius sphaera *R Z V X* quæ planum *B b* non attingat, corpus *p* versus omnia hujus sphaeræ puncta æqualiter attractum, nullam in partem inflectetur, sed manebit in lineâ rectâ *G C*, secundum quam moveri supponitur. Si in eadem rectâ *G C*, capia-

tur punctum *C*, à plano *B b* remotum distantia *C V = P R*, sitque vis attractiva versus medium *B b c C*, major vi attractivâ medii *A a b B*, in eo ipso loco *c* corpus *a* rectâ viâ *G c* deflectere curvamque lineam describere incipiet. Perveniat (2.º) corpus en *C* in *e*, per curvam *c e*, & ductâ *H M* ad planum *A a*, *B b* perpendiculari, ac per punctum *e*, rectâ *e T*, quæ curvam *c e* tangat in *e*, & perpendiculo *H M* occurrat in *T*, erit angulus *e T c* minor angulo incidentiæ *G H M*; nam cum segmentum *K V L*, in hemisphaerio *X V Z* magis trahat versus planum *B b* quam segmentum ipsi æquale in hemisphaerio *X R Z*, (*ex hyp.*) versus planum *A a*; manifestum est curvam deorsum inflecti, ideoque tangentem *e T* à radio inciden-

# PRINCIPIA MATHEMATICA.

541

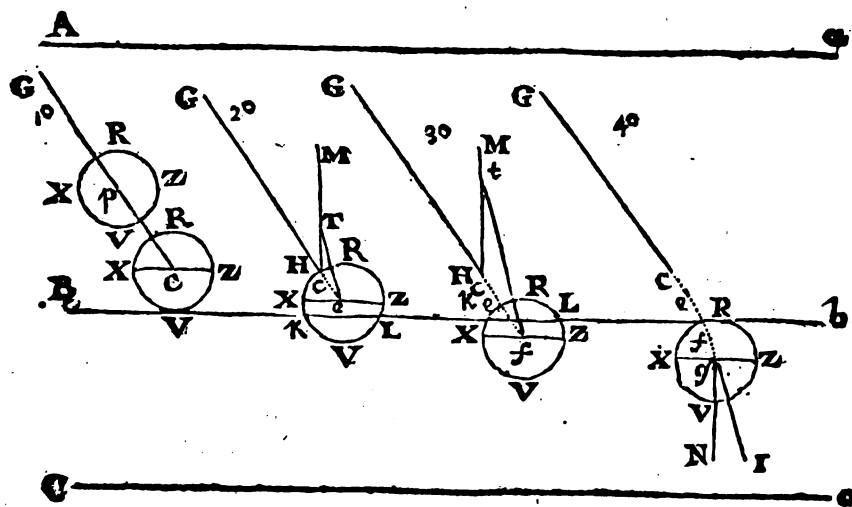
factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim ( ni fallor ) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis  $ekzc$ ,  $biyb$ ,  $ahxa$  incidentibus ad  $r$ ,  $q$ ,  $p$ , & inter  $k$  &  $z$ ,  $i$  &  $y$ ,  $h$  &  $x$ , incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est propositiones



DE MOTU CORPORUM.  
LIBER PRIMUS  
PROP. XCVI.  
THEOR. L.

sequentes in usus opticos subungere; interea de naturâ radiorum ( utrum sint corpora necne ) nihil omnino disputans, sed trajectorys corporum trajectorys radiorum perfimiles solummodo determinans.

PRO-



æ GC, versùs superiora M recedere. Similiter ubi corpusculum C est in f ( 3°. ) intra medium B o c C, magis trahitur versùs planum C c, ab hemisphærio X V Z, quam retrahitur versùs planum B b, ab altero hemisphærio X R Z, cujus segmentum h R L, minus trahit, quam æquale segmentum in hemisphærio X V Z; quare angulus

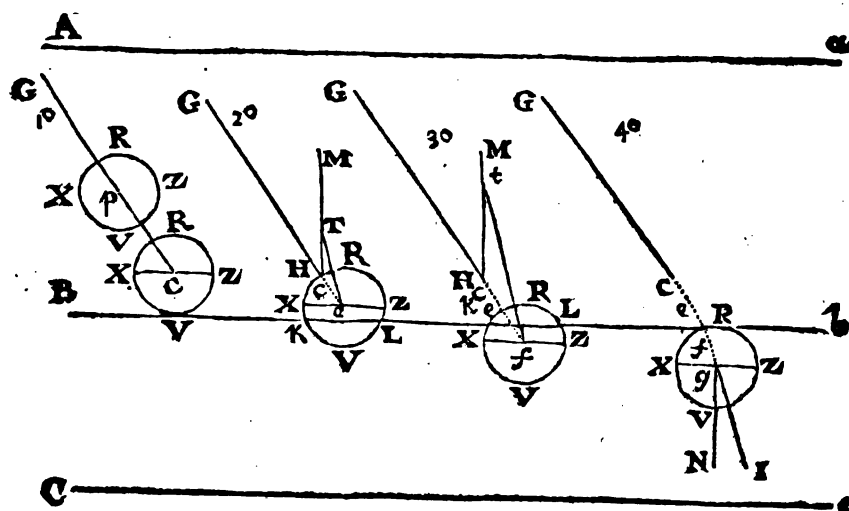
H t f, quem tangens f t cum perpendiculari H M efficit, adhuc minor est quam angulus H T e ( 1°. ). Sed cum tandem corpusculum c pervenit in g ( 4°. ), locum à plano B b remotum distantia maximâ  $g R = p R$ , tum corpus p, æqualiter undique attractum ( ex hypothesis ) semitam non amplius mutat, sed rectâ moveretur per  
Y y y 3, g I,

## PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

*Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinus emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.*

Sit *A* locus à quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *C D E* curva linea quæ circa axem *A B*

revolv-



*g I*, quæ curvam *c e f g* tangit in *g*, estque angulus *N g I*, quem *g I* cum *g N* ad *B b* perpendiculari constituit, seu angulus emergentiæ minor adhuc angulo *H t f* ( $3^\circ$ ). Oppositum eveniet, si medium *B b c C*, minus trahat quam medium *A a b B*, & refractione in reflexionem mutari poterit. Fit igitur refractione & reflexio non in puncto incidentiæ *R* ( $4^\circ$ ). Sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, ut *NEWTONUS* docet. Quod si itaque certissimis experimentis constet radios lucis à corporibus quasi attrahi in minimis distantibus, *NEWTONUS* veram hic demonstravit causam illarum lucis affectionum, quibus contingit ut radii incidentes in superficiem corporis resiliant in plano ad eam verticali, sub angulis reflexionis æqualibus an-

gulis incidentiæ, atque ut ex uno medio in aliud diversæ densitatis aut diversæ vis trahentis, oblique penetrantes refrangantur in plano ad superficiem, quæ duo media dirimit itidem recto, ita ut sinus incidentiæ & emergentiæ datam servent rationem. Satis enim liquet plana linearum *GHI* & *GHRh*, in superioribus propositionibus, perpendicularia esse ad plana *A a*, *B b*, ut planum parabolæ quam gravia in hypothesi Galilæi describunt perpendicularare est ad horizontem. Quænam verò causa sit attractionis aut tendentiæ vel impulsus radiorum lucis in corpora: alia quæstio est quam hic agitare minimè necesse est, quæque sepositâ, interim ex certis experimentis mathematicâ demonstratione, ostensa est reflexionis & refractionis lex & causa; quem-

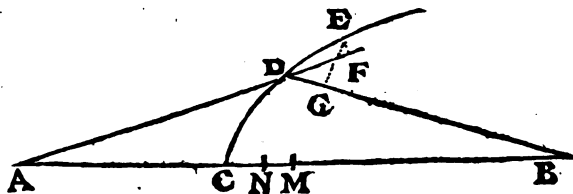
DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.

PROP.

**XCVII.**

**PROBL.**

XLVII



***Q. E. I.***

quemadmodum semel cognitis ( per experientiam ) gravitate atque elaterio aëris , rectè quæ ascensus & descensus liquorum in tubis vacuis causam atque legem demonstrasse censetur , dum ex iis aëris proprietatibus quarum causas ignorat , hæc phaenomena accuratè deduxit . Nam juxta rectam philosophandi rationem , in naturæ phaenomena primum debemus diligenter inquirere , ut postea motus corporum eorumque leges , & causas accuratius investigare & cognoscere possimus . Cæterum in phaenomena reflexionis ac refractionis locis eorumque causas inquisivert Philoſophi ac Mathematici celeberrimi , *Gassius* cap. 2<sup>o</sup>. *Dioptrices* per leges generales resolutionemque motuum , & supponendo lumini minorem resistantiam in densioribus quam in rarioribus mediis obijci ; *Leibnizius* in *Actis Eruditorum Lipsiensibus* An. 1682. pag. 185. hæc factâ hypothesi , quod lumen à puncto radiante ad punctum illustrandum viâ omnium facillimâ perveniat , quæ etiam nûc erat antiq<sup>a</sup> *Hermæus* ; *Hugenius* in tractatu de lumine per naturam

(z) \* *Ratio ultima erit eadem*. Nam lineolæ DE pro radio seu sinu toto usurpata, lineolæ DF, DG sunt sinus angulorum DEF, DEG; sed angulus DEF est complementum ad rectum anguli EDF, seu ADC, ideoque æqualis est angulo incidentiæ, & angulus DEG est complementum ad rectum anguli EDG, ideoque æqualis est angulo emergentiæ (§§8). Ergo lineæ DF ad lineam DG ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ, ideoque data. Et hinc (per cor. Lem. 4.) datur ratio incrementi totius finitæ lineæ AD, ad decrementum totum finitum lineæ DB.

(\*) \* *Punctum illud* D. Atque eodem modo, assumendo varia incrementa C M, & decrementa CN, puncta diversa lineæ CDE determinabuntur. Si verò centro B & radio: quovis describatur circulus, curvam CB secant in E, & lineam A B

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.

**PRIMUS.**

**P R O F**

**XCVII.**

## PROB

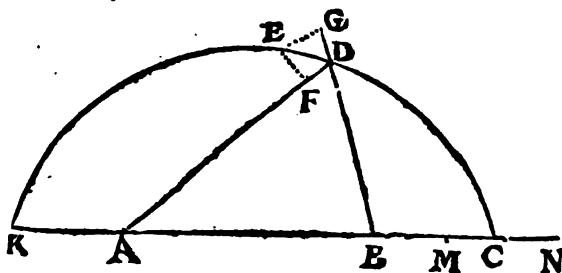
**XLVII.**

**Corol. 2.** Si corpus in superficiem quamvis  $CD$ , secundum lineam rectam  $AD$ , lege quâvis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam  $DK$ , & à puncto  $C$  duci intel-

in N; & inde convolutione superficiei CEN, circa axem CN solidum corpus conficiatur, corpusculum ex D, per lineam DB ad centrum B circuli descripti tendens, non refringetur, dum ex superficie circulari concava EN egreditur, quod corpusculi directio DB, sit ad illam superficiem perpendicularis, atque ita corpusculum semper perveniet ad punctum B.

(b) \* *Habebuntur figurae illae omnes.* Quas enim lineas *Cartesius* Geometriae lib. 2<sup>o</sup>. pag. 50. & seq. dicit A 5, A 6, vel A 7, A 8; eas *NEWTONUS* hic vocat CM, CN, & de cætero eadem est utriusque authoris constructio. Unde manifestum est, si punctum C, inter puncta A & B, & punctum N inter C & M, fixa sint, primam *Cartesii* ovalem *Newtonianam* constructione describi; si manentibus punctis A, C, B, M, punctum N, inter C & A locetur, 2<sup>am</sup>. ovalem *Cartesianam* obtineri; si verò punctum B ad alteras partes puncti C migret ultrà A, & punctum C sit inter A & N, atque M, 3<sup>am</sup>. *Cartesii* ovalem haberi, iisdemque positis, si punctum N sit inter C, & A, 4<sup>am</sup>. ovalem *Cartesii* delineari. Porro, si punctum A vel B in infinitum abeat ut radii incident vel refringantur paralleli, tum per punctum M vel N erigendum erit perpendicularum, quod circulus centro B vel A, & radio B N, vel A M, descriptus secabit in puncto quaesito D, curvæ CDE, quæ erit ellipsis vel hyperbola, ut calculo rito facillè patet, atque hæc sunt figuræ quibus *Cartesius* cap. 3<sup>o</sup>. *Dioptrices* usus est.

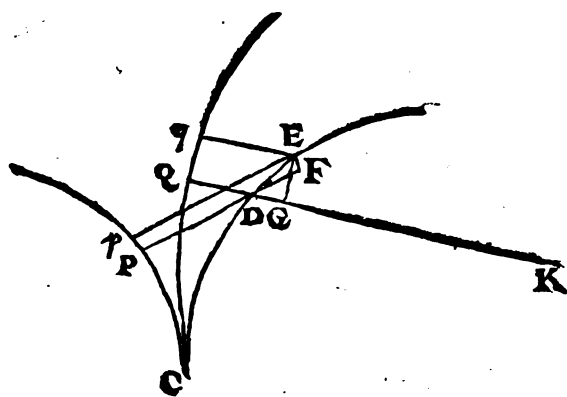
Eadem est demonstratio, si superficies CDE incidentes radios reflectit, quo casu fit  $CN = CM$ , ob angulum incidentiae aequalem angulo emergentiae (per prop. 26.)



& curva CDE erit sectio conica; videlicet hyperbola, si punctum C inter A & B situm; ellipsis, si extra positum sit; Parabola, si ellipseos focus B in infinitum abeat, & circulus, si puncta A & B coeant. Nam si punctum C inter A & B situm sit, & N inter A & C, cum sit  $AD = AM$ , &  $BD = BN$  (per constr.) rectarum AD, BD differentia data erit, ut potest æqualis  $AM - BN = AC + CM - BC - CN = AC - BC$ , ob  $CM = CN$ , idedque curva CDE erit hyperbola cujus foci A & B, (per theor. 3. de hyperbolâ). Si punctum C inter puncta A & B positum non est, ut in hac figurâ, rectarum AD, BD summa data erit, in hoc enim casu punctum C, est inter N, & M, atque  $AD + BD = AC + CM + BC + CN = AC + BC$ . Est igitur CDE ellipsis cujus foci A & B, (Theor. 3. de Ellipsi) quæque foco alterutro in infinitum abeunte mutatur in parabolam & focus coequebibus mutatur in circulum.

DE MO-  
TU COR-  
PORUM.  
LIBER  
PRIMUS.  
PROP.  
XCVII.  
PROBL.  
XLVII.

**PRO**



quare incrementa linearum  $PD$ ;  $QD$ ,  
 atque aded (*cor. Lem. 4.*) lineæ ipsæ  $PD$ ,  
 $QD$ , (quæ simul nascuntur in puncto  $C$ )  
 incrementis istis genitæ, erunt ut sinus in-  
 cidentiz & emergentiz ad invicem, & con-  
 trâ, si lineæ  $PD$ ,  $QD$  curvis  $CP$ ,  $CQ$   
 perpendicularares sint ut sinus incidentiz &  
 emergentiz, erunt earum incrementa nas-  
 centia in eadem semper ratione, ac proinde  
 de si corpus in superficiem  $CD$  secundum  
 lineam  $PD$  incidat, emerget secundum li-  
 nearum  $QD$  seu  $DK$ .

**Tom. I.**

**z z z**





Nam concipe Lineas  $CP$ ,  $CQ$  ipsis  $AD$ ,  $DF$  respective, De Mo-  
 & Lineas  $ER$ ,  $ES$  ipsis  $FB$ ,  $FD$  ubique perpendiculares ef- TU COR-  
 se, (e) ideoque  $QS$  ipsi  $CE$  semper æqualem; & erit (per Co- LIBER  
 rol. 2. Prop. xcvii.)  $PD$  ad  $QD$  ut  $M$  ad  $N$ , (f) ideoque PRIMUS.  
 ut  $DL$  ad  $DK$  vel (g)  $FB$  ad  $FK$ ; & (h) divisim ut  $DL$  PROP.  
 —  $FB$  seu  $PH$  —  $PD$  —  $FB$  ad  $FD$  seu  $FQ$  —  $QD$ ; & compositè ut xcviii.  
 $PH$  —  $FB$  ad  $FQ$ , id est (ob (i) æquales  $PH$  &  $CG$ ,  $QS$  PROBL.  
 &  $CE$ )  $CE + BG$  —  $FR$  ad  $CE$  —  $FS$ . Verùm (ob proportio- XLVIII.  
 nales  $BG$  ad  $CE$  &  $M$  —  $N$  ad  $N$ ) est etiam  $CE + BG$  ad  $CE$   
 ut  $M$  ad  $N$ : (h) ideoque divisim  $FR$  ad  $FS$  ut  $M$  ad  $N$ ,  
 & propterea per Corol. 2. Prop. xcviii, superficies  $EF$  cogit  
 corpus, in ipsam secundum lineam  $DF$  incidens, pergere in  
 linea  $FR$  ad locum  $B$ .  $Q. E. D.$

*Scholium.* Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres  
 vel plures. Ad usus autem opticos maxime accommodatæ sunt  
 figuræ sphericæ. Si perspicillorum vitra objectiva ex vitris duo-  
 bus sphericè figuratis & aquam inter se cludentibus con-  
 flentur; fieri potest ut à refractionibus aquæ errores refraction-  
 um, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accu-  
 ratè corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis  
 & hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius &  
 accuratius formari possint, sed etiam quod penicillos radiorum  
 extra axem vitri fitos accuratius refringant. Verùm tamen  
 diver-

(e) \* Ideoque  $QS$  ipsi  $CE$  semper æqua-  
 lem. Cùm enim linea  $QS$  sit semper per-  
 pendicularis utrique lineæ  $CQ$ ,  $ES$  (ex  
 Hyp.) ea nec crescit, nec decrescit, ob  
 partes curvarum in  $Q$  &  $S$  semper paral-  
 lelas, ut patet.

(f) \* Ideoque ut  $DL$  ad  $DK$ . Est  
 enim (per constr.)  $DK$  ad  $DH$ , ut  $N$   
 ad  $M$ , &  $DL = DH$ , per constr.

(g) \* Vel  $FB$  ad  $FK$ . Ob parallelas  
 $DL$ ,  $FB$  (per constr.)

(h) \* Et divisim. Cùm sit  $PD$  :  
 $QD = DH$  :  $DK = FB$  :  $FK$ , erit divisim  
 $DH$  :  $DK$ , seu  $PD$  :  $QD = DH$  —  $FB$  :  
 $DK$  —  $FK = PH$  —  $PD$  —  $FB$  :  $DF$ , seu

$QF$  —  $QD$ , & compositè  $PD$  :  $QD =$   
 $PH$  —  $PD$  —  $PD$  —  $FB$ , seu  $PH$  —  $FB$  :  
 $QF$  —  $QD$  —  $QD$ , seu  $QF = M$  :  $N$ .

(i) \* Ob æquales  $PH$  &  $CG$ . Nam  
 (per constr.)  $AH = AG$ , & quoniam  
 punctum  $A$  datum est, estque  $AP$  semper  
 perpendicularis ad curvam  $CP$ , liquet  
 eam curvam esse circulum cujus centrum  $A$ ,  
 undè  $AP = AC$ , & hinc  $PH = CG$ ; &  
 simili modo patet esse  $BR = BE$ , ob da-  
 tum punctum  $B$ .

(k) \* Ideoque divisim &c. Nam cùm  
 sit (ex demonstratis)  $M$  :  $N = CE + BG$   
 —  $FR$  :  $CE$  —  $FS = CE + BG$  :  $CE$ ,  
 erit divisim  $M$  :  $N = FR$  :  $FS$ .



